

МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ



11 КЛАСС. Вариант 2

1. [3 балла] Найдите все тройки натуральных чисел $(A; B; C)$ такие, что:

- A — четырёхзначное число, составленное из одинаковых цифр,
- B — трёхзначное число, хотя бы одна из цифр которого равна 1,
- C — двузначное число, хотя бы одна из цифр которого равна 5,
- произведение $A \cdot B \cdot C$ является квадратом некоторого натурального числа.

2. [3 балла] Положительные числа x и y таковы, что значение выражения $K = \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{xy}$ не изменяется, если x уменьшить на 3, а y — увеличить на 3. Найдите все возможные значения выражения $M = x^3 - y^3 - 9xy$.

3. [5 баллов] а) Найдите все пары действительных чисел $(x; y)$ такие, что $(\sin \pi x - \sin \pi y) \sin \pi x = (\cos \pi x + \cos \pi y) \cos \pi x$.

- б) Сколько пар целых чисел (x, y) удовлетворяют одновременно этому уравнению и неравенству

$$\arccos \frac{x}{4} + \arccos \frac{y}{9} < 2\pi?$$

4. [4 балла] В начале месяца было выделено 4 билета на праздничный концерт, которые планировалось случайным образом распределить между одиннадцатиклассниками. В конце месяца выяснилось, что будет выделено больше 4 билетов. Одиннадцатиклассники Петя и Вася вычислили, что вероятность им обоим вместе попасть на концерт в начале месяца была в 3,5 раза меньше, чем оказалась в конце месяца. Сколько всего было выделено билетов на концерт в конце месяца, если количество одиннадцатиклассников не изменилось?

5. [5 баллов] Точка O — центр окружности ω_1 , описанной около остроугольного треугольника ABC . Окружность ω_2 , описанная около треугольника BOC , пересекает отрезок AB в точке P . Найдите площадь треугольника ABC , если $AP = \frac{16}{5}$, $BP = 2$, $AC = 4$.

6. [6 баллов] На координатной плоскости изображена фигура $\Phi(\alpha)$, состоящая из всех точек, координаты (x, y) которых удовлетворяют системе неравенств

$$\begin{cases} (x - 2 \cos \alpha)(y - 2 \sin \alpha) \geqslant 0, \\ x^2 + y^2 \leqslant 9. \end{cases}$$

Найдите максимальное значение M периметра (длины границы) фигуры $\Phi(\alpha)$ и укажите все значения α , при которых оно достигается.

7. [6 баллов] Шар Ω касается всех рёбер правильной усечённой пирамиды, а шар ω касается всех её граней. Найдите угол наклона бокового ребра пирамиды к плоскости её основания.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.



- | | | | | | | |
|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

СТРАНИЦА
1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач **нумеруются отдельно**. Порча QR-кода недопустима!

Ответ: $(5555; 101; 55)$

$$A = a \cdot 1111 = a \cdot 11 \cdot 101$$

11 и 101 - простые числа

$0 < a < 10$, поэтому $A \nmid 11^2$ Значит, $B \cdot C \nmid 101 \cdot 11$.
 $\nmid 101^2$

$$C < 100 < 101 \Rightarrow B \nmid 101 \Rightarrow B$$

а также B - двузначное

$$\Rightarrow B = k \cdot 101, \text{ где } 0 < k < 10, \text{ т.е. } B = \overline{kk}$$

Будет B есть 1, поэтому $k = 1 \Rightarrow B = 101$.

$$B \nmid 11 \Rightarrow C \nmid 11$$

а также C - двузначное

$$\Rightarrow C = l \cdot 11, \text{ где } 0 < l < 10, \text{ т.е. } C = \overline{ll}$$

и C есть 5, поэтому $l = 5 \Rightarrow C = 55$.

$$A \cdot B \cdot C = a \cdot 11 \cdot 101 \cdot 101 \cdot 5 \cdot 11 = 5a \cdot 11^2 \cdot 101^2 -$$

это квадрат, поэтому $5a$ тоже квадрат \Rightarrow

$$a \nmid 5, \text{ но } 0 < a < 10 \Rightarrow a = 5, \text{ т.е. } A = 5555$$

Эта группа находится, т.к. $5555 \cdot 101 \cdot 55 =$

$$= 5 \cdot 11 \cdot 101 \cdot 101 \cdot 5 \cdot 11 = (5 \cdot 11 \cdot 101)^2 = 5555^2$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи **отдельно**.

