



МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

11 КЛАСС. Вариант 4



1. [3 балла] Найдите все тройки натуральных чисел $(A; B; C)$ такие, что:
- A — четырёхзначное число, составленное из одинаковых цифр,
 - B — трёхзначное число, хотя бы одна из цифр которого равна 7,
 - C — двузначное число, хотя бы одна из цифр которого равна 1,
 - произведение $A \cdot B \cdot C$ является квадратом некоторого натурального числа.
2. [3 балла] Положительные числа x и y таковы, что значение выражения $K = \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{3}{xy}$ не изменяется, если x уменьшить на 4, а y — увеличить на 4. Найдите все возможные значения выражения $M = x^3 - y^3 - 12xy$.
3. [5 баллов] а) Найдите все пары действительных чисел $(x; y)$ такие, что $(\sin \pi y - \sin \pi x) \sin \pi y = (\cos \pi y + \cos \pi x) \cos \pi y$.
- б) Сколько пар целых чисел (x, y) удовлетворяют одновременно этому уравнению и неравенству

$$\arccos \frac{x}{7} - \arcsin \frac{y}{4} > -\frac{\pi}{2}?$$

4. [4 балла] В начале месяца было выделено 4 билета на праздничный концерт, которые планировалось случайным образом распределить между одиннадцатиклассниками. В конце месяца выяснилось, что будет выделено больше 4 билетов. Одиннадцатиклассники Петя и Вася вычислили, что вероятность им обоим вместе попасть на концерт в начале месяца была в 11 раз меньше, чем оказалась в конце месяца. Сколько всего было выделено билетов на концерт в конце месяца, если количество одиннадцатиклассников не изменилось?
5. [5 баллов] Точка O — центр окружности ω_1 , описанной около остроугольного треугольника ABC . Окружность ω_2 , описанная около треугольника BOC , пересекает отрезок AB в точке P . Найдите площадь треугольника ABC , если $AP = 16$, $BP = 8$, $AC = 22$.
6. [6 баллов] На координатной плоскости изображена фигура $\Phi(\alpha)$, состоящая из всех точек, координаты $(x; y)$ которых удовлетворяют системе неравенств

$$\begin{cases} (x + 4 \sin \alpha)(y - 4 \cos \alpha) \leq 0, \\ x^2 + y^2 \leq 36. \end{cases}$$

Найдите максимальное значение M периметра (длины границы) фигуры $\Phi(\alpha)$ и укажите все значения α , при которых оно достигается.

7. [6 баллов] Шар Ω касается всех рёбер правильной усечённой пирамиды, а шар ω касается всех её граней. Найдите угол наклона боковой грани пирамиды к плоскости её основания.



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1	2	3	4	5	6	7
☒	☐	☐	☐	☐	☐	☐

СТРАНИЦА
1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Задача №1

Для того, чтобы выполнить последнее условие про транзитивность, нужно, чтобы каждый простой множитель внадел четное количество раз.

Пусть A состоит из одинаковых цифр $\Rightarrow A = n \cdot 1111$, имеет вид: где $n \in \mathbb{N}$ и $n \in [1; 9]$

Разложим 1111 на простые: $1111 = 11 \cdot 101$. Если мы будем разлагать число B , то никаким образом не увидим там 101, так как $C \leq 99$ (2 цифры) $\Rightarrow B$ содержит в разложении простые множители 101, но B ещё должен иметь 7 $\Rightarrow B = 707$

$$(B = 7 \cdot 101; 7 \in [1; 9], 7 \in \mathbb{N})$$

Значит ситуация такая:

$$A = n \cdot 1111 = 101 \cdot 11 \cdot n$$

$$B = 707 = 101 \cdot 7$$

$$C = \alpha \quad \alpha \leq 99 \text{ и } \alpha \in \mathbb{Z} \text{ и } \alpha \in [10; 19] \text{ и } \{21; 31; 41; 51; 61; 71; 81; 91\}$$

n не может все же содержать простой множитель 11 $\Rightarrow \alpha \neq 11$, а это только $\alpha = 11 \Rightarrow C = 11 \Rightarrow n = 7 \Rightarrow A = 7777$

Ответ: (7777, 707; 11)



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☒ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА
1 из 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Задача №2

