МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

# 11 КЛАСС. Вариант 4

1. [3 балла] Найдите все тройки натуральных чисел $(A; B; C)$ такие, что:
   - $A$ — четырёхзначное число, составленное из одинаковых цифр,
   - $B$ — трёхзначное число, хотя бы одна из цифр которого равна 7,
   - $C$ — двузначное число, хотя бы одна из цифр которого равна 1,
   - произведение $A \cdot B \cdot C$ является квадратом некоторого натурального числа.
2. [3 балла] Положительные числа $x$ и $y$ таковы, что значение выражения $K = \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{3}{xy}$ не изменяется, если $x$ уменьшить на 4, а $y$ — увеличить на 4. Найдите все возможные значения выражения $M = x^3 - y^3 - 12xy$.
3. [5 баллов] а) Найдите все пары действительных чисел $(x; y)$ такие, что $(\sin \pi y - \sin \pi x) \sin \pi y =$ $= (\cos \pi y + \cos \pi x) \cos \pi y$.

   б) Сколько пар целых чисел $(x, y)$ удовлетворяют одновременно этому уравнению и неравенству
$$\arccos \frac{x}{7} - \arcsin \frac{y}{4} > -\frac{\pi}{2}?$$
4. [4 балла] В начале месяца было выделено 4 билета на праздничный концерт, которые планировалось случайным образом распределить между одиннадцатиклассниками. В конце месяца выяснилось, что будет выделено больше 4 билетов. Одиннадцатиклассники Петя и Вася вычислили, что вероятность им обоим вместе попасть на концерт в начале месяца была в 11 раз меньше, чем оказалась в конце месяца. Сколько всего было выделено билетов на концерт в конце месяца, если количество одиннадцатиклассников не изменилось?
5. [5 баллов] Точка $O$ — центр окружности $\omega_1$, описанной около остроугольного треугольника $ABC$. Окружность $\omega_2$, описанная около треугольника $BOC$, пересекает отрезок $AB$ в точке $P$. Найдите площадь треугольника $ABC$, если $AP = 16$, $BP = 8$, $AC = 22$.
6. [6 баллов] На координатной плоскости изображена фигура $\Phi(\alpha)$, состоящая из всех точек, координаты $(x; y)$ которых удовлетворяют системе неравенств
$$\begin{cases} (x + 4\sin\alpha)(y - 4\cos\alpha) \leqslant 0, \\ x^2 + y^2 \leqslant 36. \end{cases}$$

   Найдите максимальное значение $M$ периметра (длины границы) фигуры $\Phi(\alpha)$ и укажите все значения $\alpha$, при которых оно достигается.
7. [6 баллов] Шар $\Omega$ касается всех рёбер правильной усечённой пирамиды, а шар $\omega$ касается всех её граней. Найдите угол наклона боковой грани пирамиды к плоскости её основания.

~~если A • B • C является ква~~

Задача 1.

если $A \cdot B \cdot C$ является квадратом натурального числа, то при разложении числа $A \cdot B \cdot C$ на простые множители каждый простой множитель должен входить в чётной степени, т.к. если некое число $N = p_1^{\alpha_1} \cdot p_2^{\alpha_2} \cdot p_3^{\alpha_3} \cdot \ldots \cdot p_x^{\alpha_x}$ (разложение на простые множители числа $N$) такое что $N^2 = A \cdot B \cdot C$

то $A \cdot B \cdot C = p_1^{2\alpha_1} \cdot p_2^{2\alpha_2} \cdot p_3^{2\alpha_3} \cdot \ldots \cdot p_x^{2\alpha_x}$.

Так как число $A = 1111 \cdot K_A$, где $K_A$ — какая-то из цифр от 1 до 9 включительно

$\Rightarrow A = 11 \cdot 101 \cdot K_A$

Отсюда видно, что в разложении числа $A$ на простые множители обязательно входит простой множитель 101 в степени 1 (т.к. $11 < 101$, $K_A \neq 101$, $11 \cdot K_A < 101$)

$\Rightarrow$ для того чтобы при разложении $A \cdot B \cdot C$ на простые множители множитель 101 входил в чётной степени, необходимо чтобы число $B$ при разложении на простые множители содержало множитель 101 в 1 степени (в степени, большей 1, число 101 входить не может).

(Число $C$ при разложении на простые множители никак не может содержать множитель 101, т.к. $C < 101$) поэтому надо чтобы именно $B$ содержало простой множитель 101

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

1 ☒ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА 2 ИЗ 3

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. **Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно.** Порча QR-кода недопустима!

