



МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ



11 КЛАСС. Вариант 3

✓ 1. [3 балла] Найдите все тройки натуральных чисел $(A; B; C)$ такие, что:

- A — четырёхзначное число, составленное из одинаковых цифр,
- B — трёхзначное число, хотя бы одна из цифр которого равна 6,
- C — двухзначное число, хотя бы одна из цифр которого равна 3,
- произведение $A \cdot B \cdot C$ является квадратом некоторого натурального числа.

✓ 2. [3 балла] Положительные числа x и y таковы, что значение выражения $K = \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{5}{xy}$ не изменяется, если x уменьшить на 2, а y — увеличить на 2. Найдите все возможные значения выражения $M = x^3 - y^3 - 6xy$.

✓ 3. [5 баллов] а) Найдите все пары действительных чисел $(x; y)$ такие, что $(\sin \pi x + \sin \pi y) \sin \pi x = (\cos \pi x - \cos \pi y) \cos \pi x$.

б) Сколько пар целых чисел (x, y) удовлетворяют одновременно этому уравнению и неравенству

$$\arcsin \frac{x}{6} + \arcsin \frac{y}{2} < \pi?$$

✓ 4. [4 балла] В начале месяца было выделено 4 билета на праздничный концерт, которые планировалось случайным образом распределить между одиннадцатиклассниками. В конце месяца выяснилось, что будет выделено больше 4 билетов. Одиннадцатиклассники Петя и Вася вычислили, что вероятность им обоим вместе попасть на концерт в начале месяца была в 6 раз меньше, чем оказалась в конце месяца. Сколько всего было выделено билетов на концерт в конце месяца, если количество одиннадцатиклассников не изменилось?

✓ 5. [5 баллов] Точка O — центр окружности ω_1 , описанной около остроугольного треугольника ABC . Окружность ω_2 , описанная около треугольника BOC , пересекает отрезок AB в точке P . Найдите площадь треугольника ABC , если $AP = 25$, $BP = 5$, $AC = 35$.

✓ 6. [6 баллов] На координатной плоскости изображена фигура $\Phi(\alpha)$, состоящая из всех точек, координаты $(x; y)$ которых удовлетворяют системе неравенств

$$\begin{cases} (x + 5\sqrt{2} \cos \alpha)(y + 5\sqrt{2} \sin \alpha) \leq 0, \\ x^2 + y^2 \leq 169. \end{cases}$$

Найдите максимальное значение M периметра (длины границы) фигуры $\Phi(\alpha)$ и укажите все значения α , при которых оно достигается.

7. [6 баллов] Шар Ω касается всех рёбер правильной усечённой пирамиды, а шар ω касается всех её граней. Пусть сторона верхнего основания меньше, чем сторона нижнего. Найдите отношение площади верхнего основания пирамиды к площади её боковой поверхности.



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

- | | | | | | | |
|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

СТРАНИЦА
1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

№1

$$A = 1111a = 101 \cdot 11 \cdot a$$

т.к. $A \cdot B \cdot C$ - квадрат $\Rightarrow B \cdot C : 101$ и : 11

С не может быть : 101 т.к. С - двузначное

$\Rightarrow C : 11$ ~~однозначное~~

С может быть

11	66
22	77
33	88
44	99
55	

но т.к. там должна быть 3 $\Rightarrow C = 33$

В не может быть одновременно : 11 и : 101 т.к.

если $B : 101$ и : 11 $\Rightarrow B \geq 101 \cdot 11 = 1111$, а В - трехзначное

$\Rightarrow B : 101$ и В может быть 101 но т.к. там
202 должна быть 6
303 ...
909 $\Rightarrow B = 606$

$$A = 1111a \quad B = 606 = 6 \cdot 101$$

$$\begin{matrix} \\ " \\ 101 \cdot 11 \cdot a \end{matrix} \quad C = 33 = 3 \cdot 11$$

$\Rightarrow \alpha \neq 16 \Rightarrow 101 \cdot 11 \cdot a \cdot 3 \cdot 2 \cdot 101 \cdot 3 \cdot 11$ - квадрат

$101^2 \cdot 11^2 \cdot 3^2 \cdot 2 \cdot a$ - квадрат $\Rightarrow 2a$ - квадрат

$$\text{на } 1 \leq a \leq 9 \Rightarrow \begin{cases} a = 2 \\ a = 8 \end{cases}$$

\Rightarrow Есть всего две тройки A, B, C

$$\text{Ответ: } \begin{cases} A = 2222 \\ B = 606 \\ C = 33 \end{cases} \quad \begin{cases} A = 8888 \\ B = 606 \\ C = 33 \end{cases}$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи **отдельно**.