ОДЗ: $x \neq 0$ $y \neq 0$ $x \neq -4$ $y \neq -4$

$$k = \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{3}{xy} = \frac{x+y+3}{xy} = k(x; y)$$

$$k(x-4; y+4) = k(x; y) \text{ из условия } \Rightarrow \frac{x+y+3}{xy} = \frac{x-4+y+4+3}{(x-4)(y+4)}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x+y+3=0 \\ xy=(x-4)(y+4) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x+y=-3 \\ xy=xy-4y+4x-16 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x+y=-3 \\ y=x-4 \end{cases}$$

$$M = x^3 - y^3 - 12xy = (x-y)(x^2 + xy + y^2) - 12xy$$

$$M = \begin{cases} -(-3+y)^3 - y^3 + 12(y+3)y & \text{при } x = -3-y \\ 4(x^2 + xy + y^2) - 12xy & \text{при } y = x-4 \end{cases} = \begin{cases} -2y^3 - 27 - 9y^2 - 27y + 12y + 36y & \text{при } x = -3-y \\ 4(x^2 - 2xy + y^2) & \text{при } y = x-4 \end{cases}$$

$$M = \begin{cases} -2y^3 + 3y^2 + 9y - 27 & \text{при } x = -3-y \\ 4(x-y)^2 & \text{при } y = x-4 \end{cases} = \begin{cases} -2y^3 + 3y^2 + 9y - 27 \\ 64 \end{cases}$$

$M=64$ есть всегда, так как x и y можно подобрать $\in$ ОДЗ

$\delta = -2y^3 + 3y^2 + 9y - 27$ не ограничено, но есть выделенные точки из ОДЗ:

$$y \neq 0; y \neq -3; y \neq -7; y \neq -4$$

рассмотрим при этих $y \in \{0; -3; -7; -4\}$ значения выражения δ :

$$\begin{aligned} \delta'(0) &= -27; \delta'(-3) = 54 + 27 - 27 - 27 = 27; \delta'(-4) = +2 \cdot 64 + 3 \cdot 16 + 9 \cdot (-4) - 27 = 128 - 36 - 27 = 5; \delta'(-7) = 2 \cdot 343 + 3 \cdot 49 - 9 \cdot 7 - 27 = \\ &= 686 + 147 - 63 - 27 = 743 \end{aligned}$$

Ответ: M принимает всевозможные значения, кроме: $5; 27; -27; 743$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7
☐ ☐ ☒ ☐ ☐ ☐ ☐

СТРАНИЦА
 1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Задача №3

a) $(\sin \pi y - \sin \pi x) \sin \pi y = (\cos \pi y + \cos \pi x) \cos \pi y$

из тригонометрии: $\sin \alpha - \sin \beta = 2 \sin(\frac{\alpha-\beta}{2}) \cos(\frac{\alpha+\beta}{2})$
 $\cos \alpha + \cos \beta = 2 \cos(\frac{\alpha+\beta}{2}) \cos(\frac{\alpha-\beta}{2})$

$\sin(\frac{\pi}{2}(y-x)) \cos(\frac{\pi}{2}(x+y)) \sin \pi y = \cos \pi y (\cos(\frac{\pi}{2}(x+y)) \cos(\frac{\pi}{2}(y-x)))$

$\Rightarrow \begin{cases} \frac{\pi}{2}(x+y) = \frac{\pi}{2} + \pi n \quad n \in \mathbb{Z} \\ \lg(\frac{\pi}{2}(y-x)) \lg \pi y = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x+y = 1 + 2n \quad n \in \mathbb{Z} \\ \lg(\frac{\pi}{2}(y-x)) = (\lg(\pi y) = \lg(\frac{\pi}{2} - xy)) \end{cases}$

$\Rightarrow \begin{cases} x+y = 1 + 2n \quad n \in \mathbb{Z} \\ \frac{\pi}{2}(y-x) = \frac{\pi}{2} - \pi y + \pi k \quad k \in \mathbb{Z} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x+y = 1 + 2n \quad n \in \mathbb{Z} \\ y-x = 1 - 2y + 2k \quad k \in \mathbb{Z} \end{cases}$