Т.к. B должно содержать простой множитель 101, при этом из условия хотя бы одна из цифр числа B равна 7, B – трёхзначное

$\Rightarrow$ B обязано равняться 707 (ничему другому оно равняться не может)

$$\Rightarrow A \cdot B \cdot C = \underbrace{11 \cdot 101 \cdot k_A}_{\text{число } A} \cdot \underbrace{101 \cdot 7}_{\text{число } B} \cdot C =$$

$$= 11 \cdot 7 \cdot 101^2 \cdot k_A \cdot C$$

мы видим, что в разложении на простые множители числа $A \cdot B \cdot C$ входят множители 11, 7 $\Rightarrow$ аналогично 11 и 7 (каждое из них) должно входить в чётной степени).

Это выполняется если $k_A = 1$, при этом $C = 11 \cdot 7 = 77$ (данный вариант не годится, т.к. по условию число C должно содержать цифру 1)

~~если~~ Также выполняется при $k_A = 4$, тогда $C = 11 \cdot 7 = 77$ (снова не подходит)

если $k_A = 7$, то $C \vdots 11$ ~~из всех~~ нам подходит только $C = 11$ из условия, что C должно содержать цифру 1.

(Таким образом мы нашли тройку чисел $(A; B; C)$

$(7777; 707; 11)$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

1 ☒ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА 3 из 3

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. **Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно.** Порча QR-кода недопустима!

если $k_A = 9$, тогда $C = 11 \cdot 7 = 77$, что снова не подходит

если $k_A = 2; 3; 5; 6; 8$, то число $k_A$ не содержит множители 11 и 7, тогда эти множители должно будет содержать число $C$ (т. е. $C$ должно делиться на 77).

А $C = 77$ нам снова не подходит по условию.

Таким образом, нам подходит только одна тройка: (7777; 707; 11)

Ответ: (7777; 707; 11).

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

1 ☐ 2 ☒ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА 1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. **Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно.** Порча QR-кода недопустима!

Задача 2.

$$K=\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{3}{xy}=\frac{y}{xy}+\frac{x}{xy}+\frac{3}{xy}=\frac{x+y+3}{xy}$$

ОДЗ: $x\neq0,\ y\neq0$.

Т.к. если $x$ уменьшить на 4, $y$ ~~ув~~ увеличить на 4, то значение не поменяется

$$\Rightarrow \frac{x+y+3}{xy}=\frac{x-4+y+4+3}{(x-4)(y+4)}$$

$$\frac{x+y+3}{xy}=\frac{x+y+3}{(x-4)(y+4)}$$

1) $\begin{cases} x+y+3=0 \\ xy\neq0 \\ (x-4)(y+4)\neq0 \end{cases}$ Такой случай не подходит, т.к. если $x+y+3=0$, то $x+y=-3$ что невозможно, т.к. по условию ~~ч~~ числа $x$ и $y$ положительные

$\Rightarrow x+y+3\neq0$

2) $\begin{cases} xy=(x-4)(y+4) \\ xy\neq0 \end{cases}$

$xy\neq0$ ни при каких положительных $x$ и $y$.

$\Rightarrow xy=(x-4)(y+4)$

$\cancel{xy}=\cancel{xy}+4x-4y-16$

$4x=4y+16 \Rightarrow x=y+4$

Тогда $M=x^3-y^3-12xy=(y+4)^3-y^3-12(y+4)\cdot y=$

$=y^3+3\cdot y^2\cdot4+3\cdot y\cdot 4^2+4^3-y^3-12y^2-48y=y^3+12y^2+48y+64-y^3-12y^2-48y=64$

Ответ: 64.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☒ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. **Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно.** Порча QR-кода недопустима!

Задача 3.

а) $(\sin\pi y - \sin\pi x)\cdot\sin\pi y = (\cos\pi y + \cos\pi x)\cos\pi y$

$\sin\pi y\cdot\sin\pi y - \sin\pi x\cdot\sin\pi y = \cos\pi y\cdot\cos\pi y + \cos\pi x\cdot\cos\pi y$

$-\cos\pi x\cdot\cos\pi y - \sin\pi x\cdot\sin\pi y = \cos\pi y\cdot\cos\pi y - \sin\pi y\cdot\sin\pi y$

$-\cos(\pi x - \pi y) = \cos(\pi y + \pi y)$

$\cos(2\pi y) + \cos(\pi x - \pi y) = 0$

По формуле $\cos x + \cos y = 2\cos\left(\frac{y+x}{2}\right)\cos\left(\frac{y-x}{2}\right)$

$2\cdot\cos\left(\frac{\pi x - \pi y + 2\pi y}{2}\right)\cancel{\cos}\cdot\cos\left(\frac{\pi x - \pi y - 2\pi y}{2}\right) = 0$

$2\cos\left(\frac{\pi x + \pi y}{2}\right)\cos\left(\frac{\pi x - 3\pi y}{2}\right) = 0$

$\cos\left(\frac{\pi x + \pi y}{2}\right) = 0$ $\qquad$ $\cos\left(\frac{\pi x - 3\pi y}{2}\right) = 0$

