МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

11 КЛАСС. Вариант 2

1. [3 балла] Найдите все тройки натуральных чисел $(A; B; C)$ такие, что:
   - A — четырёхзначное число, составленное из одинаковых цифр,
   - B — трёхзначное число, хотя бы одна из цифр которого равна 1,
   - C — двузначное число, хотя бы одна из цифр которого равна 5,
   - произведение $A \cdot B \cdot C$ является квадратом некоторого натурального числа.
2. [3 балла] Положительные числа x и y таковы, что значение выражения $K = \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{xy}$ не изменяется, если x уменьшить на 3, а y — увеличить на 3. Найдите все возможные значения выражения $M = x^3 - y^3 - 9xy$.
3. [5 баллов] а) Найдите все пары действительных чисел $(x; y)$ такие, что $(\sin \pi x - \sin \pi y) \sin \pi x =$ $= (\cos \pi x + \cos \pi y) \cos \pi x$.

   б) Сколько пар целых чисел (x, y) удовлетворяют одновременно этому уравнению и неравенству
   $$\arccos \frac{x}{4} + \arccos \frac{y}{9} < 2\pi?$$
4. [4 балла] В начале месяца было выделено 4 билета на праздничный концерт, которые планировалось случайным образом распределить между одиннадцатиклассниками. В конце месяца выяснилось, что будет выделено больше 4 билетов. Одиннадцатиклассники Петя и Вася вычислили, что вероятность им обоим вместе попасть на концерт в начале месяца была в 3,5 раза меньше, чем оказалась в конце месяца. Сколько всего было выделено билетов на концерт в конце месяца, если количество одиннадцатиклассников не изменилось?
5. [5 баллов] Точка O — центр окружности ω_1, описанной около остроугольного треугольника ABC. Окружность ω_2, описанная около треугольника BOC, пересекает отрезок AB в точке P. Найдите площадь треугольника ABC, если $AP = \frac{16}{5}$, $BP = 2$, $AC = 4$.
6. [6 баллов] На координатной плоскости изображена фигура $\Phi(\alpha)$, состоящая из всех точек, координаты $(x; y)$ которых удовлетворяют системе неравенств
   $$\begin{cases} (x - 2\cos\alpha)(y - 2\sin\alpha) \geqslant 0, \\ x^2 + y^2 \leqslant 9. \end{cases}$$
   Найдите максимальное значение M периметра (длины границы) фигуры $\Phi(\alpha)$ и укажите все значения α, при которых оно достигается.
7. [6 баллов] Шар Ω касается всех рёбер правильной усечённой пирамиды, а шар ω касается всех её граней. Найдите угол наклона бокового ребра пирамиды к плоскости её основания.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

1 ☒ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА 1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. **Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно.** Порча QR-кода недопустима!

№1.

Пусть A это ~~...~~ $\overline{aaaa}$, где a - какая-то цифра отличное от 0, тогда $A = a \cdot 1111 = a \cdot 11 \cdot 101$.

Т.к. $A \cdot B \cdot C = n^2$, где $n \in \mathbb{N}$, то степень вхождения каждого делителя в произведение $A \cdot B \cdot C$ чётна, а т.к. 101 — простое число, то $B \cdot C$ делится на 101. C - двузначное число $\Rightarrow 101 > C > 0$ и $B > 0$

Значит $C \not\vdots\, 101 \Rightarrow B \,\vdots\, 101$. ~~Все~~ Все трёхзначные числа, делящиеся на 101: 101, 202, 303, 404, 505, 606, 707, 808, 909 Среди них только одно число содержит 1. Это число 101. Значит $B = 101$, Т.к. $a < 11$, а в произведении $A \cdot B \cdot C$ 11 входит в чётной степени и 11 - простое число, то $B \cdot C \,\vdots\, 11$, но $B = 101$, а $101 \not\vdots\, 11$, значит $C \,\vdots\, 11$. $C > 0$

Двузначное число делящееся на 11 и содержащее 5 ровно одно. Это число 55. $\Rightarrow C = 55$. Подставим значения A, B и C в произведение $A \cdot B \cdot C$. $A \cdot B \cdot C = a \cdot 11 \cdot 101 \cdot 101 \cdot 5 \cdot 11 = n^2$. Чтобы произведение было квадратом 5 должно входить в это произведение в чётной степени, 5 - простое число. ~~Зна~~ 11 и 101 взаимнопросты с 5. Значит на 5 может делиться только a, но a может принимать значения из $\{1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8; 9\}$. Только одно значение делится на 5. $\Rightarrow a = 5$. Значит $A = 5555$, $B = 101$, $C = 55$

Ответ: $(5555; 101; 55)$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно.**

1 ☐ 2 ☒ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА 1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. **Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно.** Порча QR-кода недопустима!

