МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

11 КЛАСС. Вариант 4

1. [3 балла] Найдите все тройки натуральных чисел $(A; B; C)$ такие, что:
   - A — четырёхзначное число, составленное из одинаковых цифр,
   - B — трёхзначное число, хотя бы одна из цифр которого равна 7,
   - C — двузначное число, хотя бы одна из цифр которого равна 1,
   - произведение $A \cdot B \cdot C$ является квадратом некоторого натурального числа.

2. [3 балла] Положительные числа x и y таковы, что значение выражения $K = \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{3}{xy}$ не изменяется, если x уменьшить на 4, а y — увеличить на 4. Найдите все возможные значения выражения $M = x^3 - y^3 - 12xy$.

3. [5 баллов] а) Найдите все пары действительных чисел $(x; y)$ такие, что $(\sin \pi y - \sin \pi x) \sin \pi y =$ $= (\cos \pi y + \cos \pi x) \cos \pi y$.

   б) Сколько пар целых чисел (x, y) удовлетворяют одновременно этому уравнению и неравенству
$$\arccos \frac{x}{7} - \arcsin \frac{y}{4} > -\frac{\pi}{2}?$$

4. [4 балла] В начале месяца было выделено 4 билета на праздничный концерт, которые планировалось случайным образом распределить между одиннадцатиклассниками. В конце месяца выяснилось, что будет выделено больше 4 билетов. Одиннадцатиклассники Петя и Вася вычислили, что вероятность им обоим вместе попасть на концерт в начале месяца была в 11 раз меньше, чем оказалась в конце месяца. Сколько всего было выделено билетов на концерт в конце месяца, если количество одиннадцатиклассников не изменилось?

5. [5 баллов] Точка O — центр окружности ω_1, описанной около остроугольного треугольника ABC. Окружность ω_2, описанная около треугольника BOC, пересекает отрезок AB в точке P. Найдите площадь треугольника ABC, если $AP = 16$, $BP = 8$, $AC = 22$.

6. [6 баллов] На координатной плоскости изображена фигура $\Phi(\alpha)$, состоящая из всех точек, координаты $(x; y)$ которых удовлетворяют системе неравенств
$$\begin{cases} (x + 4\sin\alpha)(y - 4\cos\alpha) \leqslant 0, \\ x^2 + y^2 \leqslant 36. \end{cases}$$
   Найдите максимальное значение M периметра (длины границы) фигуры $\Phi(\alpha)$ и укажите все значения α, при которых оно достигается.

7. [6 баллов] Шар Ω касается всех рёбер правильной усечённой пирамиды, а шар ω касается всех её граней. Найдите угол наклона боковой грани пирамиды к плоскости её основания.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

1 [X] 2 [ ] 3 [ ] 4 [ ] 5 [ ] 6 [ ] 7 [ ]

СТРАНИЦА 1 из 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. **Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно.** Порча QR-кода недопустима!

Задача №1

Для того, чтобы выполнить последнее условие про произведение, нужно, чтобы каждый простой множитель входил четное количество раз.

Т.к. A состоит из одинаковых цифр $\Rightarrow A = n \cdot 1111$ имеет вид:, где $n \in \mathbb{N}$ и $n \in [1; 9]$

Разложим 1111 на простые: $1111 = 11 \cdot 101$. Если мы будем рассматривать число C, то никаким образом не увидим там 101, так как $C \leq 99$ (2-значное) $\Rightarrow$ B содержит в разложении на простые множители 101, но B ещё должен иметь 7 $\Rightarrow \underbrace{B = 707}$

$(B = \gamma \cdot 101; \gamma \in [1; 9], \gamma \in \mathbb{N})$

Значит ~~все~~ ситуация такова:

$A = n \cdot 1111 = 101 \cdot 11 \cdot n$

$B = 707 = 101 \cdot 7$

$C = \alpha \qquad \alpha \leq 99$ и $\alpha \in \mathbb{Z}$ и $\alpha \in [10; 19]$ или $\{21; 31; 41; 51; 61; 71; 81; 91\}$

n не может в себе содержать простой множитель 11 $\Rightarrow$

$\Rightarrow \alpha \vdots 11$, а это только $\alpha = 11 \Rightarrow C = 11 \Rightarrow n = 7 \Rightarrow A = 7777$

Ответ: (7777; 707; 11)

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

1 ☐ 2 ☒ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА 1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. **Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно.** Порча QR-кода недопустима!

