



МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

11 КЛАСС. Вариант 2



1. [3 балла] Найдите все тройки натуральных чисел $(A; B; C)$ такие, что:
- A — четырёхзначное число, составленное из одинаковых цифр,
 - B — трёхзначное число, хотя бы одна из цифр которого равна 1,
 - C — двузначное число, хотя бы одна из цифр которого равна 5,
 - произведение $A \cdot B \cdot C$ является квадратом некоторого натурального числа.
2. [3 балла] Положительные числа x и y таковы, что значение выражения $K = \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{xy}$ не изменяется, если x уменьшить на 3, а y — увеличить на 3. Найдите все возможные значения выражения $M = x^3 - y^3 - 9xy$.
3. [5 баллов] а) Найдите все пары действительных чисел $(x; y)$ такие, что $(\sin \pi x - \sin \pi y) \sin \pi x = (\cos \pi x + \cos \pi y) \cos \pi x$.
- б) Сколько пар целых чисел (x, y) удовлетворяют одновременно этому уравнению и неравенству

$$\arccos \frac{x}{4} + \arccos \frac{y}{9} < 2\pi?$$

4. [4 балла] В начале месяца было выделено 4 билета на праздничный концерт, которые планировалось случайным образом распределить между одиннадцатиклассниками. В конце месяца выяснилось, что будет выделено больше 4 билетов. Одиннадцатиклассники Петя и Вася вычислили, что вероятность им обоим вместе попасть на концерт в начале месяца была в 3,5 раза меньше, чем оказалась в конце месяца. Сколько всего было выделено билетов на концерт в конце месяца, если количество одиннадцатиклассников не изменилось?
5. [5 баллов] Точка O — центр окружности ω_1 , описанной около остроугольного треугольника ABC . Окружность ω_2 , описанная около треугольника BOC , пересекает отрезок AB в точке P . Найдите площадь треугольника ABC , если $AP = \frac{16}{5}$, $BP = 2$, $AC = 4$.
6. [6 баллов] На координатной плоскости изображена фигура $\Phi(\alpha)$, состоящая из всех точек, координаты $(x; y)$ которых удовлетворяют системе неравенств

$$\begin{cases} (x - 2 \cos \alpha)(y - 2 \sin \alpha) \geq 0, \\ x^2 + y^2 \leq 9. \end{cases}$$

Найдите максимальное значение M периметра (длины границы) фигуры $\Phi(\alpha)$ и укажите все значения α , при которых оно достигается.

7. [6 баллов] Шар Ω касается всех рёбер правильной усечённой пирамиды, а шар ω касается всех её граней. Найдите угол наклона бокового ребра пирамиды к плоскости её основания.



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☒ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА
1 из 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

N1

$$A = \overline{aaaa} = a \cdot 1111$$

$$B = \overline{b_1 b_2 b_3}$$

$$\begin{cases} b_1 = 1 \\ b_2 = 1 \\ b_3 = 1 \end{cases}$$

$$C = \overline{c_1 c_2}$$

$$\begin{cases} c_1 = 5 \\ c_2 = 5 \end{cases}$$

$$A \cdot B \cdot C = n^2$$

$$1111 = 11 \cdot 101$$

$a \leq 9$ 11, 101 - простые

$$A : 101 \Rightarrow ABC : 101$$

$$\Downarrow$$
$$n^2 : 101$$

$$\Downarrow$$
$$n^2 : 101^2$$

$$\Downarrow$$
$$ABC : 101^2$$

$$\Downarrow$$
$$B : 101$$

$$B = \overline{101}$$

$$B = 101 \Leftarrow 1 = b_1 = b_3 \Leftarrow \begin{matrix} b_1 = b_3 \\ b_2 = 0 \end{matrix} \Leftarrow B : 101$$

$$A : 11 \Rightarrow ABC : 11 \Rightarrow n^2 : 11 \Rightarrow n^2 : 11^2$$

$$\Downarrow$$
$$ABC : 11^2$$

$$\Downarrow$$
$$C : 11 \Rightarrow c_1 = c_2 = 5$$

$$C : 5 \Rightarrow \dots \Rightarrow a = 5$$

$$(A; B; C) = (5555; 101; 55)$$

Ответ: $(A; B; C) = (5555; 101; 55)$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1	2	3	4	5	6	7
☐	☒	☐	☐	☐	☐	☐