№2.

$K = \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{xy}$ (1). По условию ~~з~~ сказано, что если x уменьшить на 3, а y – увеличить на 3, то значение выражения не изменится.

Значит $K = \frac{1}{x-3} + \frac{1}{y+3} + \frac{1}{(x-3)(y+3)}$. (2) Т.к. ~~выра~~ значения выражений (1) и (2) равны, то приравняем эти выражения. Получим:

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{xy} = \frac{1}{x-3} + \frac{1}{y+3} + \frac{1}{(x-3)(y+3)} \Leftrightarrow \frac{y+x+1}{xy} = \frac{y+3+x-3+1}{(x-3)(y+3)} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (y+x+1)\left(\frac{1}{xy} - \frac{1}{(x-3)(y+3)}\right) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} y+x+1=0 \\ (x-3)(y+3)-xy=0 \end{array}\right. \\ xy \neq 0 \\ (x-3)(y-3) \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} y=-x-1 \\ y=x-3 \end{array}\right. \\ x \neq 0 \\ y \neq 0 \\ (x-3)(y-3) \neq 0 \end{cases}$$

~~Подставим в выражение $M = x^3 - y^3 - 9xy$ значение $y = -x-1$.~~

~~$M = x^3 - (-x-1)^3 - 9x(-x-1) = x^3 + (x+1)^3 + 9x(x+1) = 2x^3 + 3x^2 + 3x + 1 + 9x^2 + 9x = 2x^3 + 12x^2 + 12x + 1$~~

Т.к. $x>0$ и $y>0$ по условию, то $y=-x-1$ не может быть. ~~поло~~ потому что, если $x>0$, то $-x<0$, $-x-1<-1$, то есть $y<-1$, но $y>0$ по условию. Значит подходит только $y=x-3$. Подставим в выражение $M = x^3 - y^3 - 9xy$ значение ~~x~~ $y = x-3$. Получим: $M = x^3 - (x-3)^3 - 9x(x-3) = x^3 - x^3 + 9x^2 - 27x + 81 - 9x^2 + 27x = 81$. Значит M может принимать значение 81

Ответ: 81.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно.**

1 ☐ 2 ☐ 3 ☒ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА 1 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. **Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно.** Порча QR-кода недопустима!

№3. а)

$$\sin \pi x - \sin \pi y = 2\sin\frac{\pi(x-y)}{2}\cdot\cos\frac{\pi(x+y)}{2}$$

$$\cos \pi x + \cos \pi y = 2\cos\frac{\pi(x+y)}{2}\cdot\cos\frac{\pi(x-y)}{2}$$

$$(\sin\pi x - \sin\pi y)\sin\pi x = (\cos\pi x + \cos\pi y)\cos\pi x \Leftrightarrow \sin\frac{\pi(x-y)}{2}\cdot\cos\frac{\pi(x+y)}{2}\cdot$$

$$\cdot\sin\pi x = \cos\frac{\pi(x+y)}{2}\cdot\cos\frac{\pi(x-y)}{2}\cdot\cos\pi x \Leftrightarrow \cos\frac{\pi(x+y)}{2}\left(\sin\frac{\pi(x-y)}{2}\cdot\sin\pi x -\right.$$

$$\left. -\cos\frac{\pi(x-y)}{2}\cdot\cos\pi x\right) = 0 \Leftrightarrow \cancel{\cos\frac{\pi(x+y)}{2}\cdot\Big(-}$$

$$\Leftrightarrow \cos\frac{\pi(x+y)}{2}\cdot\left(\frac{-\cos\left(\frac{\pi(x-y)}{2}+\pi x\right) + \cos\left(\frac{\pi(x-y)}{2}-\pi x\right) - \cos\left(\frac{\pi(x-y)}{2}+\pi x\right) - \cos\left(\frac{\pi(x-y)}{2}-\pi x\right)}{2}\right) = 0 \Leftrightarrow \cos\frac{\pi(x+y)}{2}\cdot$$

$$\cdot\cos\left(\frac{\pi(x-y)}{2}+\pi x\right) = 0 \Leftrightarrow$$

$$\cos\frac{\pi(x-y)}{2}\cdot\cos\pi x = \frac{1}{2}\left(\cos\left(\frac{\pi(x-y)}{2}+\pi x\right) + \cos\left(\frac{\pi(x-y)}{2}-\pi x\right)\right)$$

$$\sin\frac{\pi(x-y)}{2}\cdot\sin\pi x = -\frac{1}{2}\left(\cos\left(\frac{\pi(x-y)}{2}+\pi x\right) - \cos\left(\frac{\pi(x-y)}{2}-\pi x\right)\right)$$