$\frac{\pi x + \pi y}{2} = \frac{\pi}{2} + \pi n, n\in Z$ $\qquad$ $\frac{\pi x - 3\pi y}{2} = \frac{\pi}{2} + \pi k, k\in Z$

$\frac{x+y}{2} = \frac{1}{2} + n, n\in Z$ $\qquad$ $\frac{x-3y}{2} = \frac{1}{2} + k, k\in Z$

$x+y = 1+2n, n\in Z$ $\qquad$ $x-3y = 1+2k, k\in Z$

$\Rightarrow$ для любой пары $(x, y)$, для которой либо ~~1+2~~ $x+y$, либо $x-3y$ является целым нечётным числом ~~(возможна~~ (отрицательные числа $-1, -3, \ldots$ подходят) б) заметим, что $\arccos\frac{x}{7}$ определён при $-7 \le x \le 7$

и $\arccos\frac{x}{7} \geq 0$ для любого допустимого $x$.

в свою очередь, $\arcsin(\frac{y}{4})$ определён при $-4 \le y \le 4$

и $-\frac{\pi}{2} \le \arcsin\left(\frac{y}{4}\right) \le \frac{\pi}{2}$

$\Rightarrow \arccos\left(\frac{x}{7}\right) - \arcsin\left(\frac{y}{4}\right) \geq -\frac{\pi}{2}$ при любых допустимых значениях $x$ и $y$.

Причём равенство достигается только когда $\arccos\frac{x}{7} = 0$ и $\arcsin\left(\frac{y}{4}\right) = \frac{\pi}{2}$ одновременно

$\Rightarrow \begin{cases} \frac{x}{7} = 1 \\ \frac{y}{4} = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 7 \\ y = 4 \end{cases}$

Пара $(7; 4)$ является решением исходного уравнения. Тогда для того чтобы получить итоговый ответ, необходимо посчитать число всех пар-решений $(x; y)$, $-7 \le x \le 7$, $-4 \le y \le 4$, вычесть из этого количества единицу.

Для удобства создадим таблицу возможных целых значений $x$ и $y$, будем отмечать, подходит ли эта пара ~~в ответ или нет~~ или нет (V-подходит, X-не подходит)

| y \ x | −7 | −6 | −5 | −4 | −3 | −2 | −1 | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| −4 | V | X | V | X | V | X | V | X | V | X | V | X | V | X | V |
| −3 | X | V | X | V | X | V | X | V | X | V | X | V | X | V | X |
| −2 | V | X | V | X | V | X | V | X | V | X | V | X | V | X | V |
| −1 | X | V | X | V | X | V | X | V | X | V | X | V | X | V | X |
| 0 | V | X | V | X | V | X | V | X | V | X | V | X | V | X | V |
| 1 | X | V | X | V | X | V | X | V | X | V | X | V | X | V | X |
| 2 | V | X | V | X | V | X | V | X | V | X | V | X | V | X | V |
| 3 | X | V | X | V | X | V | X | V | X | V | X | V | X | V | X |
| 4 | V | X | V | X | V | X | V | X | V | X | V | X | V | X | X |

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно.**

1 ☐ 2 ☐ 3 ☒ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА 3 ИЗ 3

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. **Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно.** Порча QR-кода недопустима!

В серию корней ~~в~~ $x+y=1+2n, n\in Z$ подходят те пары $(x;y)$, в которых $x$ – чётное число, $y$ – нечётное, или $x$ – нечётное, $y$ – чётное.

Аналогично в серию корней $x-3y=1+2k, k\in Z$ входят пары, где $x$ и $y$ ~~разн~~ имеют разную чётность.

Легко видеть, что в ответ подходит ~~73~~ 74 пары значений.

Ответ: а) все пары $(x;y)$, для которых $\left[\begin{array}{l} x+y=1+2n, n\in Z \\ x-3y=1+2k, k\in Z \end{array}\right.$

б) 74.

Задача 4.

Найдём вероятность того, что Петя попал на концерт в начале месяца.

Кол-во различных способов раздать билеты одиннадцатиклассникам, если их всего X штук равно $\frac{X(X-1)(X-2)(X-3)}{4\cdot 3\cdot 2\cdot 1}$, т.к. нам не важен порядок ~~дач~~ билетов.

Кол-во различных способов раздать билеты одиннадцатиклассникам, которых всего X человек так, чтобы один из билетов достался Пете, один - Васе, равно: $1\cdot 1\cdot \frac{\cancel{(X-1)}(X-2)\cancel{(X-3)}(X-3)}{\cancel{3\cdot}2\cdot 1}$, так как нам не важен порядок билетов.