Задача №2

ОДЗ: $x \neq 0$ и $y \neq 0$; $x \neq 4$, $y \neq -4$

$$k = \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{3}{xy} = \frac{x+y+3}{xy} = k(x;y)$$

$k(x-4; y+4) = k(x;y)$ из условия $\Rightarrow \frac{x+y+3}{xy} = \frac{x-4+y+4+3}{(x-4)(y+4)}$

$$\Rightarrow \left[\begin{array}{l} x+y+3=0 \\ xy=(x-4)(y+4) \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} x+y=-3 \\ xy=xy-4y+4x-16 \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} x+y=-3 \\ y=x-4 \end{array}\right.$$

$$M = x^3 - y^3 - 12xy = (x-y)(x^2+xy+y^2) - 12xy$$

$$M = \left[\begin{array}{l} -(3+y)^3 - y^3 + 12(y+3)y \quad (\text{при } x=-3-y) \\ 4(x^2+xy+y^2) - 12xy \text{ при } y=x-4 \end{array}\right. = \left[\begin{array}{l} -2y^3 - 27 - 9y^2 - 27y + 12y^2 + 36y \quad (\text{при } x=-3-y) \\ 4(x^2-2xy+y^2) \text{ при } y=x-4 \end{array}\right.$$

$$M = \left[\begin{array}{l} -2y^3 + 3y^2 + 9y - 27 \quad (\text{при } x=-3-y) \\ 4(x-y)^2 \text{ при } y=x-4 \end{array}\right. = \left[\begin{array}{l} -2y^3+3y^2+9y-27 \\ 64 \end{array}\right.$$

$M=64$ есть всегда, так как x и y нетрудно подобрать $\in$ ОДЗ

$\gamma = -2y^3 + 3y^2 + 9y - 27$ не ограничена, но есть выколотые точки из-за ОДЗ:

$y \neq 0$; $y \neq -3$; $y \neq -7$; $y \neq -4$

Посчитаем при этих $y \in \{0; -3; -7; -4\}$ значение выражения γ:

$\gamma(0) = -27$; $\gamma(-3) = 54 + 27 - 27 - 27 = 27$; $\gamma(-4) = +2 \cdot 64 + 3 \cdot 16 - 9 \cdot 4 - 27 = +128 - 96 - 27 = 5$; $\gamma(-7) = 2 \cdot 343 + 3 \cdot 49 - 9 \cdot 7 - 27 =$

$= 686 + 147 - 63 - 27 = 623 + 120 = 743$

Ответ: M принимает любое значение, кроме: 5; 27; −27; 743

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☒ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА 1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. **Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно.** Порча QR-кода недопустима!

Задача №3

а) $(\sin \pi y - \sin \pi x)\sin \pi y = (\cos \pi y + \cos \pi x)\cos \pi y$

Из тригонометрии: $\sin\alpha - \sin\beta = 2\sin\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)\cos\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)$

$\cos\alpha + \cos\beta = 2\cos\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)\cos\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)$

$\sin\left(\frac{\pi}{2}(y-x)\right)\cos\left(\frac{\pi}{2}(x+y)\right)\sin\pi y = \cos\pi y\cos\left(\frac{\pi}{2}(x+y)\right)\cos\left(\frac{\pi}{2}(-y+x)\right)$

$\Updownarrow$

$\left[\begin{array}{l} \frac{\pi}{2}(x+y) = \frac{\pi}{2} + \pi n \quad n \in Z \\ tg\left(\frac{\pi}{2}(y-x)\right) tg\, \pi y = 1 \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} x+y = 1+2n \quad n \in Z \\ tg\left(\frac{\pi}{2}(y-x)\right) = ctg(\pi y) = tg\left(\frac{\pi}{2} - \pi y\right) \end{array}\right.$

$\Rightarrow \left[\begin{array}{l} x+y = 1+2n \quad n \in Z \\ \frac{\pi}{2}(y-x) = \frac{\pi}{2} - \pi y + \pi k \quad k \in Z \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} x+y = 1+2n \quad n \in Z \\ y-x = 1-2y+2k \quad k \in Z \end{array}\right.$

$\Rightarrow \left[\begin{array}{l} x+y = 1+2n \quad n \in Z \\ 3y-x = 1+2k \quad k \in Z \end{array}\right.$ ← все пары $(x;y)$ удовлетворяют этому совокупности