$$\Leftrightarrow \cos\frac{\pi(x+y)}{2}\cdot\cos\frac{\pi(3x-y)}{2} = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\cos\frac{\pi(x+y)}{2} = 0\\ \cos\frac{\pi(3x-y)}{2} = 0\end{array}\right. \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\frac{\pi(x+y)}{2} = \frac{\pi}{2}+\pi k,\ k\in\mathbb{Z}\\ \frac{\pi(3x-y)}{2} = \frac{\pi}{2}+\pi n,\ n\in\mathbb{Z}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x+y = 1+2k,\ k\in\mathbb{Z}\\ 3x-y = 1+2n,\ n\in\mathbb{Z}\end{array}\right. \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{ll}4x = 2+2(k+n), & k,n\in\mathbb{Z}\\ x+y = 1+2k, & k\in\mathbb{Z}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{ll}x = \frac{1}{2}+\frac{k+n}{2}, & k,n\in\mathbb{Z}\\ y = \frac{1}{2}+\frac{5k-n}{2}, & k,n\in\mathbb{Z}\end{array}\right.$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☒	☐	☐	☐	☐

СТРАНИЦА 2 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. **Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно.** Порча QR-кода недопустима!

~~Т.к. $k\in\mathbb{Z}$ и $n\in\mathbb{Z}$, то $k+n\in\mathbb{Z}$, обозначим $k+n$ за m $(m=k+n)$, $\Rightarrow m\in\mathbb{Z}$. $5k-n\in\mathbb{Z}$, т.к. $5k\in\mathbb{Z}$ и $n\in\mathbb{Z}$ пусть $l=5k-n \Rightarrow l\in\mathbb{Z}$. Тогда $x=\frac{1}{2}+\frac{m}{2}$, $m\in\mathbb{Z}$~~

Ответ: $\left(\frac{1}{2}+\frac{k+n}{2};\ \frac{1}{2}+\frac{5k-n}{2}\right)$ $k,n\in\mathbb{Z}$.

б) $\arccos z\in[0;\pi]$, значит сумма двух ~~арк~~ arccos не превосходит 2π. Значит подходят все значения x и y подходящие по области определения, кроме того случая, когда два ~~а~~ арккосинуса равны по 1.

$-1\le\frac{x}{4}\le1 \Leftrightarrow -4\le\frac{1}{2}+\frac{k+n}{2}\le4 \Leftrightarrow -8\le1+k+n\le8 \Leftrightarrow -9\le k+n\le7.$ (1)

$-1\le\frac{y}{9}\le1 \Leftrightarrow -9\le\frac{1}{2}+\frac{5k-n}{2}\le9 \Leftrightarrow -18\le1+5k-n\le18 \Leftrightarrow -19\le5k-n\le17$ (2). Сложим двойное неравенство (1) и двойное неравенство (2). Получим

$-28\le6k\le24 \Leftrightarrow -4\frac{2}{3}\le k\le4$, т.к. $k\in\mathbb{Z}$, то k может принимать 9 различных значений $(-4;-3;-2;-1;0;1;2;3;4)$

~~$-9\le k+n\le7 \Leftrightarrow -35\le-5k-5n\le45$ (3). Теперь сложим двойные неравенства (2) и (3). Получим $-54\le-6n\le62 \Leftrightarrow -10\frac{1}{3}\le n\le9$. т.к. $n\in\mathbb{Z}$, то n может принимать 20 различных значений.~~ Проверим может ли одновременно выполняться $\frac{x}{4}=-1$ и $\frac{y}{9}=-1$

~~Сложим двойные неравенства ... Получим ...~~

~~Т.к. k и n независимые целые числа, то $k\le3$ т.к. $k\le4$, а $k+n\le7$ ... Следовательно ... Значит и то~~

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☒ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. **Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно.** Порча QR-кода недопустима!

№4.

Пусть одиннадцатиклассников — n человек, тогда кол-во способов ~~изначально~~ раздать 4 билета в начале месяца равно C_n^4, а кол-во способов раздать билеты в начале месяца так чтобы Пете и Васе поехали равно C_{n-2}^2, т.к. ~~из оставшихся~~ Пете и Васе мы билеты точно дадим, значит надо выбрать ещё двух людей из оставшихся.