=> вероятность события A (Петя с Васей попали на концерт в начале месяца) равна

$$P(A)=\frac{1\cdot 1\cdot \frac{\cancel{(X-1)}(X-2)\cancel{(X-3)}(X-3)}{\cancel{3\cdot}2\cdot 1}}{\frac{X(X-1)\cdot(X-2)(X-3)}{4\cdot 3\cdot 2\cdot 1}}=\frac{4\cdot 3}{X(X-1)}=\frac{12}{X(X-1)}$$

~~Вероятность того, что Вася попал на концерт в начале месяца такая же, как и вероятность того, что Петя попал на концерт,~~

Пусть в конце месяца было выделено m билетов (m>4).

Найдём в этом случае вероятность того, что и Петя и Вася попадут на концерт.

Кол-во различных способов раздать билеты одиннадцатиклассникам, если их всего X, равно

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно.**

| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| ☐ | ☐ | ☐ | ☒ | ☐ | ☐ | ☐ |

СТРАНИЦА 2 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. **Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно.** Порча QR-кода недопустима!

$$C_x^m = \frac{x(x-1)(x-2)(x-3)\ldots(x-m+1)}{m\cdot(m-1)\cdot(m-2)\ldots\cdot 1}$$

Кол-во различных способов раздать билеты одиннадцатиклассникам, которых всего $x$ человек, чтобы один из билетов достался Пете, один - Васе, равно:

$$1\cdot 1\cdot \frac{(x-2)(x-3)\ldots(x-m+1)}{(m-2)\cdot(m-3)\ldots\cdot 1}$$

$\Rightarrow$ вероятность события $B$ (Петя с Васей попали на концерт в конце месяца)

равна $$P(B) = \frac{1\cdot 1\cdot \frac{(x-2)(x-3)\ldots(x-m+1)}{(m-2)(m-1)\ldots\cdot 1}}{\frac{x(x-1)(x-2)\ldots(x-m+1)}{m(m-1)(m-2)\ldots\cdot 1}} =$$

$$= \frac{m\cdot(m-1)}{x(x-1)}$$

По условию $11\cdot P(A) = P(B)$

$$\frac{11\cdot 12}{x(x-1)} = \frac{m(m-1)}{x(x-1)}$$

т.к. $x\neq 0, x\neq 1$

$$11\cdot 12 = m(m-1)$$

$$132 = m^2-m \Rightarrow m^2-m-132=0$$

$$D=(-1)^2-4\cdot 1\cdot(-132) = 1+528=529=23^2$$

$$m_{1,2} = \frac{-(-1)\pm\sqrt{23^2}}{2\cdot 1} = \frac{1\pm 23}{2} = -11;\ 12.$$

Нам подходит только $m=12$ (отрицательным $m$ быть не может)

Ответ: 12.

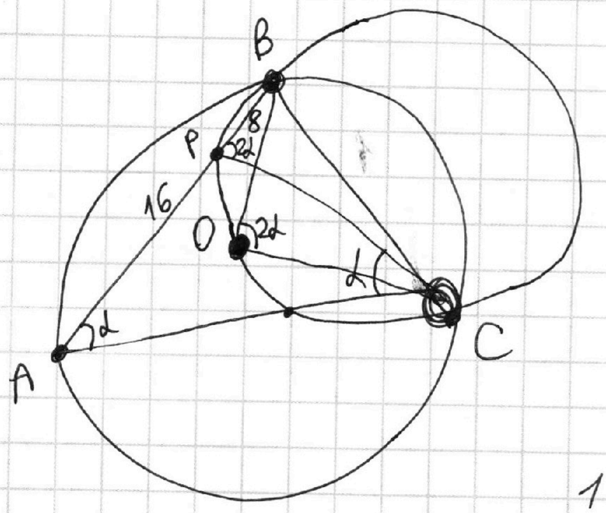
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☒ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА 1 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. **Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно.** Порча QR-кода недопустима!

Задача 5.




Обозначим $\angle BAC = \alpha$.

Тогда $\angle BOC = 2 \cdot \angle BAC = 2\alpha$ (т.к. центральный угол для окружности $\omega_1$ в 2 раза больше вписанного)

$\angle BPC = \angle BOC = 2\alpha$ (т.к. опираются на 1 дугу окружности $\omega_2$)

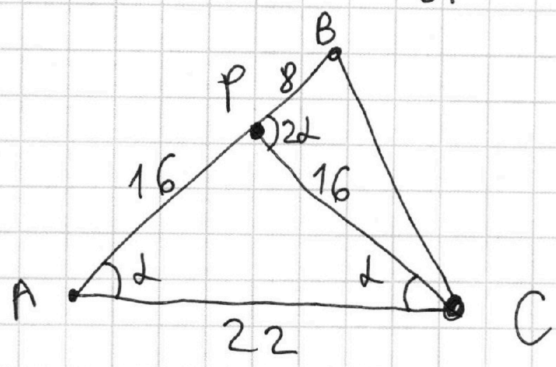
Т.к. внешний угол равен сумме двух внутренних несмежных с ним

$\Rightarrow \angle BPC = \angle PAC + \angle PCA$

$2\alpha = \alpha + \angle PCA \Rightarrow \angle PCA = 2\alpha - \alpha = \alpha.$

Т.к. $\angle PAC = \angle PCA = \alpha \Rightarrow \triangle PCA$ является равнобедренным с основанием AC.