← Ответ $(x;y)$ такие, чтобы удовл. совокупности

б) $\arccos\frac{x}{7} = \frac{\pi}{2} - \arcsin\frac{x}{7}$ и x, и $y \in Z$

$\frac{\pi}{2} - \arcsin\frac{x}{7} - \arcsin\frac{y}{4} > -\frac{\pi}{2}$ $\quad \arcsin\frac{x}{7} + \arcsin\frac{y}{4} < \pi$ ←

← не работает только для $\begin{cases} x = 4 \\ y = 7 \end{cases}$

$\Rightarrow$ ~~нет~~ $x+y = 1+2n \iff$ x чет, y нечет или x нечет, y чет

$3y - x = 1+2k \iff$ x чет, y нечет или x нечет, y чет

всего пар, удовлетворяющих неравенству: $(4+4+1)\cdot(7+7+1)-1 = 9\cdot 15 - 1 = 134$

но нечет-чет и чет-нечет:

для x чет: 7 вариантов

для y чет: 5 вариантов

всего пар $7\cdot 4 + 8\cdot 5 - 1 = 28 + 40 - 1 = \underline{67 \text{ пар}}$

4;7 — пара чет-нечет

Ответ: а) "вышеуказанные", б) 67 пар

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☒ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА 1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. **Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно.** Порча QR-кода недопустима!

Задача №4

Ј всего n человек в классе, тогда 1 начале месяца могли выделить билеты C_n^4 способами, а выдать места так, чтобы Петя и Вася оба попали на концерт можно представить, как выбрать из $n-2$ человек на $4-2$ места

$\Rightarrow$ вероятность им обоим попасть на концерт: $\dfrac{C_{n-2}^{4-2}}{C_n^4} = \dfrac{C_{n-2}^{2}}{C_n^4}$

формула $C_b^a = \dfrac{b!}{a!\,(b-a)!}$ из комбинаторики

Ј в конце месяца выдали $x > 4$ билетов ($x \in \mathbb{N}$) тогда посчитаем аналогично вероятность в $\overset{\text{конце}}{\vee}$ месяца: $\dfrac{C_{n-2}^{x-2}}{C_n^x}$

Используем условие на увеличение вероятности в 11 раз:

$$\frac{C_{n-2}^{x-2}}{C_n^x} = 11\,\frac{C_{n-2}^{2}}{C_n^4}; \quad \frac{\frac{n-2!}{(x-2)!\,(n-x)!}}{\frac{n!}{(n-x)!\,x!}} = \frac{\frac{(n-2)!}{2!\,(n-4)!}}{\frac{n!}{4!\,(n-4)!}}\cdot 11$$

Сократим лишнее:

$$\frac{x!}{(x-2)!} = \frac{4!}{2!}\cdot 11 = 4\cdot 3\cdot 11 = 12\cdot 11$$

$x\cdot(x-1) = 12\cdot 11 \Rightarrow x = \left[\begin{array}{l} 12 \text{ (подходит)} \\ -11 \text{ — не подходит, т.к. } x > 4 \end{array}\right.$

Ответ: 12 мест

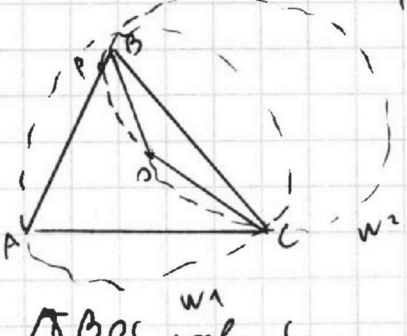
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☒	☐	☐

СТРАНИЦА 1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. **Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно.** Порча QR-кода недопустима!

Задача N5



$AP = 16$; $BP = 8$; $AC = 22$

Радиус у w_1: R, а у w_2: r

Из т. sin:

$$\frac{BC}{\sin\angle A} = 2R; \quad \frac{R}{\sin(\frac{\pi}{2} - \angle A)} = 2r$$

$$AB = AP + BP = 24$$

$$S_{ABC} = \frac{AB \cdot AC}{2} \sin\angle A$$

$\triangle BOC$ равнобедренный, так как $BO = OC = R$; $\angle BOC = 2\angle A$ ← центральный — вписанные углы

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно.**

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☒ 7 ☐

СТРАНИЦА 1 ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. **Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно.** Порча QR-кода недопустима!