Посчитаем вероятность того, что Петя и Вася получат билеты в начале месяца.

$$P_н = \frac{C_{n-2}^2}{C_n^4} = \frac{(n-2)\cdot(n-3)}{2} : \frac{n(n-1)(n-2)\cdot(n-3)}{4!} = \frac{12}{n(n-1)}$$

~~Когда б~~ Пусть билетов прибавилось на k к концу месяца, тогда вероятность того что Пете и Васе поедут на концерт в конце месяца равна

$$P_k = \frac{C_{n-2}^{2+k}}{C_n^{4+k}} = \frac{(n-2)\cdot(n-3)\cdot\ldots\cdot(n-3-k)}{(2+k)!} : \frac{n\cdot(n-1)\cdot(n-2)\cdot\ldots(n-3-k)}{(4+k)!} = \frac{(4+k)!}{(2+k)!\cdot n\cdot(n-1)} = \frac{(4+k)(3+k)}{n\cdot(n-1)}$$

по условию $P_н \cdot 3,5 = P_k$. Подставим вместо $P_н$ и P_k формулы, которые мы получили, Получим: $\frac{12}{n\cdot(n-1)}\cdot\frac{7}{2} = \frac{(4+k)(3+k)}{n\cdot(n-1)} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 42 = 12 + 7k + k^2 \Leftrightarrow k^2 + 7k - 30 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} k = 3 \\ k = -10 \text{ не подходит т.к. } k>0 \end{array}\right.$

Значит $k=3$. Значит кол-во билетов увеличили на 3. Значит в конце месяца было выделено $4+3=7$ билетов

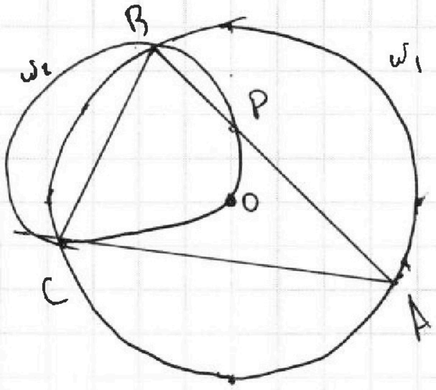
Ответ: 7 билетов.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно.**

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☒ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА 1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. **Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно.** Порча QR-кода недопустима!



№5.

Дано: $\triangle ABC$

~~AP~~ $P \in AB$, $AP = \frac{16}{5}$, $BP = 2$

$AC = 4$

Решение:

~~$\angle BO$~~ Пусть $\angle PAC = \alpha$, тогда $\angle BOC = 2\alpha$ как центральный, опирающийся на ту же дугу. По условию $P \in \omega_2$. Тогда $\angle BOC = \angle BPC$ как вписанные, опирающиеся на одинаковые дуги. ~~Рассмотрим~~ Тогда $\angle BPC = 2\alpha$. Рассмотрим $\triangle PCA$. Внешний $\angle BPC = 2\alpha = \angle PAC + \angle PCA$, но угол $PAC = \alpha \Rightarrow$

$2\alpha = \alpha + \angle PCA \Rightarrow \angle PCA = \alpha$. Тогда в $\triangle PCA$ $\angle PCA = \alpha = \angle PAC \Rightarrow$ значит $\triangle PAC$ р/б ($PC = PA$). PA по условию $\frac{16}{5}$, значит $PC = \frac{16}{5}$.

Запишем т. косинусов в $\triangle PCA$ для стороны PC:

$$PC^2 = PA^2 + AC^2 - 2 \cdot PA \cdot AC \cdot \cos\alpha$$

$$\left(\frac{16}{5}\right)^2 = \left(\frac{16}{5}\right)^2 + 16 - 2 \cdot \frac{16}{5} \cdot 4 \cdot \cos\alpha \Leftrightarrow -16 = -\frac{32 \cdot 4}{5}\cos\alpha$$

$$\Leftrightarrow \frac{5}{8} = \cos\alpha.$$

Теперь найдём $\sin\alpha$. Т.к. α - угол в $\triangle$, то $\sin\alpha > 0$.

$$\sin\alpha = \sqrt{1-\cos^2\alpha} \quad \sin\alpha = \sqrt{1 - \frac{25}{64}} = \frac{\sqrt{39}}{8}$$

~~Тог~~ Посчитаем S_{ABC} через две стороны и синус угла между ними

$$S_{ABC} = \frac{1}{2} \cdot AB \cdot AC \cdot \sin\alpha \qquad S_{ABC} = \frac{1}{2} \cdot \frac{26}{5} \cdot 4 \cdot \frac{\sqrt{39}}{8} = \frac{13\sqrt{39}}{10}$$

Ответ: $S_{ABC} = \frac{13\sqrt{39}}{10}$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц **в решении каждой задачи отдельно.**

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☒	☐

СТРАНИЦА 1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. **Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно.** Порча QR-кода недопустима!

