



МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

11 КЛАСС. Вариант 4



1. [3 балла] Найдите все тройки натуральных чисел $(A; B; C)$ такие, что:
- A — четырёхзначное число, составленное из одинаковых цифр,
 - B — трёхзначное число, хотя бы одна из цифр которого равна 7,
 - C — двузначное число, хотя бы одна из цифр которого равна 1,
 - произведение $A \cdot B \cdot C$ является квадратом некоторого натурального числа.
2. [3 балла] Положительные числа x и y таковы, что значение выражения $K = \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{3}{xy}$ не изменяется, если x уменьшить на 4, а y — увеличить на 4. Найдите все возможные значения выражения $M = x^3 - y^3 - 12xy$.
3. [5 баллов] а) Найдите все пары действительных чисел $(x; y)$ такие, что $(\sin \pi y - \sin \pi x) \sin \pi y = (\cos \pi y + \cos \pi x) \cos \pi y$.
- б) Сколько пар целых чисел (x, y) удовлетворяют одновременно этому уравнению и неравенству

$$\arccos \frac{x}{7} - \arcsin \frac{y}{4} > -\frac{\pi}{2}?$$

4. [4 балла] В начале месяца было выделено 4 билета на праздничный концерт, которые планировалось случайным образом распределить между одиннадцатиклассниками. В конце месяца выяснилось, что будет выделено больше 4 билетов. Одиннадцатиклассники Петя и Вася вычислили, что вероятность им обоим вместе попасть на концерт в начале месяца была в 11 раз меньше, чем оказалась в конце месяца. Сколько всего было выделено билетов на концерт в конце месяца, если количество одиннадцатиклассников не изменилось?
5. [5 баллов] Точка O — центр окружности ω_1 , описанной около остроугольного треугольника ABC . Окружность ω_2 , описанная около треугольника BOC , пересекает отрезок AB в точке P . Найдите площадь треугольника ABC , если $AP = 16$, $BP = 8$, $AC = 22$.
6. [6 баллов] На координатной плоскости изображена фигура $\Phi(\alpha)$, состоящая из всех точек, координаты $(x; y)$ которых удовлетворяют системе неравенств

$$\begin{cases} (x + 4 \sin \alpha)(y - 4 \cos \alpha) \leq 0, \\ x^2 + y^2 \leq 36. \end{cases}$$

Найдите максимальное значение M периметра (длины границы) фигуры $\Phi(\alpha)$ и укажите все значения α , при которых оно достигается.

7. [6 баллов] Шар Ω касается всех рёбер правильной усечённой пирамиды, а шар ω касается всех её граней. Найдите угол наклона боковой грани пирамиды к плоскости её основания.



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☒ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА
1 из 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

~1

$A = \overline{aaaa} = a + 10a + 100a + 1000a = 1111a$, где a - цифра (отл. от 0)

1) $B = \overline{7bc} = 700 + 10b + c$

$$1111a \cdot (700 + 10b + c) \cdot c = t^2, t \in \mathbb{N}$$

$$1111 = 11 \cdot 101$$

$11 \cdot 101 \cdot a \cdot (700 + 10b + c) \cdot c = t^2$, $t^2 : 101$; Раз 101 - простое, то $t^2 : 101^2$. a - это цифра, а c - двузначное, значит на 101 также делится $B = 700 + 10b + c$. $700 < B < 800$ и делится на 101, значит $B = 707$, то есть $b = 0$, $c = 7$.
Имеем уравнение: $11 \cdot 101 \cdot 707 \cdot a \cdot c = t^2$. Аналогично из делимости $t^2 : 11 \Rightarrow t^2 : 11^2$ (11 - простое), значит a или c делится на 11, но a цифра, тогда именно c делится на 11, но по условию c также содержит 1 в разряде значит $c = 11$. $11^2 \cdot 101^2 \cdot 7 \cdot a = t^2$. $t^2 : 7 \Rightarrow t^2 : 49$, значит $a : 7$, но a цифра, значит $a = 7$.
Итого имеем $A = 7777$; $B = 707$; $C = 11$.

2) B имеет 7 второй или третьей цифрой.

Аналогично пункту 1 найдем, что $B : 101$.

2.1) $B = \overline{b7c} = 100b + 70 + c$. $100b + 70 + c \equiv 70 - b + c \pmod{101}$
 $B : 101 \Leftrightarrow 70 - b + c : 101$, но $70 - b + c < 80$, значит и делится на 101 не может быть

2.2) $B = \overline{bc7}$ среди 3-х чисел, к-рые дел. на 101, нам подходит лишь 707, значит $B = 707$ и аналогичным с 1) рассуждениями найдем ту же тройку.