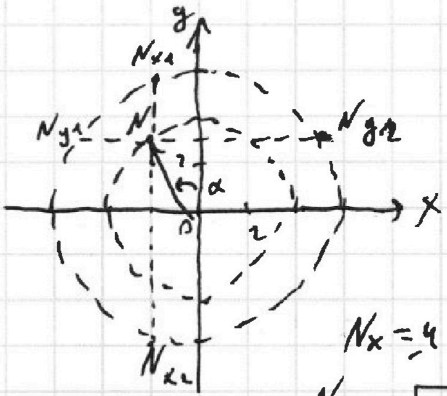
Задача N 6

$\begin{cases} x^2+y^2\le 36 \\ (x+4\sin\alpha)(y-4\cos\alpha)\le 0 \end{cases}$ ← уравнение круга с $R=6$

← если начало координат перенести из $0;0$ в $(-4\sin\alpha; 4\cos\alpha)$, то ~~обла~~ это области слева сверху и справа снизу

Преобразуем условие в график. точка стоит N

В зависимости от α точка N будет бегать по окружности $R=4$



$\varphi(\alpha) = NN_{x1}N_{y1} + NN_{y2}N_{x2}$

найдём координаты $N_{x1}; N_{x2}; N_{y1}; N_{y2}$ $(N_{x1}N_{x2}\perp OX; N_{y1}N_{y2}\perp OY)$

$N_x = -4\sin\alpha \Rightarrow N_{x1x} = N_{x2x} = N_x = -4\sin\alpha$

$N_{x1y} = \sqrt{36-16\sin^2\alpha} = -N_{x2y}$

$N_{y1y} = N_{y2y} = N_y = 4\cos\alpha \Rightarrow N_{y2x} = -N_{y1x} = \sqrt{36-16\cos^2\alpha}$

$M = N_{y1}N_{y2} + N_{x1}N_{x2} + N_{x1}N_{y1} + N_{y2}N_{x2} = 2\cdot\sqrt{36-16\sin^2\alpha} + 2\cdot\sqrt{36-16\cos^2\alpha} + N_{x1}N_{y1} + N_{x2}N_{y2} = 4\cdot 36 - 32(\cos^2\alpha+\sin^2\alpha) +$ осн. триг. тожд.

$+N_{x1}N_{y1} + N_{x2}N_{y2} = 4\cdot 2 \cdot 72 - 32 + N_{x1}N_{y1} + N_{x2}N_{y2} = 112 + N_{x1}N_{y1} + N_{x2}N_{y2}$ (получается, что максимум зависит только от дуг)

(сколько градусов содержит угол, опирающийся на них)

Найдём ~~угл~~ угловые размеры нужных дуг!

для $N_{x1}N_{y1}$: $\operatorname{tg}\varphi_{x1} = \frac{4\sin\alpha}{36-16\sin^2\alpha}$ (рассматриваем $\alpha\in[0;\frac{\pi}{2}]$, так как 2 максимума попарно будут симметрично относиться)

$\operatorname{tg}\varphi_{y1} = \frac{36-16\cos^2\alpha}{4\cos\alpha}$

$\operatorname{ctg}(\Delta\varphi) = \operatorname{tg}(\frac{\pi}{2}\varphi_{x1}+\varphi_{x2}) = \frac{\frac{4\cos\alpha}{36-16\cos^2\alpha}+\frac{4\sin\alpha}{36-16\sin^2\alpha}}{1-\frac{16\cos\alpha\sin\alpha}{(36-16\cos^2\alpha)(36-16\sin^2\alpha)}} =$

$= \frac{4(\cos\alpha(36-16\cos^2\alpha)+\sin\alpha(36-16\sin^2\alpha))}{36^2-16\cdot 36+16^2\cos^2\alpha\sin^2\alpha-16\cos\alpha\sin\alpha}$

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☒	☐

Задача №6 (продолжение)

Заметим, что для одной дуги выражение (для угла) выглядит как $\frac{\pi}{2} - \alpha - \beta$, а для другой дуги: $\frac{\pi}{2} + \alpha + \beta \Rightarrow$ сумма угловых размеров дуг всегда $\pi \Rightarrow$ ~~$P_{max} = 112 + \pi \cdot 6$ достигается при $\alpha \in [100; 400)$~~ $\Rightarrow N_{x_1}N_{y_1} + N_{x_2} + N_{y_2} = 6\pi$.

~~Ответ: $112 + \pi \cdot 6$~~ всегда!