№6.

$$\begin{cases}(x-2\cos\alpha)(y-2\sin\alpha)\geq 0\\ x^2+y^2\leq 9 \quad (1)\end{cases}$$

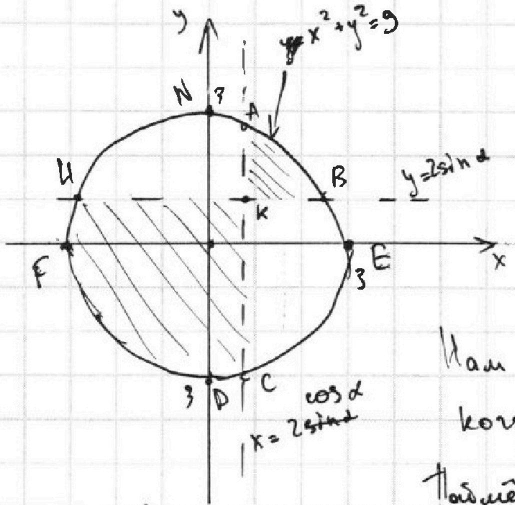
~~Ра~~ ~~В первом~~ Первое неравенство в системе верно, если обе скобки больше 0 или обе скобки меньше 0. ~~Рассмотрим~~

$$\left[\begin{array}{l}\begin{cases}x\geq 2\cos\alpha\\ y\geq 2\sin\alpha\\ x^2+y^2\leq 9\end{cases}\\ \begin{cases}x\leq 2\cos\alpha\\ x\leq 2\sin\alpha\\ x^2+y^2\leq 9\end{cases}\end{array}\right.$$

~~Из~~ x^2+y^2 — уравнение окружности

Т.к. α задано, то

~~x = 2cos~~ $2\cos\alpha$ это какая-то прямая



Нарисуем на координатной плоскости график $x^2+y^2=9$, ~~все что~~ все точки, находящиеся внутри него подходят по условию уравнения (1) в исходной системе

Нам подходят заштрихованные области, найдём когда периметр таких фигур будет максимальным.

Заметим, что при любом расположении прямых в периметр входит половина длины окружности. Обозначим точки как показано на рисунке. $AN=DC$ т.к $AC\parallel ND$. аналогично $BE=FH$. И получается, что $\breve{HC}+\breve{AB}=\breve{FD}+\breve{NE}$, а это ровно половина длины окружности, значит чтобы достичь максимального периметра нам надо сделать длину хорд как можно больше. Максимальный периметр будет при $\frac{\pi}{4}+\frac{\pi k}{4}$, $k\in Z$, в этом случае $M=\frac{1}{2}\cdot 2\cdot\pi\cdot 3+4\sqrt{7}=3\pi+4\sqrt{7}$.

~~максимальный~~

$x^2=4\cos^2\alpha$ $y^2=9-4\cos^2\alpha$, ~~y~~ $x^2=9-4\sin^2\alpha$ надо чтобы x и y одновременно отрезки были большими

$9-4+4\cos^2\alpha=5+4\cos^2\alpha$

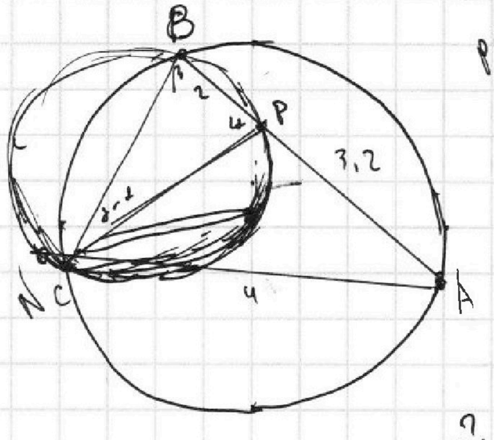
Ответ $3\pi+4\sqrt{7}$ при $\alpha=\frac{\pi}{4}+\frac{\pi k}{4}$, $k\in Z$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно.**

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА __ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. **Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно.** Порча QR-кода недопустима!



$pS \Rightarrow CP = PA$

$AP \cdot AB$

по внешнему углу

$AP = 3,2$

$\frac{4 \cdot 3,2 \cdot 5,2 \cdot 4}{8 \cdot 4} = AN$

$\frac{4 \cdot 26}{25} = \frac{104}{25} = 4\frac{4}{25} = 4,16$

$\cos\alpha$

$\sin\alpha - ?$ или $BC - ?$

$\frac{BC}{\sin\alpha}$

$x \geq 2\cos\alpha$

$x^2 \geq 4\cos\alpha$

$y^2 \geq 4\sin\alpha$

$\sqrt{2}$

$\sin\alpha = \sin(180° - \beta) - \gamma) =$

$\frac{\sin\beta}{\sin}$

$\frac{4}{\sin\beta} = \frac{5,2}{\sin\gamma}$

$4(\cos\alpha + \sin\alpha)$

$\sin 180° \cdot \cos(\beta+\gamma) - \sin(\beta+\gamma)$

$n = -9k$

$n + k = -9$

$\sin(180° - \beta) \cdot \cos\gamma - \sin\gamma \cdot \cos(180° - \beta)$

$\sin\beta \cdot \cos\gamma + \sin\gamma \cdot \cos\beta$

$\frac{\sin\gamma}{\sin\beta} = 1,3$

$\frac{BC}{\sin\alpha} = \frac{4}{\sin\beta}$

$\sin\beta \cdot \cos\gamma + 1,3\sin\beta \cdot \cos\beta$

$\sin\beta(\cos\gamma + 1,3\cos\beta)$

$\frac{CP}{\sin\beta} = \frac{BC}{\sin 2\alpha} = \frac{BC}{2\sin\alpha \cdot \cos\alpha} \Rightarrow CP = \frac{2}{\cos\alpha}$