Ответ: $(7777; 707; 11)$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☒ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА
1 из 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$x, y > 0; K = \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{3}{xy}; K = \frac{1}{x-4} + \frac{1}{y+4} + \frac{3}{(x-4)(y+4)}$$

Найти: $x^3 - y^3 - 12xy$ $K = \frac{x+y+3}{xy} = \frac{x+y}{xy} + \frac{3}{xy}$
 $x \neq 4$, т.к. $x-4$ в знаменателе

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{3}{xy} = \frac{1}{x-4} + \frac{1}{y+4} + \frac{3}{(x-4)(y+4)}$$

$$\frac{1}{x-4} - \frac{1}{x} + \frac{1}{y+4} - \frac{1}{y} + \frac{3}{(x-4)(y+4)} - \frac{3}{xy} = 0$$

$$\frac{4}{(x-4)x} - \frac{4}{(y+4)y} + 3 \left(\frac{xy - (xy - 4y + 4x - 16)}{(x-4)(y+4)xy} \right) = 0$$

$$\frac{4}{(x-4)x} - \frac{4}{(y+4)y} + 3 \cdot \frac{4(y-x+4)}{(x-4)(y+4)xy} = 0 \quad | : 4$$

$$\frac{1}{(x-4)x} - \frac{1}{(y+4)y} + 3 \cdot \frac{y-x+4}{(x-4)(y+4)xy} = 0 \quad *$$

$y \neq -4$, т.к. $y > 0$, а также $x \neq 4$, так как $x-4$ в знаменателе
 $x \neq 0$
 $y \neq 0$

значит можно домножить уравнение * на $(x-4)(y+4)yx$:

$$y(y+4) - x(x-4) + 3(y-x+4) = 0$$

$$y^2 + 4y - x^2 + 4x + 3y - 3x + 12 = 0$$

$$K = \frac{x+y+3}{xy}; K = \frac{x-4+y+4+3}{(x-4)(y+4)} = \frac{x+y+3}{(x-4)(y+4)}$$

$$\frac{x+y+3}{xy} = \frac{x+y+3}{(x-4)(y+4)}, \text{ т.к. } x \neq 4 \text{ и } x, y > 0: (x-4)(y+4) = xy$$

$$xy = xy - 4y + 4x - 16; \cancel{xy} - 4y + 4x - 16 = 0; \cancel{xy} - 4y + 4x = 16; \boxed{y = x - 4}$$

нужно найти: $x^3 - y^3 - 12xy = (x-y)(x^2 + xy + y^2) - 12xy =$
 $= 4(x^2 + xy + y^2 - 3xy) = 4(x-y)^2 = 4 \cdot 4^2 = 64. \text{ Ответ: } 64.$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☒ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА

1 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

№ 3

$$a) (\sin \pi y - \sin \pi x) \sin \pi y = (\cos \pi y + \cos \pi x) \cos \pi y$$

Формулы: $\sin \alpha + \sin \beta = 2 \sin \left(\frac{\alpha + \beta}{2} \right) \cos \left(\frac{\alpha - \beta}{2} \right)$
 $\sin \alpha - \sin \beta = \sin \alpha + \sin(-\beta) = 2 \sin \left(\frac{\alpha - \beta}{2} \right) \cos \left(\frac{\alpha + \beta}{2} \right)$

$$\cos \alpha + \cos \beta = \sin \left(\frac{\pi}{2} - \alpha \right) + \sin \left(\frac{\pi}{2} - \beta \right) =$$

$$= 2 \sin \left(\frac{\frac{\pi}{2} - \alpha - \beta}{2} \right) \cos \left(\frac{\beta - \alpha}{2} \right) = \cancel{2} 2 \cos \left(\frac{\alpha + \beta}{2} \right) \cos \left(\frac{\alpha - \beta}{2} \right)$$

То формулам уравнение равносильно:

$$2 \sin \left(\frac{\pi y - \pi x}{2} \right) \cos \left(\frac{\pi y + \pi x}{2} \right) \sin \pi y = 2 \cos \left(\frac{\pi y + \pi x}{2} \right) \cos \left(\frac{\pi y - \pi x}{2} \right) \cdot \cos \pi y$$

$$\cos \left(\frac{\pi y + \pi x}{2} \right) \cdot \left(\sin \left(\frac{\pi y - \pi x}{2} \right) \sin \pi y - \cos \left(\frac{\pi y - \pi x}{2} \right) \cos \pi y \right) = 0 \quad | \cdot 2$$

$$\cos \left(\frac{\pi y + \pi x}{2} \right) \left(2 \sin \left(\frac{\pi y - \pi x}{2} \right) \sin \pi y - 2 \cos \left(\frac{\pi y - \pi x}{2} \right) \cos \pi y \right) = 0$$