Найдём максимум: $2\left(\sqrt{36 - 16\sin^2\alpha} + \sqrt{36 - 16\cos^2\alpha}\right) = \gamma$

$$\gamma' = 0: \quad 0 = \frac{-32\sin\alpha\cos\alpha}{\sqrt{36 - 16\sin^2\alpha}} + \frac{32\cos\alpha\sin\alpha}{\sqrt{36 - 16\cos^2\alpha}} = 0$$

$$32\cos\alpha\sin\alpha\left(\frac{\sqrt{36 - 16\sin^2\alpha} - \sqrt{36 - 16\cos^2\alpha}}{\sqrt{\ldots}}\right) = 0$$

Поскольку:

$$\sqrt{36 - 16\sin^2\alpha} = \sqrt{36 - 16\cos^2\alpha}$$

$$-16\sin^2\alpha = -16\cos^2\alpha \qquad \sin^2\alpha = \cos^2\alpha$$

$$\operatorname{tg}^2\alpha = 1 \Rightarrow \operatorname{tg}\alpha = \left[\begin{array}{l} 1 \\ -1 \end{array}\right.$$

при $\alpha = 0 + \frac{\pi}{2}n \quad n \in \mathbb{Z}$: $\quad \gamma = 2(6 + \sqrt{20})$

при $\alpha = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{2}n \quad n \in \mathbb{Z}$: $\quad \gamma = 2\left(\sqrt{36 - 8} + \sqrt{36 - 8}\right) = 4\sqrt{28} = 8\sqrt{7}$

$\sqrt{7} \approx 2{,}5 \quad 8 \cdot 2{,}5 = 4 \cdot 5 = 20$

$\sqrt{20} \leq 4{,}5$

Ответ: $6\pi + 8\sqrt{7}$ при $\alpha = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{2}n \quad n \in \mathbb{Z}$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☒

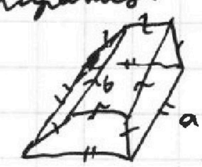
СТРАНИЦА 1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. **Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно.** Порча QR-кода недопустима!

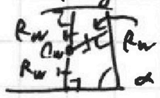
Задача №7

Из-за симметрии можно сказать, что

усечённая пирамида



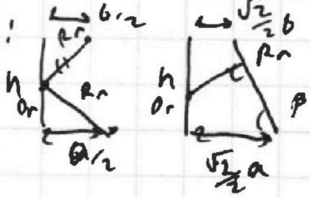
Условия для касания w:
равноудален от верхней и нижней
и от боковой! (и у шара радиус R_w) и центр на оси центра пирамиды



то есть высота пирамиды равна $2R_w = h$ α - искомый угол наклона

Условие для касания ребер (Ω): центр шара на оси пирамиды (пусть R_r - радиус)

⊥ сторона нижнего основания a, ⊥ основание верхнего основания b:



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐

СТРАНИЦА __ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. **Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно.** Порча QR-кода недопустима!

N1

A: 1111 ... 9999

B: 7... ; ...7.. ; ...7

C: 11 12... ; 21; 31 ...

$9999 = 9 \cdot 1111$

$1111 = 11 \cdot 101$

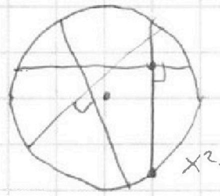
$B = 101 \cdot 7 = 707$

$7 \cdot 11 \cdot 101$

7 — $7 \cdot 101$

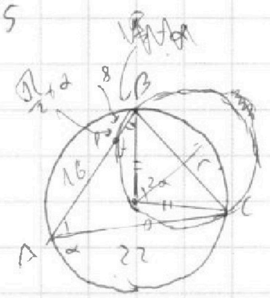
$\alpha = 11$

$\Delta x_1 \Delta x_2 = \Delta y_1 \Delta y_2$



$x^2 + y^2 = 36 = 6^2$

N5



$\frac{BC}{\sin\alpha} = 2R$

$\frac{BC}{2} = R\sin\alpha$

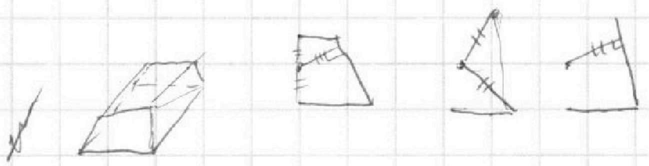
$\frac{BC}{\sin 2\alpha} = 2r$

$\frac{R}{\sin(\frac{\pi}{2}+\alpha)} = 2r$

$\frac{R\sin\alpha}{\sin 2\alpha} = r = \frac{R}{2\sin(\frac{\pi}{2}+\alpha)}$

$2\sin(\frac{\pi}{2}+\alpha) = 2\cos\alpha \quad \sin(\frac{\pi}{2}+\alpha) = \cos\alpha = \sin(\frac{\pi}{2}-\alpha)$

$6 \cdot 16 = 96$



$49 \cdot 7 = 280 + 63 = 343$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА __ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. **Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно.** Порча QR-кода недопустима!