- | | | | | | | |
|----------------------------|---------------------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|
| <input type="checkbox"/> 1 | <input checked="" type="checkbox"/> 2 | <input type="checkbox"/> 3 | <input type="checkbox"/> 4 | <input type="checkbox"/> 5 | <input type="checkbox"/> 6 | <input type="checkbox"/> 7 |
|----------------------------|---------------------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|

СТРАНИЦА
1 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по **каждой из задач** **нумеруются отдельно**. Порча QR-кода недопустима!

$$k = \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{xy}$$

$$k = \frac{1}{x-3} + \frac{1}{y+3} + \frac{1}{(x-3)(y+3)}$$

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{xy} = \frac{1}{x-3} + \frac{1}{y+3} + \frac{1}{(x-3)(y+3)}$$

$$\left(\frac{1}{x-3} - \frac{1}{x}\right) + \left(\frac{1}{y+3} - \frac{1}{y}\right) + \left(\frac{1}{(x-3)(y+3)} - \frac{1}{xy}\right) = 0$$

$$\frac{3}{x(x-3)} - \frac{3}{y(y+3)} + \frac{xy - xy + 3y - 3x + 9}{xy(x-3)(y+3)} = 0 \quad | \cdot xy(x-3)(y+3)$$

$$3y(y+3) - 3x(x-3) + 3y - 3x + 9 = 0 \quad | : 3$$

или же
равнос 0

$$y^2 + 3y - x^2 + 3x + y - x + 3 = 0$$

$$y^2 + 4y - x^2 + 2x + 3 = 0$$

квадратное уравнение относительно y .

$$\Delta = 16 + 4x^2 - 8x - 12 = 4x^2 - 8x + 4 = 4(x-1)^2$$

$$\Rightarrow y = \frac{-4 \pm 2(x-1)}{2} \Rightarrow y = -2 \pm 2(x-1)$$

$$1 \text{ случай } y = -2 + x - 1 = x - 3$$

$$M = x^3 - y^3 - 9xy = x^3 - (x-3)^3 - 9x(x-3) = x^3 - x^3 + 9x^2 - 27x +$$

$$27 - 9x^2 + 27x = 27$$

$$2 \text{ случай } y = -2 - x + 1 = -x - 1$$

$$M = x^3 + (x+1)^3 + 9x(x+1)$$

при $x > 0$ M возрастает ~~возрастает~~ возрастает



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

1

2

3

4

5

6

7

СТРАНИЦА
2 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач **нумеруются отдельно**. Порядка QR-кода недопустима!

Н также $y > 0$, т.е. $-x - 1 > 0$. Значит, ~~x < 0~~.

$x + 1 < 0$, но $x > 0$. Противоречие.

Ответ: 27



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

- | | | | | | | |
|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

СТРАНИЦА
1 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\text{a) } (\sin \pi x - \sin \pi y) \sin \pi x = (\cos \pi x + \cos \pi y) \cos \pi x$$

$$2 \sin(\pi \frac{x-y}{2}) \cos(\pi \frac{x+y}{2}) \sin \pi x = 2 \cos(\pi \frac{x+y}{2}) \cos(\pi \frac{x-y}{2}) \cos \pi x$$

Если $\cos \pi \frac{x+y}{2} = 0$, то $\frac{\pi}{2}(x+y) = \frac{\pi}{2} + \pi k, k \in \mathbb{Z}$

$\Rightarrow x+y = 1 + 2k$, т.е. получаем любое пару

$(x; 2k+1-x)$, где k -любое целое, $x \in \mathbb{R}$,

$$\text{where } \sin \pi \frac{x-y}{2} \sin \pi x = \cos \pi \frac{x-y}{2} \cos \pi x$$

$$\cos \pi \frac{x-y}{2} \cos \pi x - \sin \pi \frac{x-y}{2} \sin \pi x = 0$$

$$\cos \pi \left(\frac{x-y}{2} + x \right) = 0$$

$$\cos \pi \frac{3x-y}{2} = 0 \Rightarrow \frac{\pi}{2} \frac{\pi}{2} (3x-y) = \frac{\pi}{2} + \pi l, l \in \mathbb{Z}$$

$\Rightarrow 3x-y = 1 + 2l$, т.е. получаем любое пару

$(x; 3x-2l-1)$, где l -любое целое, x -любое действительное.

Остается: $(x; 2k+1-x)$ и $(x; 3x-2l-1)$,

где x -любое действительное, k, l -любые

целые.

$$\delta) \arccos \frac{x}{4} \leq \pi \text{ и } 0 \leq \arccos \frac{y}{9} \leq \pi.$$

А так как $-1 \leq \frac{x}{4} \leq 1$, т.е. $-4 \leq x \leq 4$

$$-1 \leq \frac{y}{9} \leq 1, \text{ т.е. } -9 \leq y \leq 9$$

L

L



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

- | | | | | | | |
|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

СТРАНИЦА
2 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Значит, $x=4$ и $y=9$ единственное решение

Их может, конечно, быть $\arccos \frac{x}{4} + \arccos \frac{y}{9} = \pi + 2\pi = 3\pi$,

тако ~~равно~~ 2π , а не меньшее 2π .