 1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
1 из 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач **нумеруются отдельно**. Порча QR-кода недопустима!

N 2

$$K = \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{5}{xy} = \frac{1}{x-2} + \frac{1}{y+2} + \frac{5}{(x-2)(y+2)}$$

$$\begin{cases} x \neq 0 \\ x \neq 2 \\ y \neq 0 \\ y \neq -2 \end{cases}$$

$$\frac{y+x+5}{xy} = \frac{y+2+x-2+5}{(x-2)(y+2)}$$

$$\frac{x+y+5}{xy} = \frac{x+y+5}{(x-2)(y+2)} \Rightarrow xy = (x-2)(y+2)$$

$$\begin{aligned} xy &= xy + 2x - 2y - 4 \\ 0 &= 2x - 2y - 4 \\ x - y - 2 &= 0 \\ x &= y + 2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} M &= x^3 - y^3 - 6xy = (y+2)^3 - y^3 - 6(y+2)y = \\ &= y^3 + 6y^2 + 12y + 8 - y^3 - 6y^2 - 12y = 8 \end{aligned}$$

Ответ: 8



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

 1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач **нумеруются отдельно**. Порча QR-кода недопустима!

№ 3

$$\begin{aligned} a) (\sin(\pi x) + \sin(\pi y)) \sin \pi x &= (\cos(\pi x) - \cos(\pi y)) \cos(\pi x) \\ \sin^2(\pi x) + \sin(\pi x)\sin(\pi y) &= \cos^2(\pi x) - \cos(\pi x)\cos(\pi y) \\ \cos(\pi x)\cos(\pi y) + \sin(\pi x)\sin(\pi y) &= \cos^2(\pi x) - \sin^2(\pi x) \\ \cos(\pi x - \pi y) &= \cos(2\pi x) \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \pi(x-y) = \pi(2x) + 2\pi k, k \in \mathbb{Z} \\ \pi(x-y) = -\pi(2x) + 2\pi k, k \in \mathbb{Z} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x-y = 2x+2k, k \in \mathbb{Z} \\ x-y = -2x+2k, k \in \mathbb{Z} \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = -y + 2k, k \in \mathbb{Z} \\ x = \frac{y}{3} + \frac{2}{3}k, k \in \mathbb{Z} \end{cases}, \text{ а } y - \text{ любое действительное}$$

Ответ: $y - \text{любое действительное, а } x = -y + 2k, k \in \mathbb{Z} \text{ или}$
 $x = \frac{y}{3} + \frac{2}{3}k, k \in \mathbb{Z}$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

1

2

3

4

5

6

7

СТРАНИЦА
1 из 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач **нумеруются отдельно**. Порча QR-кода недопустима!

№

Пусть n - кол-во одноклассников, $n \in \mathbb{N}$
 x - кол-во билетов в конце месяца, $x > 4$, $x \in \mathbb{N}$

C_n^4 - кол-во вариантов выбрать 4 одноклассников

C_{n-2}^2 - кол-во случаев, когда и Петя и Вася получили билет (просто выбираем, кому достанутся остальные билеты $n-2=2$)

$\frac{C_{n-2}^2}{C_n^4}$ - вероятность для Пети и Васи в начале

$\frac{C_{n-2}^{x-2}}{C_n^x}$ - вероятность в конце месяца

$$6 \cdot \frac{C_{n-2}^2}{C_n^4} = \frac{C_{n-2}^{x-2}}{C_n^x}$$

$$6 \cdot \frac{(n-2)!}{\frac{n!}{\frac{n-2!(n-2-2)!}{4!(n-4)!}}} = \frac{(n-2)!}{\frac{(x-2)!(n-2-x+2)!}{x!(n-x)!}}$$

$$\frac{6 \cdot (n-2)!}{2!(n-4)!} \cdot \frac{4!(n-4)!}{n!} = \frac{(n-2)!}{(x-2)!(n-x)!} \cdot \frac{x!(n-x)!}{n!}$$

$$\frac{6 \cdot (4 \cdot 3)}{n(n-1)} = \frac{x(x-1)}{n(n-1)} \Rightarrow 6 \cdot 4 \cdot 3 = x(x-1)$$

$$3 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = x(x-1)$$

$$9 \cdot 8 = x(x-1) \Rightarrow x = 9$$

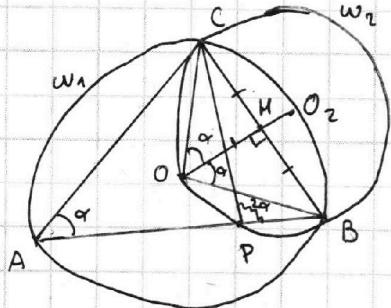
Ответ: 9 билетов

На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

- | | | | | | | |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|
| <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|