СТРАНИЦА
1 из 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

№2

$$x > 0 \quad y > 0$$

$$K = \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{xy} = \frac{1}{x-3} + \frac{1}{y+3} + \frac{1}{(x-3)(y+3)}$$

$$\frac{y+x+1}{xy} = \frac{y+3+x-3+1}{(x-3)(y+3)} = \frac{y+x+1}{(x-3)(y+3)}$$

$$x \neq 3$$

$$(y+x+1)((x-3)(y+3) - xy) = 0$$

$$(y+x+1)(3x - 3y - 9) = 0$$

$$\begin{cases} y+x+1=0 \\ x=y+3 \end{cases} \quad y = -1-x < 0, \text{ но } y > 0 \Rightarrow \text{не подходит}$$

$$x = y+3$$

$$\begin{aligned} M &= x^3 - y^3 - 9xy = (y+3)^3 - y^3 - 9y(y+3) = \\ &= 3y^2 + 6y^2 + 18y + 27 - 9y^2 - 24y = 24 \end{aligned}$$

Ответ: $M = 24$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7
☐ ☐ ☒ ☐ ☐ ☐ ☐

СТРАНИЦА
 1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

№3

$$(\sin \pi x - \sin \pi y) \sin \pi x = (\cos \pi x + \cos \pi y) \cos \pi x$$

$$\sin^2 \pi x - \cos^2 \pi x = \sin \pi x \cdot \sin \pi y + \cos \pi x \cdot \cos \pi y$$

$$\parallel$$

$$-\cos 2\pi x$$

$$\parallel$$

$$\cos(\pi(x-y))$$

$$\pi(x-y) = \pm 2\pi x \mp \pi \mp 2\pi k \quad k \in \mathbb{Z}$$

$$x-y = \pm 2x - 1 - 2k$$

~~ААА~~

a) $\begin{cases} y = 2k+1+3x \\ y = 2k+1-x \end{cases} \quad \begin{matrix} k \in \mathbb{Z} \\ x \in \mathbb{R} \end{matrix}$

b) $\arccos \frac{x}{4} + \arccos \frac{y}{9} < 2\pi$

$$0 \leq \arccos z \leq \pi, \quad -1 \leq z \leq 1$$

$$\Rightarrow -1 \leq \frac{x}{4} \leq 1, \quad -1 \leq \frac{y}{9} \leq 1 \quad \text{и, если } \arccos \frac{x}{4} = \arccos \frac{y}{9}$$

то $\arccos \frac{x}{4} = \arccos \frac{y}{9} \neq \pi$

$$\text{если } \frac{x}{4} = \frac{y}{9}, \text{ то } \frac{x}{4} = \frac{y}{9} \neq -1$$

$$\Rightarrow (x; y) = (-4; -9) - \text{не подходит}$$

$$-4 \leq x \leq 4, \quad -9 \leq y \leq 9$$

$x = -4 \Rightarrow$ ~~если~~ $x \div 2 \Rightarrow y \div 2 \Rightarrow$

$\Rightarrow$ если $x \div 2 \Rightarrow y \div 2 \Rightarrow$

$\Rightarrow$

$-4; -2; \dots; 4$ - всего 5x

$y = -9$
 $y = -7$
 $y = -5$
 $\dots$
 $y = 9$ } 10

$y = -3$
 $y = -1$
 $y = 1$
 $y = 3$ } 9

$$\Rightarrow 5 \cdot 10 + 4 \cdot 9 - 1 = 50 + 36 - 1 = 85$$

Ответ: а) $\begin{cases} y = 2k+1+3x \\ y = 2k+1-x \end{cases} x \in \mathbb{R}, k \in \mathbb{Z}$ $\uparrow$ $-4; -9$ - не подходит
 б) 85 пар (x, y) $\uparrow$ минимум