Другие же задачи

x и $2k+1-x$ - разные четности, а также

x и $3k+3x-2l-1$ тоже разные четности,

потому подходящий набор парных чисел разной четности, не является $(4; 9)$.

Таких ~~чисел~~ ^{чисел} ~~наборов~~ ^{наборов}, ~~чисел~~ ^{наборов} $= 4 \cdot 9 = 36$.

Когда x -четное, то не равно, $5 \cdot 10 - 1 = 3\cancel{9} 49$

одно ~~набор~~ ^{набор} $(4; 9)$
не подходит

Всего $36 + 49 = 85$

Ответ: 85.

L

L



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

- | | | | | | | |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

СТРАНИЦА
1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Ответ: 7

Начинаем сформулировать, что Петя и Вова
получают в конверте, если ограбят газету
напечатанную в n , а билетов b .

Всего вариантов раздачи билетов C_n^b ,
но неподходящих только C_{n-2}^{b-2} вариантов
когда Петя и Вова получат по билету.

$$\text{Вашей, вероятности } \frac{C_{n-2}^{b-2}}{C_n^b} = \frac{b(b-1)}{n(n-1)}.$$

Тогда вероятность b купанье получена

$$\frac{4 \cdot 3}{n(n-1)}, \text{ т.е. } b \text{ нечет} \frac{b(b-1)}{n(n-1)}.$$

$$\text{А также это знако, что } 3,5 \cdot \frac{4 \cdot 3}{n(n-1)} = \frac{6(b-1)}{n(n-1)}$$

$$\text{но этому } 42 = b(b-1), \text{ т.е. } b^2 - b - 42 = 0$$

$$\text{Значит, } (b-7)(b+6) = 0, \text{ т.е. } b=7 \text{ или } b=-6,$$

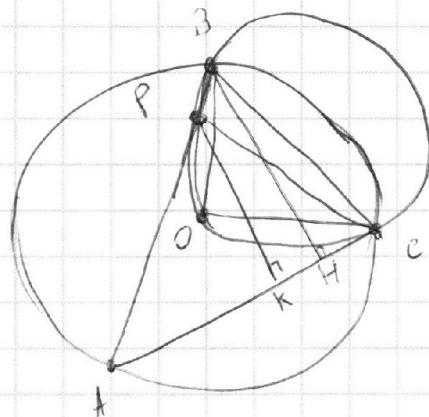
$$\text{но } b > 4, \text{ поэтому } b=7.$$

На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

- | | | | | | | |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

СТРАНИЦА
1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



$\angle BOC = 2 \angle BAC$
внешний внутренний

$\angle BPC = \angle BOC$, т.к. B, P, O, C
на ω_2 .

$$\Rightarrow \angle BPC = 2\angle BAC \Rightarrow \angle PCA =$$

$$= \angle BPC - \angle PHC = \angle BPC - \angle BAC = 2\angle BAC - \angle BAC = \angle BAC.$$

$\Rightarrow \triangle APK$ - равнобедренный

Пусть PK - высота $\triangle APK$, а BH - высота $\triangle ABC$

Тогда $\frac{BH}{PK} = \frac{AB}{AP}$, т.к. $PK \parallel BH$, т.е. $\triangle APK \sim \triangle ABH$.

$$PK = \sqrt{AP^2 - AK^2} = \sqrt{AP^2 - \frac{AC^2}{4}} = \frac{\sqrt{4AP^2 - AC^2}}{2} =$$

т.к. PK -высота в равнобедренном треугольнике, т.е. и медиана

$$= \sqrt{4 \cdot \frac{16^2}{25} - 16} = \frac{2}{2} \sqrt{\frac{16^2 - 100}{25}} =$$

$$= \frac{\sqrt{156}}{5} = \frac{\sqrt{4 \cdot 39}}{5} = \frac{2}{5} \sqrt{39}$$

$$BH = PK \cdot \frac{AB}{AP} = \frac{2}{5} \sqrt{39} \cdot \frac{\left(\frac{16}{5} + 2\right)}{\frac{16}{5}} = \frac{2}{5} \sqrt{39} \cdot \frac{26}{16} = \frac{13}{20} \sqrt{39}$$

$$S_{ABC} = \frac{1}{2} \cdot BH \cdot AC = 2 \cdot \frac{13}{20} \sqrt{39} = \frac{13}{10} \sqrt{39}$$

Ответ: $\frac{13}{10} \sqrt{39}$



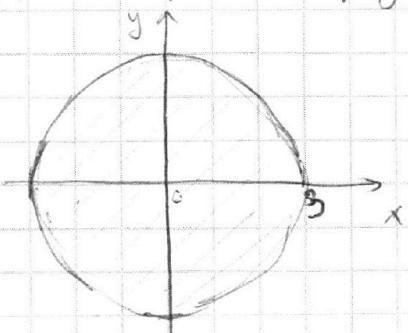
На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

- | | | | | | | |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

СТРАНИЦА
1 ИЗ 3

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$x^2 + y^2 \leq 9$ означает, что - это круг радиуса 3 в центре координатной плоскости.