СТРАНИЦА
1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



15

$\angle COB$ - центральный \Rightarrow

$$\Rightarrow \angle COB = 2\angle CAB$$

Луч CO $\angle CAB = \alpha$

$$\Rightarrow \angle COB = 2\alpha$$

Р и О лежат на одной окр. (~~w1~~ w_2) $\Rightarrow \angle CPB = 2\alpha$

По теореме о Треугольнике $CM = MO = MB \Rightarrow \triangle OM B$ - р/с \Rightarrow
 $\Rightarrow \angle MBO = \alpha$ т.к. он внешний и прямой угл. Треугл. \Rightarrow
 $\Rightarrow \alpha = 45^\circ \Rightarrow \angle CPB = 2\alpha = 90^\circ \Rightarrow CP$ - высота
 $\Rightarrow S_{\triangle ABC} = CP \cdot AB \cdot \frac{1}{2} = CP \cdot (AP + PB) \cdot \frac{1}{2} = CP \cdot (30) \cdot \frac{1}{2} =$
 $= 15 \cdot CP$

По т. Пифагора в $\triangle ACP$ $CP^2 = AC^2 - AP^2 = 35^2 - 25^2$

~~$1600 = 600 \Rightarrow CP < \sqrt{600} = 10\sqrt{6}$~~

$$\Rightarrow S_{\triangle ABC} = 15 \cdot 10\sqrt{6} = 150\sqrt{6}$$

Ответ: $150\sqrt{6}$

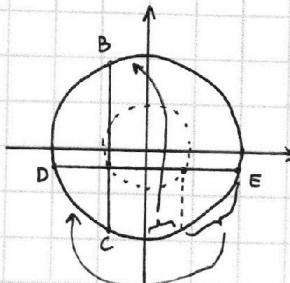


На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

- | | | | | | | |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|---------------------------------------|----------------------------|
| <input type="checkbox"/> 1 | <input type="checkbox"/> 2 | <input type="checkbox"/> 3 | <input type="checkbox"/> 4 | <input type="checkbox"/> 5 | <input checked="" type="checkbox"/> 6 | <input type="checkbox"/> 7 |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|---------------------------------------|----------------------------|

СТРАНИЦА
2 ИЗ 3

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



Заметим, что сумма длин дуг фигуры $\varphi(\alpha)$ - постоянна и равна половине длины окружности π

$$\frac{2\pi R}{2} = \pi R = 13\pi$$

т.к. мы можем разделить и поменять местами некоторые дуги как показано на рисунке.

Найдем длины отрезков BC и DE:

1. Ур-е прямой BC: $x = -c \quad x = 5\sqrt{2} \cos \alpha$

Подставим в ур-е (2)

$$25 \cdot 2 \cdot \cos^2 \alpha + y^2 = 169$$

$$y^2 = 169 - 50 \cos^2 \alpha \quad y = \pm \sqrt{169 - 50 \cos^2 \alpha} - \text{ординаты точек B и C}$$

$$\Rightarrow BC = 2\sqrt{169 - 50 \cos^2 \alpha}$$

2. Ур-е прямой DE: $y = -s \quad y = 5\sqrt{2} \sin \alpha$

Подставим в ур-е (2)

$$x^2 + 50 \sin^2 \alpha = 169 \Rightarrow x = \pm \sqrt{169 - 50 \sin^2 \alpha} - \text{абсиссы точек D и E}$$

$$\Rightarrow DE = 2\sqrt{169 - 50 \sin^2 \alpha}$$

$$BC + DE = 2(\sqrt{169 - 50 \cos^2 \alpha} + \sqrt{169 - 50 \sin^2 \alpha}) =$$

$$= \sqrt{4(169 - 50 \cos^2 \alpha + 2\sqrt{(169 - 50 \cos^2 \alpha)(169 - 50 \sin^2 \alpha)} + 169 - 50 \sin^2 \alpha) -}$$