Ещё формулы: $2 \sin \alpha \sin \beta = \cos(\alpha - \beta) - \cos(\alpha + \beta)$
 $2 \cos \alpha \cos \beta = \cos(\alpha + \beta) + \cos(\alpha - \beta)$

То формулам:

$$\cos \left(\frac{\pi y + \pi x}{2} \right) \left(\cos \left(\frac{\pi y - \pi x - 2\pi y}{2} \right) - \cos \left(\frac{\pi y - \pi x + 2\pi y}{2} \right) + \cos \left(\frac{\pi y - \pi x + 2\pi y}{2} \right) + \cos \left(\frac{\pi y - \pi x - 2\pi y}{2} \right) \right) = 0$$

$$\cos \left(\frac{\pi y + \pi x}{2} \right) \cdot 2 \cos \left(\frac{\pi x + \pi y}{2} \right) = 0; \quad \cos \left(\frac{\pi y + \pi x}{2} \right) = 0$$

$$\frac{\pi y + \pi x}{2} = \frac{\pi}{2} + \pi k, k \in \mathbb{Z}; \quad y + x = 1 + 2k, \text{ т.е. просто}$$

те пары чисел x и y , у которых сумма $x+y$ целая и нечётная. Ответ: $(x, y): x+y \in \mathbb{Z}, \text{ где } x \in \mathbb{Z}$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☒ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА
1 из 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Тутский билетов стало больше на x шт. в конце месяца, а одноклассников было и осталось n .
Посчитаем вероятность попадания на концерт Тети и Васи вместе в начале и в конце месяца.
Вариантов в распределить билеты в начале месяца:

C_n^4 ; Распределений, где билет достается и Васе и Тете стало, сколько выбрать из оставшихся $n-2$ одноклассников 2-х в пару к Тете и Васе, то есть C_{n-2}^2 . Тогда вероятность того, что и Вася и Тетя получат билет в нач. мес. — это отношение кол-ва распределений, то есть

$\frac{C_{n-2}^2}{C_n^4}$, аналогично в конце месяца вероятность оказалась равной $\frac{C_{n-2}^{2+x}}{C_n^{x+4}}$.

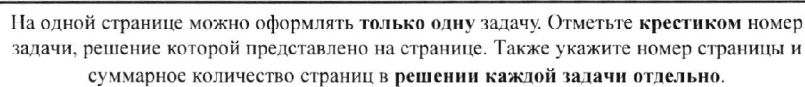
По условию: $\frac{C_{n-2}^{x+2}}{C_n^{x+4}} : \frac{C_{n-2}^2}{C_n^4} = 11$; $\frac{C_{n-2}^{x+2}}{C_n^{x+4}} \cdot \frac{C_n^4}{C_{n-2}^2} = 11$

$$C_m^k = \frac{m!}{k!(m-k)!};$$

$$\frac{(n-2)!}{(x+2)!(n-x-4)!} \cdot \frac{n!}{4!(n-2)!} = 11$$

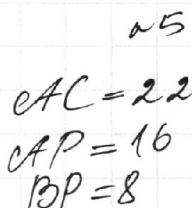
$$\frac{(n-2)!(x+4)!}{(x+2)!n!} \cdot \frac{n! \cdot 2!}{4! \cdot (n-2)!} = 11; \frac{(x+4)(x+3)}{12} = 11; (x+4)(x+3) = 12$$

Поскольку вероятность изменилась, то x — это натуральное число, как минимум 1. Ясно, что CF — е имеет корень $x=8$, а также наглядность $(x+3)(x+4)$ при $x \in \mathbb{N}$ монотонно возрастает, значит др. решений нет. Ответ: 12.



СТРАНИЦА
1 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



Найти: $\int_1^2 ABC$.

Решение: Туская $\omega_2 \angle A C = \alpha$. Раз $B P Q C$ вписан,
 $\angle C B P = 180^\circ - \angle P Q C = \angle C P Q C A Q P$.