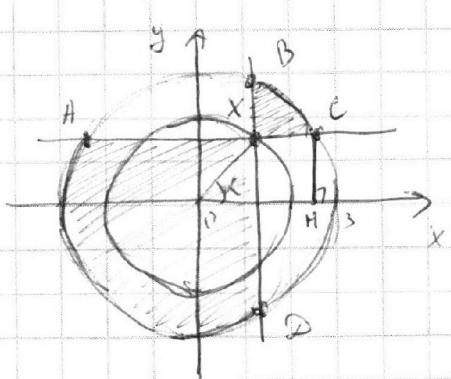


$(x - 2\cos\alpha)(y - 2\sin\alpha) \geq 0$ значит, что

$x \geq 2\cos\alpha$ и $y \geq 2\sin\alpha$ или $x \leq 2\cos\alpha$ и $y \leq 2\sin\alpha$.

$y = 2\sin\alpha$, $x = 2\cos\alpha$ - это прямые, $y = 2\sin\alpha$ и $y = 2\cos\alpha$

но этому $\Phi(\alpha)$ - это такая фигура



также $y = 2\sin\alpha$ и
 $y = 2\cos\alpha$ не пересекаются

в одной точке, которая

лежит в точке $(0,0)$; но суммарности радиусов $2\sqrt{2}$

Тогда M равно сумме углов и отрезков.

Сумма углов всегда оканчивается, т.к.

$y = 2\sin\alpha \parallel \text{оси } X$, $y = 2\cos\alpha \parallel \text{оси } Y$, при этом
наверх 3π.

На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.



- | | | | | | | |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|
| <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|

СТРАНИЦА
2 из 3

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Обозначим эти отрезки AC и BD ,
пересекающиеся в точке X .

Тогда $\angle ACD = \alpha$. Постройте четырехугольник
 $ACDB$ с верх 60° . Тогда $CH = 2\sin \alpha$ — это
расстояние между скользящими вершинами CH и CX .

Тогда $CH = 2\cos \alpha$, а также $CH^2 + \frac{AC^2}{4} = 9$,
т.е. $AC = 2\sqrt{9 - 4\cos^2 \alpha}$. Аналогично, $BD =$
 $= 2\sqrt{9 - 4\sin^2 \alpha}$.

Значит, α принимает максимальное
значение тогда, когда $\sqrt{9 - 4\cos^2 \alpha} + \sqrt{9 - 4\sin^2 \alpha}$
принимает минимальное значение.

Можно считать, что $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$ т.к. для
стационарных гипербол α аналогично.

$$\sqrt{9 - 4\cos^2 \alpha} + \sqrt{9 - 4\sin^2 \alpha} \leq 2 \sqrt{\frac{9 - 4\cos^2 \alpha + 9 - 4\sin^2 \alpha}{2}} =$$

$$= 2 \sqrt{\frac{18 - 4}{2}} = 2 \sqrt{9 - 2} = 2\sqrt{7} \text{ — наблюдено}$$

$$\text{т.ч. } 9 - 4\cos^2 \alpha = 9 - 4\sin^2 \alpha \Leftrightarrow \sin^2 \alpha = \cos^2 \alpha,$$

$$\text{т.е. } \alpha = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{2}k, \text{ где } k \in \mathbb{Z}$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

- | | | | | | | |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

СТРАНИЦА
3 из 3

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

№ 18) Равно

Теперь поступаем, какую равна функцию
вокруг единичной окр., т.е. можно выбрать
любое значение L и построить для него.

Значит, мы получаем наилучшее
значение, равное $3\pi + 4\sqrt{7}$, при
 $\alpha = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{2}L, \text{ где } L \in \mathbb{Z}$

Ответ: $3\pi + 4\sqrt{7}$ при всех $\alpha = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{2}L,$
где $L \in \mathbb{Z}$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.