$\Rightarrow PA = PC = 16.$




По теореме косинусов в $\triangle APC$:

$AC^2 = AP^2 + PC^2 - 2 \cdot AP \cdot PC \cdot \cos\angle APC$

$22^2 = 16^2 + 16^2 - 2 \cdot 16 \cdot 16 \cdot \cos\angle APC$

$484 = 256 + 256 - 512 \cos\angle APC$

$484 = 512 - 512 \cos\angle APC$

$484 + 512 \cos\angle APC = 512$

$512 \cos\angle APC = 512 - 484$

$512 \cos\angle APC = 28 \Rightarrow \cos\angle APC = \frac{28}{512} =$

$= \frac{7}{128} \Rightarrow \cos(180^\circ - \angle APC) = \cos(\angle BPC) = -\cos\angle APC = -\frac{7}{128}.$

По теореме косинусов в $\triangle BPC$:

$BC^2 = PB^2 + PC^2 - 2\cdot BP\cdot PC\cdot \cos\angle BPC =$

$= 8^2 + 16^2 - 2\cdot 8\cdot 16\cdot\left(-\frac{7}{128}\right) = 64 + 256 + 14 = 334$

$BC = \sqrt{334}$

По теореме косинусов в $\triangle ABC$:

$BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2\cdot AB\cdot AC\cdot \cos\alpha$

$(\sqrt{334})^2 = 24^2 + 22^2 - 2\cdot 24\cdot 22\cdot\cos\alpha$

$334 = 576 + 484 - 1056\cos\alpha$

$334 = 1060 - 1056\cos\alpha$

$1056\cos\alpha = 1060 - 334$

$1056\cos\alpha = 726 \Rightarrow \cos\alpha = \frac{726}{1056} = \frac{363}{528} = \frac{121}{176} = \frac{11}{16}$

Тогда $\sin\alpha = \sqrt{1-\cos^2\alpha} = \sqrt{1-\left(\frac{11}{16}\right)^2} = \sqrt{\frac{16^2-11^2}{16^2}} =$

$= \frac{\sqrt{(16+11)(16-11)}}{16} = \frac{\sqrt{27\cdot 5}}{16} = \frac{3\sqrt{15}}{16}.$

$S_{ABC} = \frac{1}{2}\cdot AB\cdot AC\cdot\sin\alpha = \frac{1}{2}\cdot 24\cdot 22\cdot\frac{3\sqrt{15}}{16} =$

$= \frac{24\cdot 22\cdot 3\sqrt{15}}{2\cdot 16} = \frac{\overset{3}{\cancel{24}}\cdot\overset{11}{\cancel{22}}\cdot 3\sqrt{15}}{\cancel{2}\cdot\cancel{16}_{2}} = \frac{3\cdot 11\cdot 3\sqrt{15}}{2} = \frac{99\sqrt{15}}{2}$

Ответ: $\frac{99\sqrt{15}}{2}$.

=> длина дуги $AB$ + длина дуги $EC$ равна половине периметра всей окружности радиуса 6.

$$P_{\text{всей окружности}} = 2\pi \cdot 6 = 12\pi$$

$$\Rightarrow P_{AB} + P_{EC} = 6\pi.$$

$$\Rightarrow P_{\text{всей фигуры}} = P_{AB} + P_{EC} + P_{AD} + P_{DB} + P_{DE} + P_{CD} =$$

$$= 6\pi + AE + BC = 6\pi + \cancel{\sqrt{36-16\cos^2\alpha}} + \cancel{\sqrt{36-16\cos^2\alpha}}$$

$$+ \sqrt{\left(2\cdot\sqrt{36-16\cos^2\alpha}\right)^2 + 0^2} + \sqrt{0^2 + \left(2\cdot\left(\sqrt{36-16\sin^2\alpha}\right)\right)^2} =$$

$$= 6\pi + 2\cdot\sqrt{36-16\cos^2\alpha} + 2\sqrt{36-16\sin^2\alpha}$$

Найдём наибольшее значение

$$\sqrt{36-16\cos^2\alpha} + \sqrt{36-16\sin^2\alpha}$$

$$\cancel{\frac{36-16\cos^2\alpha + 36-16\sin^2\alpha}{2}}$$

$$\cancel{\sqrt{6+4\cos\alpha} + \sqrt{6-4\cos\alpha}}$$

$$\cancel{\sqrt{36-16\cos^2\alpha}}$$

Таким образом мы найдём на угол $\alpha$, при котором будет наибольший периметр.