$\Rightarrow \begin{cases} x+y = 1 + 2n \quad n \in \mathbb{Z} \\ 3y-x = 1 + 2k \quad k \in \mathbb{Z} \end{cases} \leftarrow \begin{array}{l} \text{все пары } (x; y) \text{ удовлетворяют} \\ \text{системе уравнений} \end{array}$

b) $\arccos \frac{x}{7} = \frac{\pi}{2} - \arcsin \frac{x}{7}$ и $x, y \in \mathbb{Z}$

$\frac{\pi}{2} - \arcsin \frac{x}{7} - \arcsin \frac{y}{4} > -\frac{\pi}{2} \quad \arcsin \frac{x}{7} + \arcsin \frac{y}{4} < \pi$

не рассматриваем пары для $\begin{cases} x=4 \\ y=7 \end{cases}$

$\Rightarrow \text{для } x+y=1+2n \Rightarrow \begin{array}{l} x \text{ чет} \text{ или } x \text{ нечет} \\ y \text{ нечет} \text{ или } y \text{ чет} \end{array}$

$3y-x=1+2k \Rightarrow \begin{array}{l} x \text{ чет} \text{ или } x \text{ нечет} \\ y \text{ нечет} \text{ или } y \text{ чет} \end{array}$

всего пар, удовлетворяющих неравенствам: $(4+4+1) \cdot (7+7+1) - 1 = 9 \cdot 15 - 1 = 134$

но нечет-чет и чет-нечет;
 где x чет: 7 вариантов
 где y чет: 5 вариантов

всего пар $7 \cdot 4 + 8 \cdot 5 - 1 = 28 + 40 - 1 = 67$ пар

Ответ: а) 134 пары, б) 67 пар



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☒	☐	☐	☐

СТРАНИЦА
1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Задача №4

Всего n человек в классе, тогда количество мест для выдать билеты C_n^4 способами, а выдать места тем, чтобы Тёма и Вова оба попали на концерт можно представить, как выдать из $n-2$ человек на $n-2$ места

$\Rightarrow$ вероятность им обоим попасть на концерт: $\frac{C_{n-2}^{4-2}}{C_n^4} = \frac{C_{n-2}^2}{C_n^4}$

формула $C_b^a = \frac{b!}{a!(b-a)!}$ из комбинаторики

В конце месяца выдают $x > 4$ билетов ($x \in \mathbb{N}$) тогда посчитаем аналогично вероятности в конце месяца: $\frac{C_{n-2}^{x-2}}{C_n^x}$

Используем условие на увеличение вероятности в 11 раз:

$$\frac{C_{n-2}^{x-2}}{C_n^x} = 11 \frac{C_{n-2}^2}{C_n^4} ; \frac{\frac{(n-2)!}{(n-2)!(n-x)!}}{\frac{n!}{(n-x)!x!}} = \frac{\frac{(n-2)!}{2!(n-4)!}}{\frac{n!}{4!(n-4)!}} = 11$$

Сократим лишнее:

$$\frac{x!}{(x-2)!} = \frac{4!}{2!} \cdot 11 = 4 \cdot 3 \cdot 11 = 12 \cdot 11$$

$$x \cdot (x-1) = 12 \cdot 11 \Rightarrow x = \begin{cases} 12 & \text{✓ (подходит)} \\ -11 & \text{← не подходит, так } x > 4 \end{cases}$$

Ответ: 12 мест



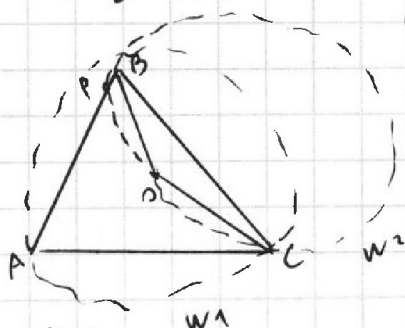
На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☒ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА
1 из 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Задача N5



$$AP=AB, BP=8; AC=22$$

Из центра O в AP и BP опустим перпендикуляры OM и ON .
Из $\triangle OMC$ $\sin \angle C = \frac{OM}{R}$

$$\frac{BC}{\sin \angle A} = 2R \quad \left| \cdot \frac{R}{\sin(\frac{\pi}{2} - \angle A)} = 2R \right.$$

$$S_{ABC} = \frac{AB \cdot AC}{2} \sin \angle A$$

$$AB = AP + BP = 24$$

$\triangle BOC$ равнобедренный, так как $BO = OC = R$; $\angle BOC = 2\angle A \leftarrow$
центральный — вписанный угол