- | | | | | | | |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| <input type="checkbox"/> |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|

СТРАНИЦА
ИЗ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по **каждой из задач** **нумеруются отдельно**. Порча QR-кода недопустима!

$$y = x - 3$$

$$M = x^3 - (x-3)^3 - 9(x-3)x = \cancel{x^3} - \cancel{x^3} + \underline{9x^2} - \underline{27x} + \underline{27} - \underline{-9x^2} + \underline{27x} = 27$$

$$y = x +$$

$$x, y > 0$$

$$y = -x - 1$$

$$y = -x - 1$$

$$\begin{cases} x > 0 \\ -x - 1 > 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x > 0 \\ 1 > x \end{cases} \Rightarrow 1 > x > 0$$

$$x \in (0; 1)$$

$$M = x^3 + (x+1)^3 + 9x(x+1) = x^3 + x^3 + 3x^2 + 3x + 1 + 9x^2 + 9x = 2x^3 + 12x^2 + 12x + 1$$

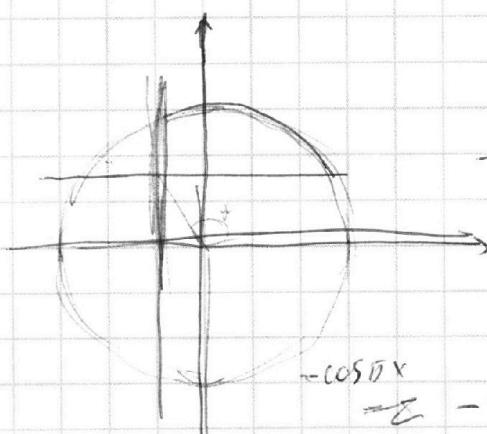
$$6x^2 + 24x + 12 = 6(x^2 + 4x + 2) = 6((x+2)^2 - 2) > 0$$

$$x > 0$$

$$1$$

$$2 + 12 + 12 + 1 = 27$$

$$\sin \pi x -$$



$$-\sin \pi \frac{x+y}{2} \sin \pi x = \cos \pi \frac{x+y}{2} \cos \pi x$$

$$-\sin \pi x (\sin \frac{\pi x}{2} \cos \frac{\pi y}{2} + \sin \frac{\pi y}{2} \cos \frac{\pi x}{2}) =$$

$$= \cos \pi x (\cos \frac{\pi x}{2} \cos \frac{\pi y}{2} - \sin \frac{\pi x}{2} \sin \frac{\pi y}{2})$$

$$-\sin \pi(x+y) \sin \pi x = (2 \cos \frac{\pi x+y}{2} - 1) \cos \pi x$$

$$\cos \pi(x+y)$$

$$-\cos \pi x - \sin \pi(x+y) \sin \pi x = \cos \pi(x+y) \cos \pi x$$

$$-\cos \pi x - \sin \pi x (\sin \pi x \cos \pi y + \sin \pi y \cos \pi x) = (\cos \pi x \cos \pi y - \sin \pi x \cdot \sin \pi y) \cos \pi x$$

$$-\cos^2 \pi x + \sin^2 \pi x \cos \pi y + (\cos \pi x \cos \pi y - \sin \pi x \sin \pi y) \cos \pi x = 0$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

1

2

3

4

5

6

7

СТРАНИЦА
_ ИЗ _

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\cos \pi x + (\cos^2 \pi x + \sin^2 \pi x) \cos \pi y = 0$$

$$\cos \pi x + \cos \pi y = 0$$

$$2 \cos \pi \frac{x+y}{2} \cos \pi \frac{x-y}{2} = 0$$

$$\cos \pi \frac{x+y}{2} = 0$$

$$\pi \frac{x+y}{2} (x+y) = \frac{\pi}{2} + \pi k$$

$$\begin{cases} x+y = 1+2k \\ x-y = 1+2l \end{cases}$$

$\arccos \frac{x+y}{2} + \arccos \frac{y-x}{2} = \pi$

$x=0$
 $y=0$

$-1 \leq \frac{x+y}{2} \leq 1$
 $-4 \leq x \leq 4$
 $-9 \leq y \leq 9$

$$\sin x + \sin(-y) = 2 \sin \frac{x-y}{2} \cos \frac{x+y}{2}$$

$$\cos x + \cos y = \cos \left(\frac{x+y}{2} + \frac{x-y}{2} \right) + \cos \left(\frac{x+y}{2} - \frac{x-y}{2} \right) =$$

$$= \cos \frac{x+y}{2} \cos \frac{x-y}{2} - \sin \frac{x+y}{2} \sin \frac{x-y}{2} + \cos \frac{x+y}{2} \cos \frac{x-y}{2} + \sin \frac{x+y}{2} \sin \frac{x-y}{2}$$

$$(n-2)^2 - n+2)(b^2 - b) =$$

$$3x-2b-1 \quad n \quad = 42 \cdot ((n-b+2)^2 - n+b-2)$$

$$\frac{4}{n-2}$$

$$n-b+2 =$$

$$(n-2)^2 b^2 - (n-2)b^2 - b(n-2)^2 -$$

$$- b(n-2)(b+n-2) + b(n-2) =$$

$$= 42(n-b+2)^2 + 42(-) - 42(n-b+2)$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.