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☒	☐	☐	☐

СТРАНИЦА
1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

14

n - кол-во одноклассников

a - кол-во билетов в конце месяца

p_1 - вероятность в начале месяца

p_2 - вероятность в конце месяца

C_n^4 - всего случаев в начале месяца

C_{n-2}^2 - случаев когда Петя и Васа едут в начале месяца

C_n^a - всего в конце

C_{n-2}^{a-2} - Петя и Васа едут в конце

$$p_1 = \frac{C_{n-2}^2}{C_n^4} = \frac{\frac{(n-2)!}{(n-4)! 2!}}{\frac{n!}{(n-4)! 4!}} = \frac{(n-2)!}{n!} \cdot \frac{4!}{2!} = \frac{4 \cdot 3}{n(n-1)}$$

$$p_2 = \frac{C_{n-2}^{a-2}}{C_n^a} = \frac{\frac{a(n-2)!}{(n-a)! (a-2)!}}{\frac{n!}{(n-a)! a!}} = \frac{(n-2)!}{n!} \cdot \frac{a!}{(a-2)!} = \frac{a(a-1)}{n(n-1)}$$

$$p_2 = 3,5 p_1 \quad \frac{a(a-1)}{n(n-1)} = 3,5 \frac{4 \cdot 3}{n(n-1)}$$

$$a(a-1) = 42$$

$$\begin{aligned} a^2 - a - 42 &= 0 \\ (a-7)(a+6) &= 0 \\ a > 0 &\Rightarrow a = 7 \end{aligned}$$

Ответ: 7



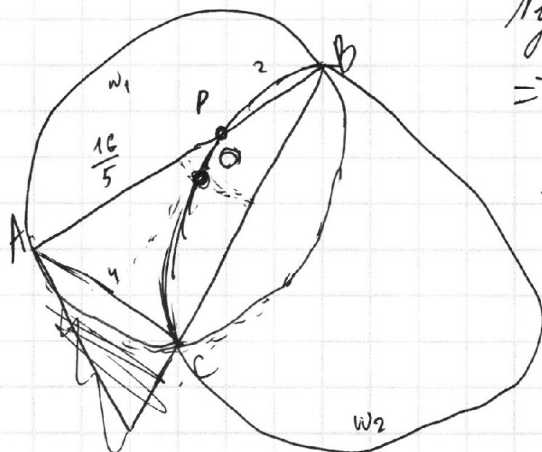
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☒ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА
1 из 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

15



$$\text{Пусть } \angle CAP = 2$$

$$\Rightarrow \angle COB = 22 \text{ тк опирается на ту же дугу}$$

$$\angle COB = \angle CPB = 22$$

$$\Rightarrow \angle APC = 180^\circ - 22$$

$$\Rightarrow \angle ACP = 180^\circ - 2 - (180^\circ - 22) =$$

$$= 2$$

$$\Rightarrow \triangle APC - \text{равноб}$$

$$\Rightarrow AP = CP = \frac{16}{5}$$

$$\Rightarrow 2 \frac{16}{5} \cdot \cos 2 = AC = 4$$

$$\cos 2 = \frac{5}{8}$$

$$\sin 2 = \sqrt{1 - \frac{25}{64}} =$$

$$= \sqrt{\frac{39}{64}} = \frac{\sqrt{39}}{8}$$

$$S_{ABC} = \frac{AB \cdot AC \cdot \sin 2}{2}$$

$$AB = \frac{16}{5} + 2 = \frac{26}{5}$$

$$S_{ABC} = \frac{\frac{26}{5} \cdot 4 \cdot \frac{\sqrt{39}}{8}}{2} = \frac{13\sqrt{39}}{10}$$

$$\begin{aligned} AC \cdot AD &= AP \cdot AB \\ 4 \cdot (4 + CD) &= \frac{16}{5} \cdot \frac{26}{5} \\ CD &= \frac{4 \cdot 26}{25} - 4 = \frac{4}{25} \end{aligned}$$