Рассмотрим $\triangle APQ$ и $\triangle ABC$:

- 1) $\angle ABC = \angle AQP$ (по доказанному выше)
- 2) $\angle BAC$ - общий угол

$$\triangle APQ \sim \triangle ABC \text{ (по двум углам)}$$

$$\frac{AP}{AC} = \frac{AQ}{AB}; \frac{16}{22} = \frac{AQ}{24} \Rightarrow AQ = \frac{8 \cdot 24}{11} = \frac{192}{11}$$

$$QC = AC - AQ = 22 - \frac{192}{11} = \frac{242 - 192}{11} = \frac{50}{11}$$

Туская см - середина ВС, тогда AM и BC перпендикулярны. O_1 - центр $е_2$. - лежит на прямой AM!

R - радиус ω_1 . BC - радикальная ось окружностей ω_1 и ω_2 , значит степени точки относительно ω_1 и ω_2 равны. $AM^2 - R^2 = 0, CM^2 - O\omega_1^2$

$$OQ^2 = O_1M^2 + R^2 - OM^2$$

Потому как $PQBC$ вписанный, PQ антипараллельна BC ,
значит $CAO \perp PQ$. $\angle BOC = 2\angle BAC$, так как $\angle BOC$
вписанный, а $\angle BAC$ центральный. В $\triangle BOC$
 BM — медиана, значит $\angle MOC = \alpha$; $\Rightarrow \angle OCB = 90^\circ - \alpha$;
где $\alpha = \angle CAB$.



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

☐☐☐☐☒☐☐

СТРАНИЦА
2 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются **отдельно**. Порча QR-кода недопустима!

$$\frac{BC}{\sin \alpha} = 2R \text{ (по т. Синусов)}; \frac{BO}{\sin \angle OCB} = 00, \text{ (по т. Синусов для } \triangle OBC)$$

$$BO = R; \frac{R}{\sin(90^\circ - \alpha)} = R \cos \alpha; R = R \cos \alpha \cos \alpha$$

$$\frac{BC}{\sin \angle BOC} = \frac{2R \cos \alpha}{\sin \angle BOC}$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1
☐

2
☐

3
☐

4
☐

5
☐

6
☒

7
☐

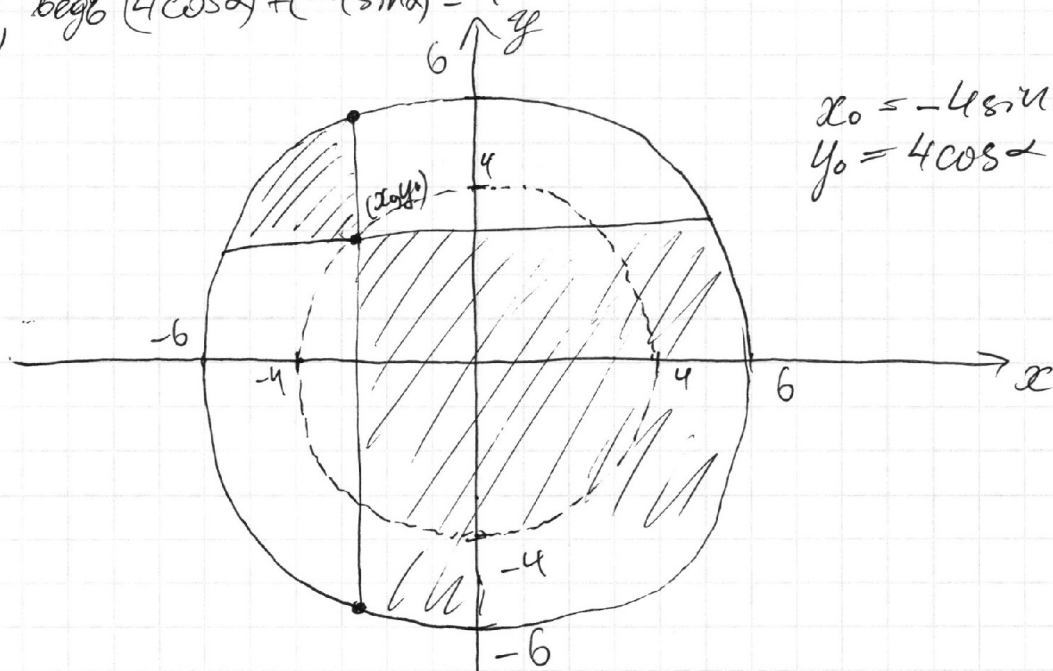
СТРАНИЦА
1 из 3

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\begin{cases} (x+4\sin\alpha)(y-4\cos\alpha) \leq 0 \\ x^2+y^2 \leq 36 \end{cases}$$