- | | | | | | | |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| <input type="checkbox"/> |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|

СТРАНИЦА
ИЗ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по **каждой из задач** нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$7(6+1)(6+2) = r$$

$$(7r - 60)n^2 + (26+1) \cdot 60 +$$

$$(7r - 60)n^2 + ((26+1) \cdot 60 - 35r)n + 842r - 606(6+1) = 0$$

$$(26+1)60 - 35r)^2 - 4 \cdot (7r - 60)(42r - 606(6+1)) =$$

$$7(n-2)(n-3)(6+1)(6+2) = 60 \cdot (n-6)(n-6-1)$$

$b > 4$

$$3,5 \cdot \frac{4 \cdot 3}{(n-3)(n-2)} = \frac{6(6-1)}{(n-6+1)(n-6+2)}$$

$$7 \cdot 4 \cdot 3 \cdot (n-6+1)(n-6+2) = 26(6-1)(n-2)(n-3)$$

$$\begin{matrix} 1. n-6+1 : 2 \\ n-6 \neq 2 \end{matrix} \quad \begin{matrix} 6 & n-3 \\ & \end{matrix} \quad \begin{matrix} 6-1 & n-2 \\ & \end{matrix}$$

$$42(n-6+1)(n-6+2) = 6(6-1)(6^2-6)(n^2-5n+6)$$

$$42(n^2 - 2n6 + 6 + 6^2 - 36 + 2n + 2) = (6^2 - 6)(n^2 - 5n + 6)$$

$$(42 - n^2 + 5n - 6)6^2 + (-84n - 126 + n^2 - 5n + 6)6 + 42n^2 + 42n + 84n + 42 = 0$$

$(x-y+3)$

$$(x-y)^3 = x^3 - 3x^2y + 3xy^2 - y^3$$

$$-3xy \quad x^3 - y^3 - (x-y)^3 + 3x^2y - 3xy^2 - 9xy = (x-y)^3 + 3xy(x-y)$$

$$y = -2 + x - 1 = x - 3$$

$$y = -2 - x + 1 = -x - 1$$

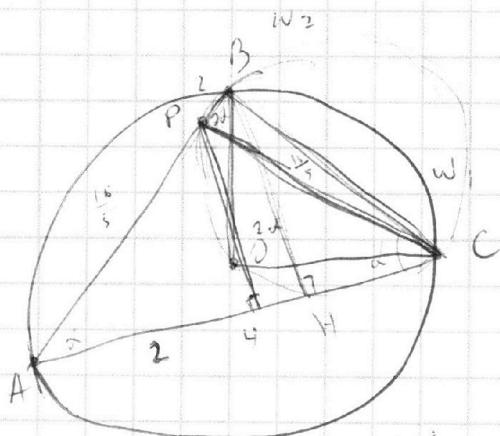


На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

 1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
_ из _

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



$$\frac{16^2}{25} - \frac{100}{25} = \frac{156}{25}$$

$$= \frac{1256}{25} - 100 = \frac{156}{25}$$

$$= \sqrt{156}$$

6220

156

 $\sqrt{\frac{156}{25}}$

$$\frac{16}{5} : \frac{26}{5} = \frac{\sqrt{156}}{4} : BH \quad \frac{16}{5} + \frac{10}{5} = \frac{26}{5}$$

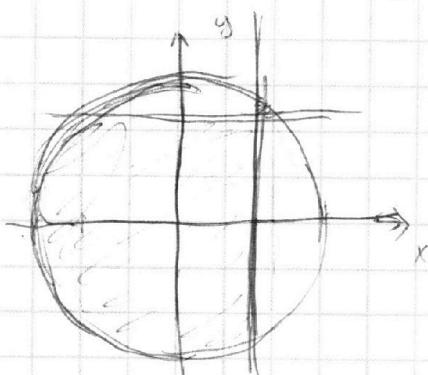
$$\frac{16}{26} = \frac{\sqrt{156}}{4BH}$$

$$156 = 6 \cdot 26 = 4 \cdot 39$$

$$BH = \frac{26 \cdot \sqrt{156}}{16 \cdot 4} = \frac{26 \cdot \sqrt{6} \cdot \sqrt{26}}{16 \cdot 4} = \frac{13 \cdot 2 \cdot \sqrt{39}}{16 \cdot 2} = \frac{13\sqrt{39}}{16}$$

 $13\sqrt{39}$

8



$$\begin{cases} x = 2\cos\alpha \\ y = 2\sin\alpha \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = 2\cos\alpha \\ y = 2\sin\alpha \end{cases}$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.