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

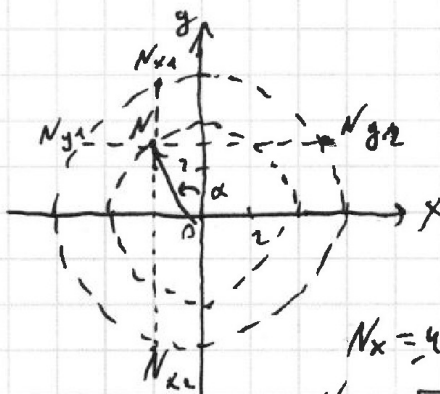
1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☒ 7 ☐

СТРАНИЦА
1 ИЗ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Задача N 6

$\begin{cases} x^2 + y^2 \leq 36 \\ (x + 4 \sin \alpha)(y - 4 \cos \alpha) \leq 0 \end{cases}$ уравнение круга с $R=6$
если начало пересечения из $0;0$
в $(-4 \sin \alpha; 4 \cos \alpha)$, то ~~оба~~ ~~эти~~ ~~абс-~~
Преобразуем условие $\rightarrow$ точки N слева сверху и справа снизу
в зависимости от α точка N будет
бежать по окружности
с $R=4$



$$P(\alpha) = N N_{x1} N_{y1} + N N_{y1} N_{x2}$$

найдем координаты $N_{x1}; N_{x2}; N_{y1}; N_{y2}$
($N_{x1} N_{x2} \neq 0$; $N_{y1} N_{y2} \neq 0$)

$$N_x = 4 \sin \alpha \Rightarrow N_{x1} = N_{x2} = N_x = -4 \sin \alpha$$

$$N_{x1} y = \sqrt{36 - 16 \sin^2 \alpha} = -N_{x2} y$$

$$N_{y1} y = N_{y2} y = N_y = 4 \cos \alpha \Rightarrow N_{y1} = -N_{y2} = \sqrt{36 - 16 \cos^2 \alpha}$$

$$P(\alpha) = N_{y1} N_{y2} + N_{x1} N_{x2} + N_{x1} N_{y1} + N_{y2} N_{x2} = 2 \cdot \sqrt{36 - 16 \sin^2 \alpha} +$$

$$2 \cdot \sqrt{36 - 16 \cos^2 \alpha} + N_{x1} N_{y1} + N_{x2} N_{y2} = 4 \sqrt{36 - 16 \sin^2 \alpha} + 4 \sqrt{36 - 16 \cos^2 \alpha} +$$

$$+ N_{x1} N_{y1} + N_{x2} N_{y2} = 4 \sqrt{36 - 16 \sin^2 \alpha} + 4 \sqrt{36 - 16 \cos^2 \alpha} + N_{x1} N_{y1} + N_{x2} N_{y2} = 112 + N_{x1} N_{y1} + N_{x2} N_{y2}$$

найдем угол между радиусами окружности:

$$\text{где } N_{x1} N_{y1} \neq \text{tg } \varphi_{x1} = \frac{4 \sin \alpha}{36 - 16 \sin^2 \alpha} \quad (\text{предполагаем } \alpha \in [0; \pi/2], \text{ так как 2 радиуса будут направлены симметрично относительно оси})$$

$$\text{tg } \varphi_{y1} = \frac{36 - 16 \cos^2 \alpha}{4 \cos \alpha}$$

$$\text{ctg } (\Delta \varphi) = \text{tg } (\varphi_{x1} + \varphi_{x2}) = \frac{1 - \frac{16 \cos \alpha \sin \alpha}{(36 - 16 \cos^2 \alpha)(36 - 16 \sin^2 \alpha)}}{1 - \frac{16 \cos \alpha \sin \alpha}{(36 - 16 \cos^2 \alpha)(36 - 16 \sin^2 \alpha)}} =$$

$$= \frac{4(36 - 16 \sin^2 \alpha) + 4(36 - 16 \cos^2 \alpha) + \sin \alpha (36 - 16 \sin^2 \alpha) - 16 \cos \alpha \sin \alpha}{36^2 - 16 \cdot 36 + 16^2 \cos^2 \alpha \sin^2 \alpha - 16 \cos \alpha \sin \alpha}$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☒ 7 ☐

СТРАНИЦА
2 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Задача №6 (продолжение)

Заметим, что для одной из точек выражение принимает как $\pi_2 = \pi - 6$, а для другой $\pi_2 = \pi + 6 \Rightarrow$ сумма угловых координат для всегда $\pi \Rightarrow$ Решение $\Rightarrow$ формулируется
 $\Rightarrow N_{x1}N_{y1} + N_{x2} + N_{y2} = 6\pi$

Ответ: $4\pi + 2\pi$ всегда!