второе нер-во задаёт круг на плоскости радиуса 6 с центром в точке $(0;0)$

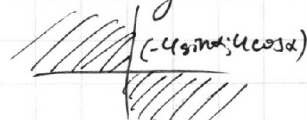
1-ое нер-во задаёт две части плоскости, заключённые между прямыми, пересечение к-рых определяется по окружности с центром в точке $(0;0)$ радиуса 4, ведь $(4\cos\alpha)^2 + (-4\sin\alpha)^2 = 16$



$$\begin{aligned} x_0 &= -4\sin\alpha \\ y_0 &= 4\cos\alpha \end{aligned}$$

$$(x+4\sin\alpha)(y-4\cos\alpha) \leq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x \leq -4\sin\alpha \\ y \geq 4\cos\alpha \\ y \leq 4\cos\alpha \\ x \geq -4\sin\alpha \end{cases}$$

условный вид ин-ва:



наша фигура представляет собой некоторые 2 сектора, тогда её периметр состоит из двух дуг и двух отрезков, которые являются хордами окружности $(0;0)$ радиуса 6. Таким образом, периметр нашей фигуры будет найден -



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7
☐ ☐ ☐ ☐ ☐ ☒ ☐

СТРАНИЦА
 2 из 3

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

ишем тогда, когда сумма этих отрезков будет наибольшей, ведь прямые перпендикулярны и суммарная длина дуг всегда будет оставаться равной 180° а значит и ~~их длина~~ суммарная длина всегда будет равна половине длины ок-ты радиуса 6 , то есть $\frac{2\pi \cdot 6}{2} = 6\pi$. Отнайдем координаты отрезка,

получаемого, как внутренняя часть (внутри) прямой $x = -4\sin\alpha$. Решим систему:

$$\begin{cases} x = -4\sin\alpha \\ x^2 + y^2 = 36 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = -4\sin\alpha \\ y = \pm \sqrt{36 - 16\sin^2\alpha} \end{cases}$$

Величина отрезка будет равна модулю разности координат по y , а именно $2\sqrt{36 - 16\sin^2\alpha}$

Аналогично величина отрезка, полученного, как внутр. часть (внутри) прямой $y = 4\cos\alpha$, равна $2\sqrt{36 - 16\cos^2\alpha}$.

P - периметр. нашей фигуры.

$$P(\alpha) = 2\sqrt{36 - 16\cos^2\alpha} + 2\sqrt{36 - 16\sin^2\alpha} + 6\pi \rightarrow \max$$

$$\cos^2\alpha = 1 - \sin^2\alpha; 36 - 16\cos^2\alpha = 36 - (16 - 16\sin^2\alpha) = 20 + 16\sin^2\alpha$$

$$P(\alpha) = 2\sqrt{20 + 16\sin^2\alpha} + 2\sqrt{36 - 16\sin^2\alpha} + 6\pi$$

Замена $16\sin^2\alpha = t$

$$P(\alpha) = cl(t) = 2\sqrt{20+t} + 2\sqrt{36-t} + 6\pi \rightarrow \max$$

$$cl'(t) = 2 \cdot \frac{1}{2} \frac{1}{\sqrt{20+t}} - 2 \cdot \frac{1}{2} \frac{1}{\sqrt{36-t}} = \frac{\sqrt{36-t} - \sqrt{20+t}}{\sqrt{20+t}\sqrt{36-t}}$$



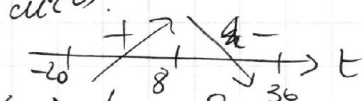
На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1
☐2
☐3
☐4
☐5
☐6
☒7
☐СТРАНИЦА
3 из 3

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$C'(t) = 0: \sqrt{36-t} = \sqrt{20+t}; \quad 36-t = 20+t$$

(подкоренные выражения определены, ведь $t \geq 0$ и $t \leq 16$)



$36-t = 20+t \Leftrightarrow t = 8$ Таким образом при $t=8$ периметр нашей фигуры максимален и равен $C(8) = 2\sqrt{28} + 2\sqrt{28} + 6\pi$

$C(8) = 4\sqrt{28} + 6\pi$. Данный периметр достигается при α : $(6 \sin^2 \alpha = 8; \sin^2 \alpha = \frac{4}{3};$

$\sin \alpha = \pm \frac{\sqrt{2}}{2}$, значит $\alpha = \pm \frac{\pi}{4} + \pi k$, где $k \in \mathbb{Z}$

или же просто $\alpha = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi n}{2}$, где $n \in \mathbb{Z}$.

Ответ: $C = 4\sqrt{28} + 6\pi$; $\alpha = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi n}{2}, n \in \mathbb{Z}$.