- | | | | | | | |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| <input type="checkbox"/> |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|

СТРАНИЦА
ИЗ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по **каждой из задач** нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$A = a \cdot 1111 = a \cdot 11 \cdot 101$$

некоторые цифры

$$\begin{array}{r} 101 \\ \times 11 \\ \hline 11 \end{array}$$

$$C \leq 101 \Rightarrow C / 101, \text{ но } A / 101 \Rightarrow A / 101^2$$

$$A / 101^2$$

$$B / 101$$

$$B = k \cdot 101 \Rightarrow B = \overline{k0k} \Rightarrow B = 101$$

$$\Rightarrow B / 11, A / 101 \Rightarrow C / 11 \Rightarrow C = l \cdot 11 \Rightarrow C = \overline{ll}$$

$$\Rightarrow C = 55$$

$$A = a \cdot 11 \cdot 101$$

$$A \cdot B \cdot C = a \cdot 11 \cdot 101 \cdot 101 \cdot 55 = 5a \cdot 11^2 \cdot 101^2$$

$$5a = d^2 \Rightarrow a / d, \text{ но } a \neq 0 \Rightarrow a = 5$$

$$(5555; 101; 55)$$

$$K = \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{xy}$$

$$M = x^3 - y^3 - 3xy \quad ?$$

$$K = \frac{1}{x-3} + \frac{1}{y+3} + \frac{1}{(x-3)(y+3)}$$

$$1 + \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{xy} = \left(1 + \frac{1}{x}\right)\left(1 + \frac{1}{y}\right)$$

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{xy} =$$

$$\left(1 + \frac{1}{x}\right)\left(1 + \frac{1}{y}\right) = \left(1 + \frac{1}{x-3}\right)\left(1 + \frac{1}{y+3}\right)$$

$$x^3 - y^3 - 3xy$$

$$\frac{(x+1)(y+1)}{xy} = \frac{(x-2)(y+4)}{(x-3)(y+3)} = \frac{xy - 2y + 4x - 8}{xy - 3y + 3x - 9}$$

$$\frac{3}{x(x-3)} = \frac{3}{y(y+3)} + \frac{1}{(x-3)(y+3)} - \frac{1}{xy} = \frac{3}{x(x-3)} - \frac{3}{y(y+3)} + \frac{xy - 3y + 3x - 9}{(x-3)(y+3)xy}$$

$$\frac{1}{xy} = xy + 3x - 9$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

- | | | | | | | |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| <input type="checkbox"/> |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|

СТРАНИЦА
_ ИЗ _

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач **нумеруются отдельно**. Порча QR-кода недопустима!

$$\frac{3}{x(x-3)} - \frac{3}{y(y+3)} - \frac{3x-3y-9}{xy(x-3)(y+3)} = 0$$

$$3y(y+3) - 3x(x-3) - 3x + 3y + 9 = 0$$

$$3y^2 + 9y - 3x^2 + 9x - 3x + 3y + 9 = 0$$

$$3y^2 + 12y - 3x^2 + 6x + 9 = 0$$

$$y^2 + 4y - x^2 + 2x + 3 = 0$$

$$2 = 16 + 4x^2 - 8x - 12 = 4x^2 - 8x + 4 =$$

$$= 4(x^2 - 2x + 1) = 4(x-1)^2$$

$$(\sin \pi x - \sin \pi y) \sin \pi y = (\cos \pi x + \cos \pi y) \cos \pi x$$

!!

$$y = \frac{-4 \pm 2(x-1)}{2}$$

$$(\sin \pi x + \sin \pi y)$$

$$-2 \sin \pi \frac{x+y}{2} \cos \pi \frac{x-y}{2} \sin \pi x = 2 \cos \pi \frac{x+y}{2} \cos \pi \frac{x-y}{2} \cos \pi x \\ = -2 \pm (x-1)$$

$$-\sin \pi \frac{x+y}{2} \sin \pi x = \cos \pi \frac{x+y}{2} \cos \pi x$$

$n^{4 \downarrow} b$

$$3,5 \cdot \frac{\binom{n}{2}}{\binom{n}{4}} = \frac{\binom{n-2}{b}}{\binom{n}{b}}$$

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!},$$

$$\binom{n}{k-2} = \frac{n!}{(k-2)!(n-k+2)!}$$

$$3,5 \cdot \frac{(n-2)(n-3)}{5 \cdot 6} = \frac{(n-6)(n-5-1)}{(6+1)(6+2)} \cdot \frac{\frac{n!}{(k-2)!(n-k+2)!}}{\frac{n!}{k!(n-k)!}} = \frac{(n-6)(n-5-1)}{(6+1)(6+2)} = \frac{\binom{n}{k-2}}{\binom{n}{k}}$$

$$= \frac{(k+1)(k+2)}{(k+1)(k+2)} =$$

$$= \frac{(k+1)(k+2)}{(k+1)(k+2)} =$$

$$= \frac{(k+1)(k+2)}{(k+1)(k+2)} =$$

$$7(n-2)(n-3)(b+1)(b+2) = 60 \cdot (n-6)(n-5-1)$$

$$7(b+1)(b+2)(n^2 - 5n + 6) = 60 \cdot (n^2 - (2b+1)n + b(b+1))$$

$$(7(b+1)(b+2) - 60)n^2 + ((2b+1)60 - 7(b+1)(b+2) \cdot 5)n +$$

$$+ 42(b+1)(b+2) - 60b(b+1) = 0$$

На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.