Для случаев $\cos x \le 0, \sin x \le 0$; $\cos x \ge 0, \sin x \le 0$; $\cos x \le 0, \sin x \ge 0$ делается аналогично.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☒ 7 ☐



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. **Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно.** Порча QR-кода недопустима!

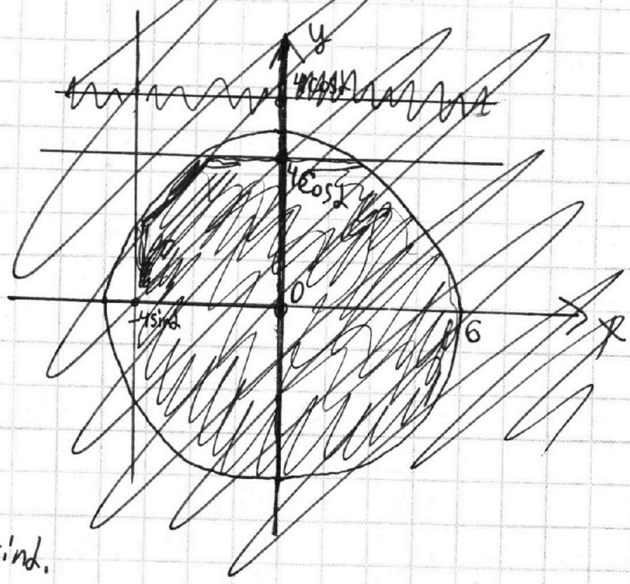
Задача 6.

$$\begin{cases}(x+4\sin\alpha)(y-4\cos\alpha)\le 0\\ x^2+y^2\le 36\end{cases}$$

Разберём несколько случаев.

1) $\cos\alpha \ge 0$, $\sin\alpha \ge 0$.

Тогда второе уравнение является уравнением окружности с центром в точке $(0;0)$, первое неравенство разбивает плоскость на 4 части 2 прямыми: $y=4\cos\alpha$, $x=-4\sin\alpha$.




Методом областей получаем, что неравенство $x^2+y^2\le 36$ выполняется для всех $(x;y)$, которые лежат внутри круга, решением первого неравенства служат все точки, при которых

$$\left[\begin{array}{l}\begin{cases}x\ge -4\sin\alpha\\ y\le 4\cos\alpha\end{cases}\\ \begin{cases}x\le -4\sin\alpha\\ y\ge 4\cos\alpha\end{cases}\end{array}\right.$$

Заштрихуем общие точки, являющиеся решением и первого неравенства, и второго.

Так как $(-4\sin\alpha)^2+(4\cos\alpha)^2=16\sin^2\alpha+16\cos^2\alpha=16(\sin^2\alpha+\cos^2\alpha)=16$ $\Rightarrow$ расстояние от точки $(0;0)$ до пересечения прямых $y=4\cos\alpha$ и $x=-4\sin\alpha$ равно 4.

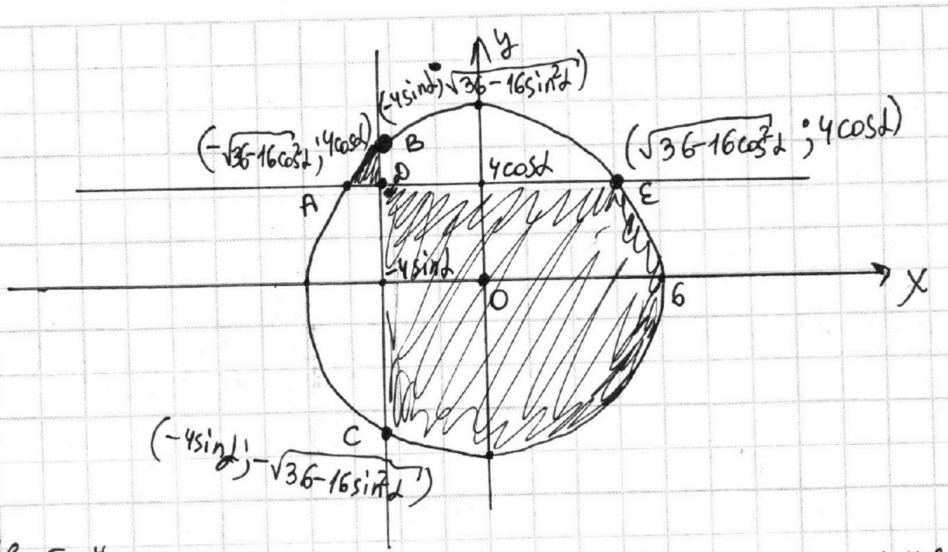
Т.к. $R$ окружности $=6 > 4$ $\Rightarrow$ прямые $y=4\cos\alpha$ и $x=-4\sin\alpha$ будут пересекаться внутри окружности.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☒ 7 ☐



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. **Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно.** Порча QR-кода недопустима!