$$= 2\sqrt{169 - 50(\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha) + 2\sqrt{169^2 - 169 \cdot 50 \sin^2 \alpha - 169 \cdot 50 \cdot \cos^2 \alpha}}$$

$$\cdot \cos^2 \alpha + 50^2 \cdot \sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha) = 2\sqrt{2 \cdot 169 - 50 + 2\sqrt{169^2 - 169 \cdot 50(\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha)}}$$

$$+ 50^2 \cdot \sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha) = 2\sqrt{2 \cdot 169 - 50 + 2\sqrt{169^2 - 169 \cdot 50 + (50 \sin \alpha \cos \alpha)^2}} =$$

$$= 2\sqrt{188 + 2\sqrt{169(169 - 50) + (50 \sin \alpha \cos \alpha)^2}} \Rightarrow \text{Чем дальше}$$

~~sin \alpha \cos \alpha, тем больше выражение~~

$$(sin \alpha + cos \alpha)^2 = sin^2 \alpha + cos^2 \alpha + 2 \sin \alpha \cos \alpha = 1 + 2 \sin \alpha \cos \alpha$$

На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

- | | | | | | | |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|---------------------------------------|----------------------------|
| <input type="checkbox"/> 1 | <input type="checkbox"/> 2 | <input type="checkbox"/> 3 | <input type="checkbox"/> 4 | <input type="checkbox"/> 5 | <input checked="" type="checkbox"/> 6 | <input type="checkbox"/> 7 |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|---------------------------------------|----------------------------|

СТРАНИЦА
1 ИЗ 3

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

№6

$$\begin{cases} (x + 5\sqrt{2} \cos \alpha)(y + 5\sqrt{2} \sin \alpha) \leq 0 & (1) \\ x^2 + y^2 \leq 169 & (2) \end{cases}$$

(2) - уравнение окружности (назовем ее ω) с центром в $(0,0)$ и $R = \sqrt{169} = 13$

Пусть $c = -5\sqrt{2} \cos \alpha$, $s = -5\sqrt{2} \sin \alpha$

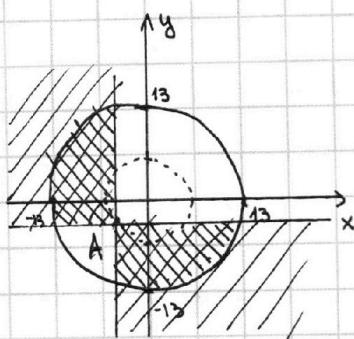
Тогда решением ур-я (1) является

$$\begin{cases} x \leq c \\ y \geq s \\ x \geq c \\ y \leq s \end{cases}$$

$$c^2 + s^2 = 25 \cdot 2 \cos^2 \alpha + 25 \cdot 2 \sin^2 \alpha = 50(\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha) = 50 \cdot 1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow c^2 + s^2 = 50 \Rightarrow \text{Расстояние от } (0,0) \text{ до точки } A(c, s) \text{ (назовем его } r) \quad r = \sqrt{50}$$