Найдем максимум $2(\sqrt{36 - 16\sin^2\alpha} + \sqrt{36 - 16\cos^2\alpha}) = 8$

$$f' = 0: 0 = \frac{-32\sin\alpha\cos\alpha}{\sqrt{36 - 16\sin^2\alpha}} + \frac{32\cos\alpha\sin\alpha}{\sqrt{36 - 16\cos^2\alpha}} = 0$$

$$32\cos\alpha\sin\alpha \left(\frac{\sqrt{36 - 16\sin^2\alpha} - \sqrt{36 - 16\cos^2\alpha}}{\sqrt{w}} \right) = 0$$

Рассмотрим:

$$\sqrt{36 - 16\sin^2\alpha} = \sqrt{36 - 16\cos^2\alpha}$$

$$-16\sin^2\alpha = -16\cos^2\alpha \quad \sin^2\alpha = \cos^2\alpha$$

$$\lg^2\alpha = 1 \Rightarrow \lg\alpha = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

$$\text{или } \alpha = 0 + \frac{\pi}{2}n \quad n \in \mathbb{Z}; \quad 8 = 2(6 + \sqrt{20})$$

$$\text{или } \alpha = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{2}n \quad n \in \mathbb{Z}; \quad 8 = 2(\sqrt{36 - 8} + \sqrt{36 - 8}) =$$

$$\sqrt{7} \approx 2,5 \quad 8 \cdot 2,5 = 4 \cdot 5 = 20 \quad = 4\sqrt{28} = 8\sqrt{7}$$

$$\sqrt{20} \leq 4,5$$

$$\text{Ответ } 6\pi + 8\sqrt{7} \quad \text{или } \alpha = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{2}n \quad n \in \mathbb{Z}$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

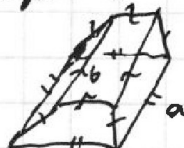
1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☒

СТРАНИЦА
1 из 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Задача №7

правильный
тетраэдр

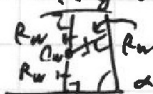


Из-за симметрии можно сказать, что

Условия для касания W :

равноудален от вершин и от сторон

и от боковой! (и у нас радиус R_W) и везем мы

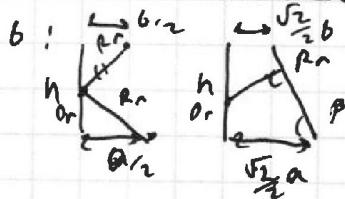


от центра
тетраэдра

то есть высота тетраэдра равна $2R_W = h$ — искомый для нас ответ

Условие для касания ребер (R): центр шара на оси тетраэдра (пусть R_r — радиус)

1 сторона нижнего основания a , а основание верхнего основания





На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

N1

A: 1111... 9999

9999 = 9 · 1111

B: 7... ; ... 7... ; ... 7

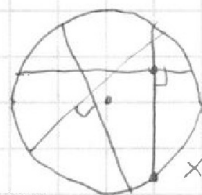
1111 = 11 · 101

C: 11 12... ; 21, 31...

B = 101 · 7 = 707

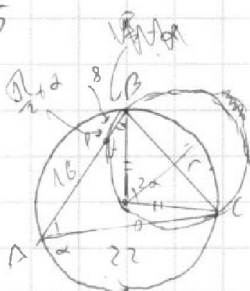
8 · 11 = 101
7 · 101
 $\alpha = 11$

$$dx_1 dx_2 = dy_1 dy_2$$



$$x^2 + y^2 = 36 = 6^2$$

N5



$$\frac{BC}{\sin \alpha} = 2R$$

$$\frac{BC}{2} = R \sin \alpha$$

$$\frac{R}{\sin(\frac{\pi}{2} + \alpha)} = 2r$$

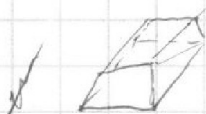
$$\frac{BC}{\sin 2\alpha} = 2r$$

$$\frac{R \sin \alpha}{\sin 2\alpha} = r = \frac{R}{2 \sin(\frac{\pi}{2} + \alpha)}$$

$$2 \sin(\frac{\pi}{2} + \alpha) = 2 \cos \alpha$$

$$\sin(\frac{\pi}{2} + \alpha) = \cos \alpha = \sin(\frac{\pi}{2} - \alpha)$$

$$6 \cdot 16 = 96$$



$$43 \cdot 7 = 280 + 63 = 343$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