Найдём точки пересечения окружности с прямыми $y=4\cos\alpha$ и $x=-4\sin\alpha$.

если $y=4\cos\alpha$: $x^2+(4\cos\alpha)^2=36 \Rightarrow x^2=36-16\cos^2\alpha$

$x=\pm\sqrt{36-16\cos^2\alpha}$

если $x=-4\sin\alpha$: $(-4\sin\alpha)^2+y^2=36 \Rightarrow y^2=36-16\sin^2\alpha$

$\Rightarrow y=\pm\sqrt{36-16\sin^2\alpha}$

~~квадрат Расстояния между точкой $(-4\sin\alpha; -\sqrt{36-16\sin^2\alpha})$ и точкой $(\sqrt{36-16\cos^2\alpha}; 4\cos\alpha)$ равно~~

~~$(\sqrt{36-16\cos^2\alpha}+4\sin\alpha)^2+(\sqrt{36-16\sin^2\alpha}+4\cos\alpha)^2=$~~

~~$=36-16\cos^2\alpha+16\sin^2\alpha+8\sin\alpha\cdot\sqrt{36-16\cos^2\alpha}+36-16\sin^2\alpha+16\cos^2\alpha+8\cos\alpha\sqrt{36-16\sin^2\alpha}$~~

Обозначим точки так, как на рисунке.

$\angle ADB = 90^\circ \Rightarrow \angle AOB + \angle COE = 90^\circ \cdot 2 = 180^\circ$ (из геометрии)

$\Rightarrow$ ~~[illegible]~~ (угол между хордами равен полусумме дуг, на которые эти хорды опираются)

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно.**

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. **Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно.** Порча QR-кода недопустима!

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

1 ☐ 2 ☒ 3 ☒ 4 ☒ 5 ☒ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА [illegible] ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. **Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно.** Порча QR-кода недопустима!

4 чел.

X людей

$$\frac{4}{x} \cdot 11 = \frac{m}{x}$$

$$44 = m$$

2 билета

$$\frac{4}{x}$$

$$\frac{1 \cdot \frac{(x-1)(x-2)(x-3)}{3 \cdot 2 \cdot 1}}{\frac{x(x-1)(x-2)(x-3)}{4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}}$$

$$\arccos\frac{x}{7} - \arcsin y$$

$$\frac{2}{3} \cdot \frac{2}{3} = \frac{4}{9}.$$

$$\cos\left(\arccos\frac{x}{7} - \arcsin\frac{y}{4}\right) = \frac{x}{7} \cdot \cos\left(\arcsin\frac{y}{4}\right) + \sin\left(\arcsin\frac{x}{7}\right) \cdot \frac{y}{4}$$

$$\cancel{\arccos\left(\frac{x}{7}\right) - \arcsin\frac{y}{4}}$$

$-7 \le x \le 7.$

$-4 \le y \le 4.$

$(-7; -4)\ (-7; -2)\ (-7; 0)$

$(-7; 2)\ (-7; 4)$

$$\begin{cases} \arccos\frac{x}{7} = 0 \\ \arcsin\frac{y}{4} = \frac{\pi}{2} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \frac{x}{7} = 1 \\ \frac{y}{4} = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 7 \\ y = 4 \end{cases}$$

$$5 \cdot 14 + 4 = 74.$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

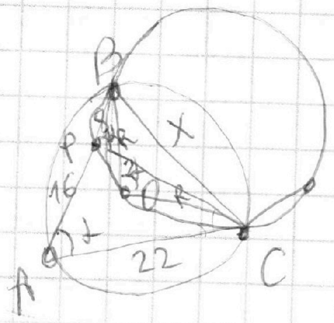
1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА __ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. **Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно.** Порча QR-кода недопустима!