$\frac{CP}{\sin\beta} = \frac{2}{\sin\beta \cdot \cos\alpha}$

$\frac{BC}{\sin\alpha}$

$CB^2 = 2R^2 - 2R^2 \cdot \cos 2\alpha$

$\frac{R}{\sin(90° - \alpha)} = 2 \frac{CP}{\sin\beta} = \frac{BC}{\sin 2\alpha}$

$\cos\alpha$

$\frac{CB}{\sin\alpha} = 2R$

$\frac{R}{\cos\alpha} = \frac{2}{\cos\alpha \cdot \sin\beta} \Rightarrow R = \frac{2}{\sin\beta}$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

1 ☒ 2 ☒ 3 ☒ 4 ☒ 5 ☒ 6 ☒ 7 ☒

СТРАНИЦА __ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. **Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно.** Порча QR-кода недопустима!

№4.

C_{n-2}^{2} — вероятность в начале месяца

$C_{11}^{4} = \frac{11\cdot10\cdot8\cdot8}{4\cdot3\cdot2}$

1, 5, 25

2, 4, 5, 8, 10, 16, 20

$\frac{3\cdot8}{2\cdot11\cdot10\cdot3} = \frac{8}{55}$

$\frac{8\cdot3}{55}\cdot\frac{7}{8} = \frac{21}{55}$ — в конце месяца

$\frac{C_{n}^{k}}{C_{11}^{2+k}} = \frac{21}{55}$

$-\frac{10}{4} - 10\frac{4}{10} + 25$

186 225 $4t(40t^2 - 41t)$

$32\cdot5 = 160$

$160t^3 - 164t^2 + 25 = 0$

$-\frac{10\cdot125}{16^2} - \frac{25\cdot164}{16^2}$

$-250 - 164$

$-314 \cdot 25$

$-\frac{1}{2}$

$\frac{164}{4} = 41$

вероятность в начале месяца

~~n учеников~~ в

n — одиннадцатиклассников

$\frac{C_{n-2}^{2}}{C_{n}^{4}}\cdot\frac{7}{2} = \frac{C_{n-2}^{2+k}}{C_{n}^{4+k}}$

$f'(x) = 160\cdot3t^2 - 164\cdot2t = 0$

$t = 0$ $(480t - 328)$ $\frac{41}{60}$

$\frac{328}{480} = \frac{164}{240}$

$\frac{(n-2)\cdot(n-3)}{2} : \frac{n\cdot(n-1)(n-2)\cdot(n-3)}{4\cdot3\cdot2\cdot1} = \frac{12}{n\cdot(n-1)}\cdot\frac{7}{2} = \frac{42}{n\cdot(n-1)}$

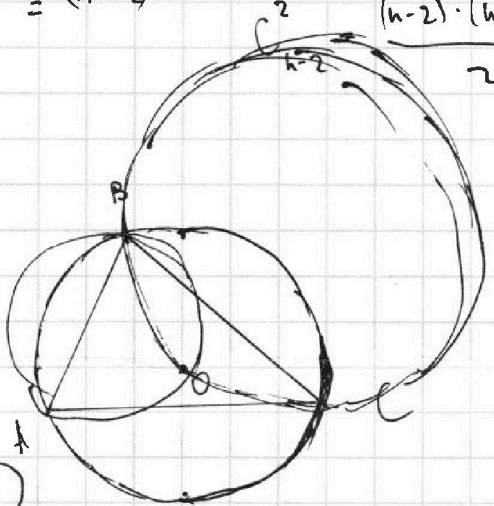
$C_{n-2}^{2+k} = (n-2)\cdot$

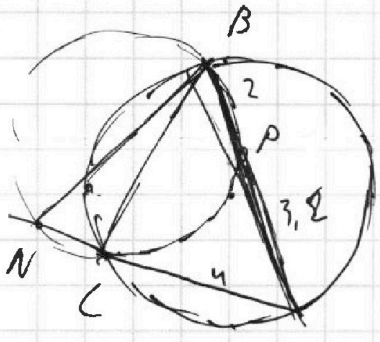
C_{n-2}^{2} $\frac{(n-2)\cdot(n-3)}{2}$

$k=1$ $\frac{\frac{n-4}{3}}{\frac{n-4}{5}} = \frac{5}{3}\cdot\frac{6}{4}\cdot\frac{7}{5}$

A 0 a

№5.