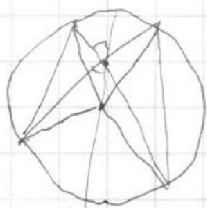
1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$xy \geq 0 \Rightarrow \begin{cases} x \geq 0 \\ y \geq 0 \\ x \leq 0 \\ y \leq 0 \end{cases}$$

$$\frac{\pi}{2} - \pi y = \frac{\pi}{2}(x-y) + \pi n$$



$$\begin{aligned} 1-2y &= x-y+2n \\ x+y &= 1-2n \end{aligned}$$

$$\cos 90^\circ + \cos 30^\circ = 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\cos 90^\circ + \cos 30^\circ = 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$- \arcsin \frac{x}{2} + \arcsin \frac{y}{2} = \arcsin \frac{\sqrt{3}}{2} \quad \arcsin \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2} \right)$$

$$x+y=1-2n \quad \cos 60^\circ + \cos 60^\circ = 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot 1 = 1$$

$$\frac{C_{n-2}^2}{C_n^4} = \frac{C_{n-2}^{x-2}}{C_n^x}$$

$$C_a^b = \frac{a!}{b!(a-b)!}$$

$$C_8^1 = \frac{8!}{1!7!} \quad C_8^2 = \frac{8!}{2!6!} = \frac{7 \cdot 8}{2}$$

$$\begin{matrix} C: 11 & 12 & \dots & 19 \\ & 21 & 31 & \dots & 91 \end{matrix}$$

$$x \cdot (x-1) = 12 \cdot 11$$

$$x^2 - x - 132 = 0$$

$$x_1 = -11$$

$$x_2 = 12$$

ИЗ

$$\frac{x+y+3}{xy} = k = \frac{x+y+3}{(x+y)(y+y)}$$

$$xy - 4y + 4x - 16 = xy$$

$$4y = 4x - 16 \quad y = x - 4$$

$$M = x^3 - y^3 - 12xy = (x-y)(x^2 + y^2 + xy) = 4(x^2 + y^2 + xy) - 12xy$$

$$4x^2 + 8xy + 4y^2 = 4(x^2 + 2xy + y^2) = 4(x+y)^2 = 4 \cdot 4^2 = 64$$

$$\lg \frac{\pi}{2} - \pi y = \lg \left(\frac{\pi}{2}(x-y) \right)$$

$$C_{\pi y} \pi y = \lg \left(\frac{\pi}{2}(x-y) \right)$$

$$\lg \frac{\pi}{2}(x-y) \lg \pi y = 1$$

$$\lg r = \frac{\sin \delta}{\sin \alpha} = \frac{\sin 95^\circ}{\cos 95^\circ} = \lg \frac{\pi}{2} - \delta$$

$$\sin \frac{\pi(x-y)}{2} \cos \left(\frac{\pi}{2}(x+y) \right) \sin \pi y = \cos \pi y \cos \left(\frac{\pi}{2}(x+y) \right)$$

$$\begin{aligned} \sin \alpha + \sin \beta &= 2 \sin \frac{\alpha+\beta}{2} \cos \frac{\alpha-\beta}{2} \\ \cos \alpha + \cos \beta &= 2 \cos \frac{\alpha+\beta}{2} \cos \frac{\alpha-\beta}{2} \end{aligned}$$

$$\sin 90^\circ - \sin 30^\circ = 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}$$

$$\sin 60^\circ + \sin 60^\circ = 2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot 1$$

$$\begin{matrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & \\ 2 & & \end{matrix}$$

$$\begin{matrix} 01 \\ 02 \\ 11 \\ 12 \\ 21 \\ 22 \end{matrix}$$