$$7 < \sqrt{50} < 8$$

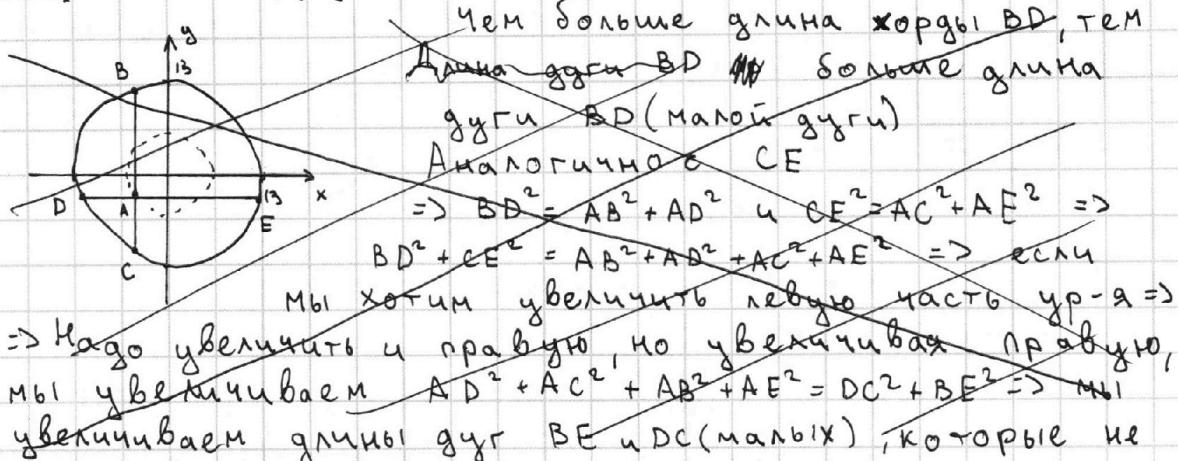


Обозначим на рисунке точку A

Мы хотим добиться таких значений периметра фигуры $\Phi(\alpha)$

A лежит на окружности с радиусом $r = \sqrt{50}$

Х - область фигуры $\Phi(\alpha)$



I-



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

- | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
|---|---|---|---|---|---|---|

СТРАНИЦА
3 ИЗ 3

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

~~($\sin \alpha \cos \alpha \in [-\frac{\sqrt{2}}{2}; \frac{\sqrt{2}}{2}]$)~~ \Rightarrow Если $\exists \alpha$ имеет такое значение

$$\text{то } (\sqrt{2})^2 = A + 2 \sin \alpha \cos \alpha \Rightarrow \sin \alpha \cos \alpha_{\max} = \frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow -(BC + DE)_{\max} = 2\sqrt{188 + 2\sqrt{169(169-50)} + 25^2}$$

$$\text{или } \sin \alpha \cos \alpha = -\frac{1}{2} \Rightarrow \sin \alpha \cos \alpha =$$

Воспользовавшись фактом, что $\sin \alpha \cos \alpha \in [-\frac{1}{2}; \frac{1}{2}]$

$$\Rightarrow M_{\max} \text{ при } \sin \alpha \cos \alpha = \frac{1}{2} \text{ или } \sin \alpha \cos \alpha = -\frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow \alpha = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{2}k, k \in \mathbb{Z}$$

$$(BC + DE)_{\max} = 2\sqrt{188 + 2\sqrt{169(169-50)} + 25^2} = 2\sqrt{188 + 2\sqrt{169 \cdot 119 + 25^2}}$$

$$= 48 \quad \Rightarrow M_{\max} = 13\pi + 48$$

$$\text{Ответ: } M_{\max} = 13\pi + 48, \quad \alpha = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{2}k, k \in \mathbb{Z}$$

I-

I-



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

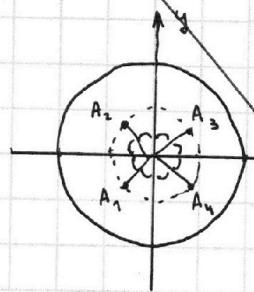
- | | | | | | | |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|---------------------------------------|----------------------------|
| <input type="checkbox"/> 1 | <input type="checkbox"/> 2 | <input type="checkbox"/> 3 | <input type="checkbox"/> 4 | <input type="checkbox"/> 5 | <input checked="" type="checkbox"/> 6 | <input type="checkbox"/> 7 |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|---------------------------------------|----------------------------|

СТРАНИЦА
из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Выходят в периметр \Rightarrow Максимальная длина дуги достигается при $AB = AE$ и $AD = DC$

Четыре случая: A_1, A_2, A_3, A_4



$A_1:$ ~~cos alpha < 0~~

$$c = s < 0$$

$$-5\sqrt{2} \cos \alpha = -5\sqrt{2} \sin \alpha$$

$$\sin \alpha = \cos \alpha < 0$$

$$\alpha = \frac{5}{4}\pi + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}$$

$A_2:$ $c = -s$ $s > 0$

$$-5\sqrt{2} \cos \alpha = 5\sqrt{2} \sin \alpha$$

$$-\cos \alpha = \sin \alpha$$

$$\sin \alpha > 0$$

$$\alpha = \frac{3}{4}\pi + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}$$

$A_3:$ $\cos \alpha = \sin \alpha > 0$

$$\alpha = \frac{\pi}{4} + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}$$

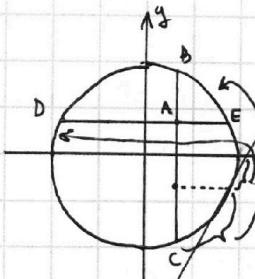
$A_4:$

$\cos \alpha = -\sin \alpha$ $\cos \alpha > 0$

$$\alpha = -\frac{\pi}{4} + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}$$

$$\Rightarrow \alpha = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{2}k, k \in \mathbb{Z}$$