- | | | | | | | |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| <input type="checkbox"/> |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|

СТРАНИЦА
ИЗ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\frac{4}{n} \cdot \frac{\binom{n}{4}}{\binom{n}{3}} = \frac{\frac{n!}{3!(n-3)!}}{\frac{n!}{4!(n-4)!}} = \frac{4}{n-3}$$

$$\frac{\binom{n}{6-1}}{\binom{n}{4}} = \frac{\frac{(n-1)!}{(6-1)!(n-6)!}}{\frac{3!(n-3)!}{3!(n-4)!}} = \frac{3}{n-3} \quad 3,5 \cdot \frac{4 \cdot 3}{(n-3)^2} = \frac{6(6-1)}{(n-6+1)^2}$$

$$42(n-6+1)^2 = 6(6-1)(n-3)^2$$

6 n

2 00

6.2
n-2

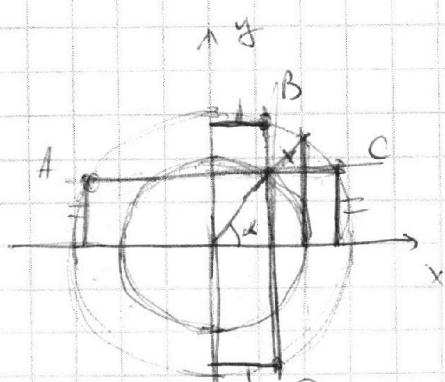
$$\frac{\binom{n-2}{6-2}}{\binom{n}{6}} = \frac{\frac{(n-2)!}{(6-2)!(n-6)!}}{\frac{6!}{n!}} = \frac{6(6-1)}{n(n-1)}$$

$$3,5 \cdot \frac{12}{n(n-1)} = \frac{6(6-1)}{n(n-1)}$$

$$42 = 6(6-1) \Rightarrow 6^2 - 6 - 42 = 0$$

$$D = 1 + 4 \cdot 42 = 1 + 168 = 169$$

$$b = \frac{1 \pm \sqrt{13}}{2} \quad b = -6 \quad b = 7$$



$$BX \cdot XD = AX \cdot XC$$

$$2 \cos \alpha$$

$$\sqrt{1 - 4 \cos^2 \alpha}$$

$$BD + HC$$

$$\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$$

$$3\sin^2 \alpha + 3$$

$$2\sin^2 \alpha + 2\cos^2 \alpha = 2$$

$$2(\sqrt{3 - 4 \cos^2 \alpha} + \sqrt{3 - 4 \sin^2 \alpha})$$

$$\sqrt{9 - 4 \cos^2 \alpha}$$

I-

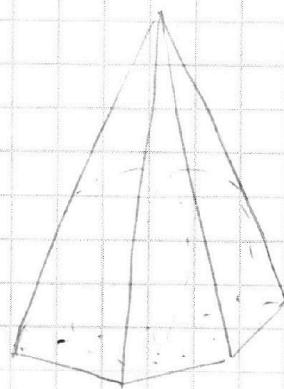


На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

- | | | | | | | |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| <input type="checkbox"/> |

СТРАНИЦА
ИЗ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

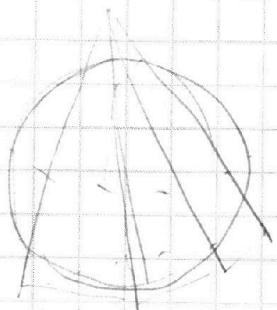


$$\alpha = 0$$

$$\alpha = \frac{\pi}{2}$$

$$3 + \sqrt{9 - 4r^2} = 3 + \sqrt{5}$$

$$3 + \sqrt{5}$$



$$\sqrt{9 - 4\cos^2 x} + \sqrt{9 - 4\sin^2 x} \leq$$

$$2\sqrt{9} = 4\sqrt{5}$$

$$2\sqrt{9} \leq \sqrt{(2\sqrt{9 - 4\cos^2 x})^2 + (2\sqrt{9 - 4\sin^2 x})^2}$$

$$9 - 4\cos^2 x = 5 + 4\sin^2 x$$

$$\sqrt{5 + 4\sin^2 x} + \sqrt{9 - 4\sin^2 x}$$