$CP = 2/$

$\frac{CP}{NB} = \frac{4}{5,2} = \frac{1}{1,3}$

$1,3 = NB\cdot\cos2$

$\frac{2}{\sin(\gamma-\alpha)} = \frac{BC}{\sin2\angle} = \frac{CP}{\sin\beta}$

$\frac{2}{\sin\gamma\cdot\cos\alpha - \sin\alpha\cdot\cos}$

$\frac{\sin\gamma}{NB}$

$\frac{NB}{\sin\gamma} = \frac{CP}{\sin\beta}$

?

$\frac{\sin\gamma}{\sin\beta} = 1,3$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

1 2 3 4 5 6 7 | СТРАНИЦА __ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. **Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно.** Порча QR-кода недопустима!

т. косинусов

$CP^2 = 3{,}2^2 + 4^2 - 2\cdot 3{,}2\cdot 4\cdot \cos\alpha$

$\frac{64}{10} = \frac{32}{5} = \frac{160}{25}$

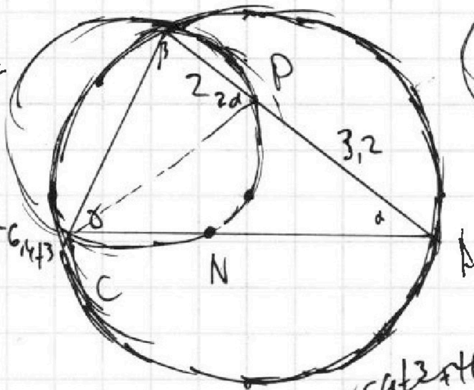
AC = 4

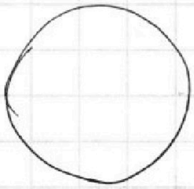
$\frac{16}{5} = 3\frac{1}{5} = 3{,}2$

$= 1{,}6^2 + 4 - 6{,}4\cos\alpha$ $\quad \cos\alpha = t \quad t > 0$

$\frac{4}{\cos^2\alpha}$ $\quad \frac{16}{10} = \frac{8}{5}$

$S_{\triangle ABC}$ - ?





$AP \cdot AB = AN \cdot AC$

$3{,}2 \cdot 5{,}2 = 4 \cdot AN$

$1 = 2{,}56t^2 + 4t^2 - 6{,}4t^3$

$\frac{16}{5} \cdot \frac{26}{5} = 4 \cdot NA$

$\frac{64}{25}$

$156t^3 + 164t^2 - 25 = 0$

$\frac{4\cdot 26}{25} = AN$ $\quad 104$

$25 = 64t^2 + 100t^2 - 160t^3$

$\frac{4}{5} \cdot \frac{26}{5}$

$4\frac{4}{25}$

т.к. $\triangle$ остроугольный то $\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma > 0$

N за точкой C лежит

$\frac{4}{\sin\beta} = \frac{5{,}2}{\sin\gamma}$

$\frac{\sin\gamma}{\sin\beta} = 1{,}3$ $\qquad \sin\gamma = 1{,}3\sin\beta$

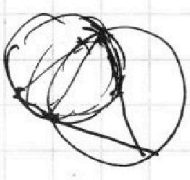
$\frac{2}{\sin\beta\cdot\cos\alpha} = \frac{CP}{\sin\beta}$

$\sin^2\gamma = 1{,}69\sin^2\beta$

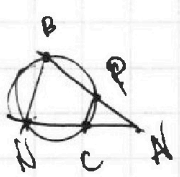
$\angle BPC = 2\alpha = \angle BOC$

$CP = \frac{2}{\cos\alpha}$

$1 - \sin^2\gamma = \cos^2\gamma$



$1 - \sin^2\beta = \cos^2\beta$



$1 - 1{,}69\sin^2\beta = \cos^2\gamma$

$\triangle PCA \sim \triangle NBA$

$\frac{CP}{\sin\gamma} = \frac{BC}{\sin 2\alpha}$

$\frac{BC}{\sin\alpha} = \frac{4}{\sin\beta}$

$\frac{CP}{NB} =$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

1 ☒ 2 ☒ 3 ☒ 4 ☒ 5 ☒ 6 ☒ 7 ☒

СТРАНИЦА __ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. **Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно.** Порча QR-кода недопустима!