Теперь найдем длину M периметра рассмотрим любой случай (возьмём A_3)



Переносим некоторые дуги как показано на рисунке и понимаем, что сумма длин дуг равна $\frac{2\pi R}{2} = \pi R = \pi \cdot 13 = 13\pi$

Т.к. $DE = BC$ достаточно найти длину одной из них

Уравнение прямой BC : $x = -c \Leftrightarrow x = -5\sqrt{2} \cos \alpha$, $\alpha = \frac{\pi}{4}$

$$x = +5\sqrt{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = 10$$

Подставим в ур-е (2)

$$25 + y^2 = 169 \quad y^2 = 169 - 25 = 144 \Rightarrow y = \pm 12 - \text{коорд. угла т. } B \text{ и } C$$

$$\Rightarrow BC = 2 \cdot 12 = 24 \Rightarrow M = 13\pi + 48 \quad \text{Ответ: } M_{\max} = 13\pi + 48, \alpha = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{2}k, k \in \mathbb{Z}$$

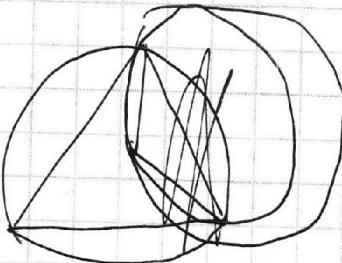
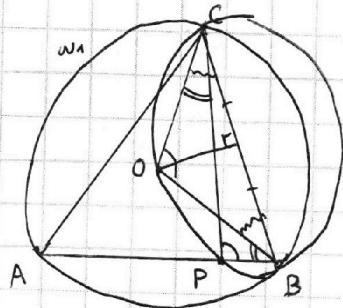


На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

- | | | | | | | |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|
| <input type="checkbox"/> 1 | <input type="checkbox"/> 2 | <input type="checkbox"/> 3 | <input type="checkbox"/> 4 | <input type="checkbox"/> 5 | <input type="checkbox"/> 6 | <input type="checkbox"/> 7 |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|

СТРАНИЦА
ИЗ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



$$A = 1111a$$

$$B = \frac{6mn}{m6n} = \frac{6}{m6}$$

$$C = \frac{\overline{c}\overline{3}}{\overline{3}\overline{c}}$$

$$\begin{array}{r} 40 \\ \times 40 \\ \hline 160 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 1111 \\ - 11 \\ \hline 1010 \end{array} \quad \begin{array}{r} 11 \\ 101 \\ \hline 11 \end{array}$$

$$1. \underset{101 \cdot 11}{1111a} \cdot (600 + 10m + n) \cdot (10c + 3) =$$

$$101 \cdot 11$$

$$6666 \cdot 606 \cdot 33$$

$$\cancel{101 \cdot 11}$$

$$3 \cdot 6 \cdot 101 \cdot 11$$

$$101 \cdot 6 \cdot 3 \cdot 11$$

$$\begin{array}{r} 101 \\ 202 \\ 303 \\ 404 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 21 \\ 25 \\ \times 25 \\ \hline 125 \\ 50 \\ \hline 625 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 101 \\ 11 \\ \hline 101 \end{array}$$

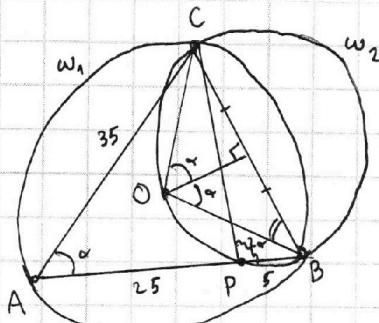
$$\begin{array}{r} 105 \\ 1225 \\ - 625 \\ \hline 600 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 10111 \\ - 99 \\ \hline 11 \end{array}$$

$$1 \leq a \leq 9$$

$$XL \quad a \cdot 10^4 \cdot 11 \cdot 101 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 3 / 11 = a \cdot 101^2 \cdot 11^2 \cdot 3^2 \cdot 2 \Rightarrow a = 2$$

$$a = 8$$





На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

- | | | | | | | |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|
| <input type="checkbox"/> 1 | <input type="checkbox"/> 2 | <input type="checkbox"/> 3 | <input type="checkbox"/> 4 | <input type="checkbox"/> 5 | <input type="checkbox"/> 6 | <input type="checkbox"/> 7 |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|