$R^2 = R^2 + x^2 - 2Rx \cdot \cos(90^\circ - \alpha)$

$x = 2R\sin\alpha$




$16 \cdot 24 = 22 \cdot ?$

$? = \frac{192}{11}$

$\frac{x}{\sin 2\alpha} = \frac{8}{\sin\angle POB}$

$\angle POB = 8\sin 2\alpha$

$16 \times 16 = 256$

$24 \times 24 = 576$

$48 \times 22 = 1056$

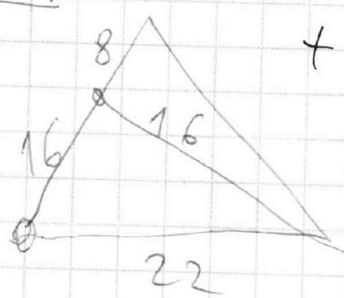
$576 + 484 = 1060$

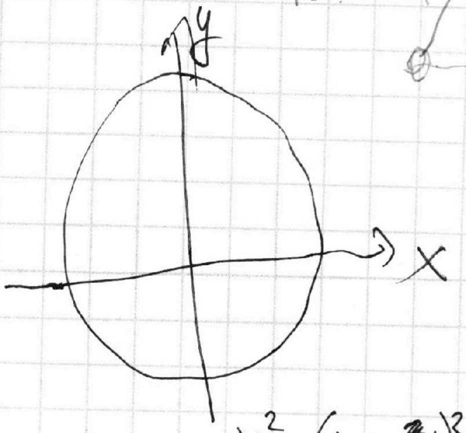
$1060 - 334 = 726$

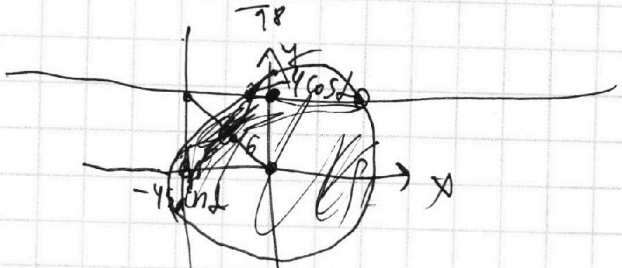
$\frac{363}{528}$

$528 : 3 = 176$

$\cos\varphi = \frac{72 - 64\cos\alpha}{-72}$




$x^2 + (4\cos^2\alpha)^2 = 36$

$x^2 = 36 - 16\cos^2\alpha$.

$x = \sqrt{36 - 16\cos\alpha}$

$(2\sqrt{36-16\cos\alpha})^2 = 6^2 + 6^2 - 2 \cdot 6 \cdot 6 \cdot \cos\varphi$

$4(36 - 16\cos\alpha) = 72 - 72\cos\varphi$

$144 - 64\cos\alpha = 72 - 72\cos\varphi$

$\sin\varphi = \sqrt{1^2 - \left(\frac{72-64\cos\alpha}{-72}\right)^2} = \sqrt{\frac{72^2 - (72 - 64\cos\alpha)^2}{72^2}}$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА __ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. **Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно.** Порча QR-кода недопустима!

$A = 1111 \cdot \alpha_A = 11 \cdot 101 \cdot \alpha_A$

$B = 707 = 7 \cdot 101$

$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{3}{xy} = \frac{1}{x-4} + \frac{1}{y+4} + \frac{3}{(x-4)(y+4)}$

$\frac{y+x+3}{xy} \Big| \frac{y+4+x-4+3}{(x-4)(y+4)}$

$xy \neq xy + 4x - 4y - 16$

$4y + 16 \neq 4x$

$y + 4 \neq x$

$\cos(\alpha - \beta) + \cos(\alpha + \beta) = 2\cos\alpha\cos\beta$

$y + x + 3 = 0.$

$xy \neq (x-4)(y+4)$

$2\cos($

$(y+4)^3 - y^3 - 12(y+4)\cdot y = \cancel{y^3} + 3\cdot 4y^2 + 12y^2 + 48y + 64$

$\cancel{y^3 - 12y^2 - 48y = 64}$

$\begin{cases} \cos\alpha = \frac{x}{7} \\ \sin\beta = \frac{y}{4} \end{cases}$

$(\sin\pi y - \sin\pi x)\sin\pi y = (\cos\pi y + \cos\pi x)\cos\pi y$

$\sin\pi y \sin\pi y - \sin\pi x \sin\pi y = \cos\pi y \cdot \cos\pi y + \cos\pi x \cos\pi y$

$\cos(\pi y + \pi y) + \cos(\pi x - \pi y) = 0.$

$\cancel{\cos(2\pi y) + 16}$ $2\cos\left(\frac{\pi y + \pi y + \pi x - \pi y}{2}\right)\cos\left(\frac{\pi x - \pi y - \pi y - \pi y}{2}\right) = 0$

$2\cos\left(\frac{\pi x + \pi y}{2}\right)\cos\left(\frac{\pi x - 3\pi y}{2}\right) = 0$

$\arccos(\cos\alpha) = \arcsin(\sin\beta)$

$\cos\left(\frac{\pi x + \pi y}{2}\right) = 0.$

$\frac{\pi x + \pi y}{2} = \frac{\pi}{2} + \pi n, n \in Z$

$\frac{x+y}{2} = \frac{1}{2} + n, n \in Z$

$x + y = 1 + 2n, n \in Z$

$\frac{\pi x - 3\pi y}{2} = \frac{\pi}{2} + \pi k, k \in Z$

$\frac{x - 3y}{2} = \frac{1}{2} + k, k \in Z$

$x - 3y = 1 + 2k, k \in Z$

$23 \times 23 = 69 + 46 = 529$

$\frac{1 \cdot 3}{2}$

$\frac{1 \cdot 2}{2}$

$\frac{3 \cdot 2}{2}$

$1 \cdot 3$

$\frac{1 \cdot \frac{2}{1}}{2}$

1000

$7 - 12 = -5$