$$\text{Ответ: } S_{ABC} = \frac{13\sqrt{39}}{10}$$

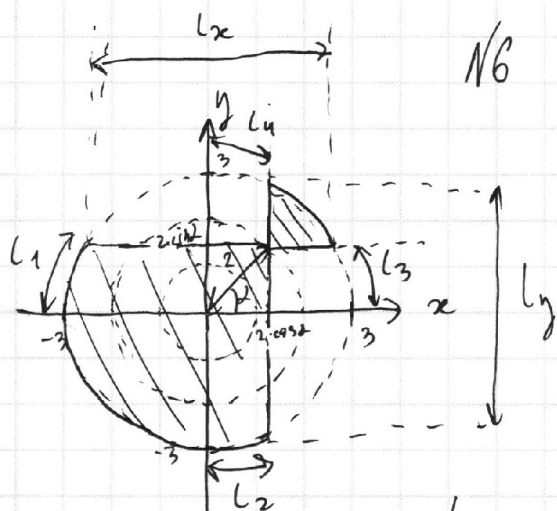


На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☒ 7 ☐

СТРАНИЦА
1 ИЗ 1

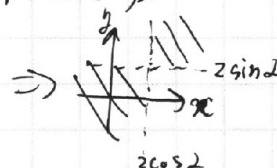
Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



$$x^2 + y^2 \leq 9 - \text{шар радиуса } 3$$

$$(x - 2\cos 2)(y - 2\sin 2) \geq 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x \geq 2\cos 2 \\ y \geq 2\sin 2 \\ x \leq 2\cos 2 \\ y \leq 2\sin 2 \end{cases}$$



$$l_x = 2\sqrt{3^2 - 2^2 \sin^2 2} = 2\sqrt{9 - 4\sin^2 2}$$

$$l_y = 2\sqrt{3^2 - 2^2 \cos^2 2} = 2\sqrt{9 - 4\cos^2 2}$$

$$l_1 = l_3 \quad \text{и} \quad l_2 = l_4 \quad \text{в силу симметрии}$$

$$M = \pi \cdot 4 + l_1 + l_2 - l_4 - l_3 + l_x + l_y$$

$$= 3\pi + l_x + l_y$$

$$(M - 3\pi)^2 = l_x^2 + l_y^2 + 2l_x l_y = 4(9 - 4\sin^2 2 + 9 - 4\cos^2 2) + 8\sqrt{(9 - 4\sin^2 2)(9 - 4\cos^2 2)}$$

$$= 4(18 - 4) + 8\sqrt{81 - 9 \cdot 4 + 16\sin^2 2 \cdot \cos^2 2}$$

$$\text{максимум } M \Rightarrow M - 3\pi = \text{MAX} \Rightarrow (M - 3\pi)^2 = \text{MAX} \Rightarrow 16\sin^2 2 \cos^2 2$$

$$4 \cdot 4\sin^2 2 \cdot \cos^2 2 = 4\sin^2 2 \cos^2 2 - \text{MAX} \Rightarrow \sin 2\alpha = \pm 1$$

$$\Rightarrow 2\alpha = \pm \frac{\pi}{2} + 2\pi k \quad \alpha = \frac{\pi}{4} + \pi k \quad k \in \mathbb{Z}$$

$$\Rightarrow \sin^2 \alpha = \frac{1}{2} \quad \cos^2 \alpha = \frac{1}{2}$$

$$M = 3\pi + 2\sqrt{4} + 2\sqrt{4} = 3\pi + 4\sqrt{2}$$

$$\text{Ответ: } M = 3\pi + 4\sqrt{2}, \quad \alpha = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi k}{2}, \quad k \in \mathbb{Z}$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1
☐

2
☐

3
☐

4
☐

5
☐

6
☐

7
☒

СТРАНИЦА
2 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$(2a)^2 + (R_2 - R_3)^2 = R_1^2$$

$$\sin^2 \alpha + \frac{1}{4} =$$

$$4a^2 + \frac{(b-c)^2}{4 \cdot \frac{\sin^2 180^\circ}{n}} = \frac{bc}{4}$$

$$4a^2 = a^2 \sin^2 \alpha = \frac{(b+c)^2}{4} \sin^2 \alpha$$

$$(b+c)^2 \sin^2 \alpha + \frac{(b-c)^2}{\frac{\sin^2 180^\circ}{n}} = bc$$

$$\sin \alpha = \frac{bc \cdot \frac{\sin^2 180^\circ}{n} - (b-c)^2}{(b+c)^2 \cdot \frac{\sin^2 180^\circ}{n}}$$