$\sin^2 \pi x - \cos^2 \pi x - \sin \pi x \cdot \sin \pi y - \cos \pi x \cdot \cos \pi y$

$-\frac{\cos(\pi(x+y)) + \cos(\pi(x-y))}{2}$

$(-x-1)^3 = -(x+1)^3 = -(x^3+3x^2+3x+1)$

$M = x^3 - x^3 - 3x^2 - 3x - 1 + 9x(+x+1)$

№3б потом.

$M = -3x^2 - 3x - 1 + 9x^2 + 9x = 6x^2 + 6x - 1$

x^3

$(x-3)^3 = x^3 - 9x^2 + 27x - 81$

$\cos \pi x + \cos \pi y = 2\cos\frac{\pi(x+y)}{2} \cdot \cos\frac{\pi(x-y)}{2}$

$(\sin \pi x - \sin \pi y)$

$2\sin\frac{\pi(x-y)}{2} \cdot \cos\frac{\pi(x+y)}{2} \cdot \sin \pi x = \cancel{2}\cos\frac{\pi(x+y)}{2} \cdot \cos\frac{\pi(x-y)}{2} \cdot \cos \pi x$

$\cos\frac{\pi(x+y)}{2}\left(\sin\frac{\pi(x-y)}{2} \cdot \sin \pi x - \cos\frac{\pi(x+y)}{2} \cdot \cos \pi x\right)$

разность косинусов

сумма косинусов

$2x = 1 - y + x + 2k$

$2x = -1 + y - x + 2n$

$x = 1 - y + 2k$

$x = -1 + y$

$\cos a + \cos b = 2\cos\frac{a+b}{2} \cdot \cos\frac{a-b}{2}$

$\cos a - \cos b = -2\sin\frac{a+b}{2} \cdot \sin\frac{a-b}{2}$

$\cos \pi(1 - y + x)$

$\parallel$

$2y - 2x$

$y - x$

$\cos \pi - \pi(y-x)$

$\parallel$

$\cancel{\cos\frac{\pi(x+y)}{2}} + 2\pi x$

$\cos 2\pi x = -\cos \pi(y-x)$

$\frac{1}{2}\left(\cos\left(\frac{\pi(x+y)}{2} + \pi x\right) + \cos\left(\frac{\pi(x+y)}{2} - \pi x\right)\right)$

$2\pi x = \pi(1 - y + x) + 2\pi k$

$2\pi x = -\pi(1 - y + x) + 2\pi n$

$\frac{\pi x - \pi y}{2} + \pi x = \frac{3\pi x - \pi y}{2}$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

1 ☒ 2 ☒ 3 ☒ 4 ☒ 5 ☒ 6 ☒ 7 ☒

СТРАНИЦА __ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. **Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно.** Порча QR-кода недопустима!

$\cos\frac{\pi(x+y)}{2} = \frac{\pi}{2} + \pi k$ $\quad x+y = 1+2k$

$\overline{aaaa} = A \qquad A\cdot B\cdot C = n^2 \qquad \frac{9\cdot 8}{2} : \frac{11\cdot 10\cdot 9\cdot 8}{4!}$

$a\cdot 1111 = a\cdot 11\cdot 101$

101 простое $\Rightarrow$ $B \vdots 101$

среди трёх значных, делящихся на 101 и содерж

$\arccos \frac{v}{4}$ $\qquad y = \frac{1}{2} + \frac{5k-4}{2}$

$\arccos \in [0;\pi]$ $\qquad B = 101$

$y = 1 - \frac{1}{2} + 2k - \frac{k+4}{2}$

$\frac{1}{2} + \frac{k+4}{2} + y = 1+2k$ $\qquad$ т.к. $a<10$, то $C \vdots 11$

$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{xy} = \frac{1}{(x-3)} + \frac{1}{(y+3)} + \frac{1}{(x-3)(y+3)}$

C содержит 5 $\Rightarrow$ $C = 55$, $a=5$

$\frac{y+x+1}{xy} = \frac{y+3+x-3+1}{(x-3)(y+3)}$

$\cancel{xy} + 3x - 3y + 9 - \cancel{xy}$

$(y+x+1)\left(\frac{1}{xy} - \frac{1}{(x-3)(y+3)}\right) = 0$ $\qquad = 9\cdot 7\cdot 2$

$1+k+4=8$ $\qquad k\geq 3$

$1+5k-4=$

$x+y+1=0 \qquad \frac{(x-3)(y+3)-xy}{xy(x-3)(y-3)} = 0$

$\frac{9\cdot 8}{2}\cdot\frac{7}{2} = 9\cdot 7\cdot 2$

$\cancel{xy} + 3x - 3y - 9 - \cancel{xy} = 0$ $\qquad k>2$

$x - y - 3 = 0$

C_9^2 — вероятность попасть Пете и Васи в начале месяца

$\frac{C_9^2}{C_{11}^4}\cdot 3{,}5 = \frac{C_9^k}{C_{11}^{2+k}}$