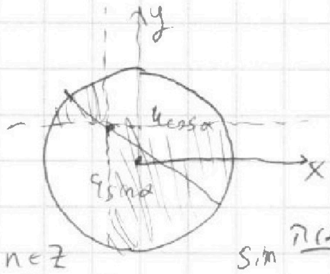
$\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2} - \pi y\right) = \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2}(x-y)\right)$

$\operatorname{ctg}\pi y = \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2}(x-y)\right)$

$\operatorname{tg}\frac{\pi}{2}(x-y)\operatorname{tg}\pi y = 1$

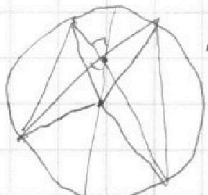
$\operatorname{ctg}\gamma = \frac{\cos\gamma}{\sin\gamma} = \frac{\sin(90-\gamma)}{\cos(90-\gamma)} = \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2}-\gamma\right)$

$xy \geq 0 \Rightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases}x \geq 0\\ y \geq 0\end{cases}\\ \begin{cases}x \leq 0\\ y \leq 0\end{cases}\end{array}\right.$



$\frac{\pi}{2} - \pi y = \frac{\pi}{2}(x-y) + \pi n$

$n \in Z$



$1-2y = x-y+2n$

$x+y = 1-2n$

$\sin\frac{\pi(x-y)}{2}\cos\left(\frac{\pi}{2}(x+y)\right)\sin\pi y = \cos\pi y \; \frac{\cos\left(\frac{\pi}{2}(x+y)\right)}{\cos\left(\frac{\pi}{2}(x-y)\right)}$

$\sin\alpha + \sin\beta = 2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}$

$\cos\alpha + \cos\beta = 2\cos\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)\cos\left(\frac{\beta-\alpha}{2}\right)$

$\arccos\alpha = \frac{\pi}{2} - \arcsin\alpha$

$\sin 90^\circ - \sin 30^\circ = 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}$

$\cos 90^\circ + \cos 30^\circ = 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}$

$\sqrt{3}$

$1 \quad \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}$

$\sin 60^\circ + \sin 60^\circ = 2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot 1$

$\sqrt{3}$

$-\arcsin\frac{x}{7} + \arcsin\frac{y}{4} > \frac{\pi}{2}$ $\quad \arcsin t \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$

$x+y = 1-2n \quad \cos 60^\circ + \cos 60^\circ = 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot 1 = 1$

$C_8^1 = \frac{8!}{1!\,7!} \qquad C_8^2 = \frac{8!}{2!\,6!} = \frac{7 \cdot 8}{2}$

$11\frac{C_{n-2}^2}{C_n^4} = \frac{C_{n-2}^{x-2}}{C_n^x}$ $\qquad C_a^b = \frac{a!}{b!(a-b)!}$

C: 11 12 ... 19

21 31 ... 91

$\frac{\frac{11 \cdot \cancel{(n-2)!}}{2 \cdot \cancel{(n-4)!}}}{\frac{n!}{4!\,\cancel{(n-4)!}}} = \frac{\frac{\cancel{(n-2)!}}{(x-2)!\,\cancel{(n-x)!}}}{\frac{n!}{x!\,\cancel{(n-x)!}}}$

$x \cdot (x-1) = 12 \cdot 11$

$x^2 - x - 132 = 0$

$x_1 = -11$

$x_2 = 12$

0 1
1 2
2

01
02
11
12
21
22

N2

$\frac{x+y+3}{xy} = k = \frac{x+y+3}{(x-4)(y+4)}$ $\qquad xy - 4y + 4x - 16 = xy$

$4y = 4x - 16 \qquad y = x - 4$

$M = x^3 - y^3 - 12xy = (x-y)(x^2+y^2+xy) - 12xy = 4(x^2+y^2+xy) - 12xy$

$4x^2 - 8xy + 4y^2 = 4(x^2 - 2xy + y^2) = 4(x-y)^2 = 4 \cdot 4^2 = \underline{\underline{64}}$