$$\sin \alpha = \frac{bc - \frac{(b-c)^2}{\frac{\sin^2 180^\circ}{n}}}{(b+c)^2}$$

$$\sin \alpha = \frac{bc - \frac{(b-c)^2}{\frac{\sin^2 180^\circ}{n}}}{(b+c)^2}$$

$$\sin \alpha =$$

$$\sin \alpha =$$

$$\sin \alpha =$$

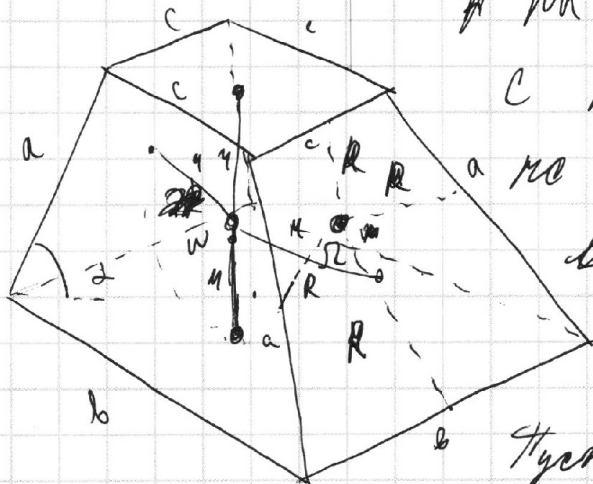


На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☒

СТРАНИЦА
1 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



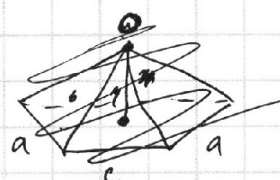
№4
n-кон-во сторон в основании
на картинке пирамида
с квадратом в основании,
но не забывайте на это
вынимать, а рассматривать
общий случай

Пусть O - центр R R - радиус R
 O - центр W r - радиус W

~~Рассмотрим основание~~

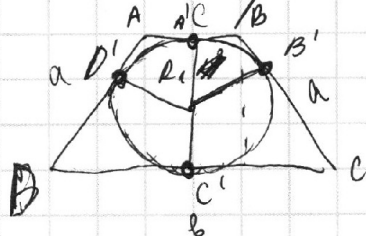


$$2r = a \sin 2$$



~~Рассмотрим сечение~~

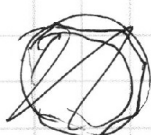
Рассмотрим сечение сферы R боковой гранью:



$$\left. \begin{array}{l} AD' = AA' \\ DD' = DC' \end{array} \right\} \Rightarrow b + c = 2a$$

$$(2R_1)^2 = a^2 - \left(\frac{b-c}{2}\right)^2 = \frac{(b+c)^2 - (b-c)^2}{4} = b \cdot c$$

$$R_1^2 = \frac{bc}{4}$$



$$\begin{aligned} b &= 2R_2 \cdot \sin \frac{180^\circ}{n} \\ c &= 2R_3 \cdot \sin \frac{180^\circ}{n} \end{aligned} \quad \begin{aligned} b &= 2R_2 \cdot \tan \frac{180^\circ}{n} \\ c &= 2R_3 \cdot \tan \frac{180^\circ}{n} \end{aligned}$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1
☐

2
☐

3
☐

4
☐

5
☐

6
☐

7
☐

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$x > 0 \quad y > 0 \quad \sqrt{2}$$
$$K = \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{xy} = \frac{3}{x} + \frac{1}{3y} + \frac{3}{3xy}$$

$$M = x^3 - y^3 - 9xy$$

$$y + x + 1 = 3y + \frac{x}{3} + 1$$

$$2y = \frac{2x}{3}$$

$$y = \frac{x}{3}$$

$$K = \frac{1}{x} + \frac{3}{x} + \frac{3}{x^2} = \frac{4x+3}{x^2}$$

$$M = x^3 - \frac{x^3}{24} - 3x^2 = \frac{x^2}{24}(26x - 81)$$

$$4x^2 - 4x - 3 = 0$$

$$D = 4 + 12$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

1
☐

2
☐

3
☐

4
☐

5
☐

6
☐

7
☐

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. **Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно.** Порча QR-кода недопустима!