СТРАНИЦА
ИЗ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

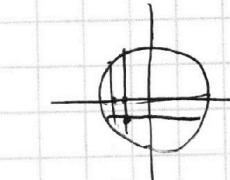
$$(x + 5\sqrt{2} \cos \alpha)(y + 5\sqrt{2} \sin \alpha) \leq 0$$

$$xy + x \cdot 5\sqrt{2} \sin \alpha + y \cdot 5\sqrt{2} \cos \alpha + 25 \cdot 2 \cdot \sin \alpha \cos \alpha \leq 0$$

$$-5\sqrt{2} \cos \alpha = c$$

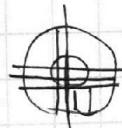
$$-5\sqrt{2} \sin \alpha = s$$

$$\begin{cases} x \leq c \\ y \geq s \end{cases} \text{ или } \begin{cases} x > c \\ y \leq s \end{cases}$$

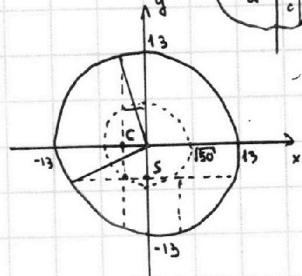
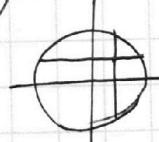
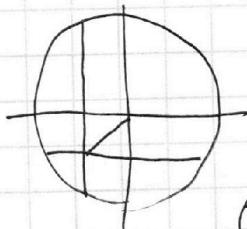
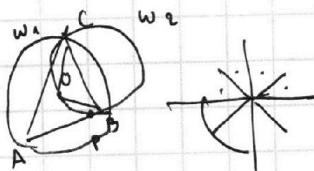
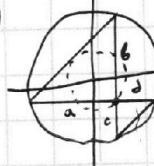


$$118. \text{ } \exists A \quad c \geq 13 \quad -5\sqrt{2} \cos \alpha \geq 13 \\ s \leq -13 \quad -5\sqrt{2} \sin \alpha \leq -13$$

$$\begin{aligned} c^2 + s^2 &= 25 \cdot 2 \cdot \cos^2 \alpha + 25 \cdot 2 \cdot \sin^2 \alpha \\ &= 50(\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha) = 50 \\ \Rightarrow \sqrt{c^2 + s^2} &= \sqrt{50} \quad 7 < \sqrt{50} < 8 \end{aligned}$$



A(c; s)



$$\begin{aligned} (a^2 + b^2) + (c^2 + d^2) - \max & \\ (a^2 + c^2) + (b^2 + d^2) - \min & \end{aligned} \Rightarrow$$

Баланс, когда

$$B^2 + C^2 = a^2 + d^2$$

1111a.

$$\begin{array}{r} 11 \\ \times 169 \\ \hline 238 \end{array}$$

$$3 + (-3) + 11 + 5$$

$$\begin{array}{r} 238 \\ -50 \\ \hline 188 \end{array}$$

$$\begin{aligned} B &= mn6 \\ &= 6mn \\ &= m6n \end{aligned}$$

$$C = c^3 \\ 3c$$

$$y = -s \quad x = c$$

$$y = 5\sqrt{2} \sin \alpha \quad x = 5\sqrt{2} \cos \alpha$$

$$y^2 + 50 \cos^2 \alpha = 169$$

$$x^2 + 50 \sin^2 \alpha = 169$$

$$x = \pm \sqrt{169 - 50 \sin^2 \alpha}$$

$$d_1 = 2\sqrt{169 - 50 \sin^2 \alpha}$$

$$d_2 = 2\sqrt{169 - 50 \cos^2 \alpha}$$

$$d_1 + d_2 = 2 \left(\sqrt{169 - 50 \sin^2 \alpha} + \sqrt{169 - 50 \cos^2 \alpha} \right)$$

$$(d_1^2 + d_2^2)^2 = 4(169 - 50 \sin^2 \alpha + 169 - 50 \cos^2 \alpha + \dots)$$

$$\sin \alpha \cos \alpha =$$

$$\sin \alpha \cos \alpha$$

$$\frac{(\sin \alpha + \cos \alpha)^2}{2} =$$

$$= 1 + 2 \sin \alpha \cos \alpha$$

$$1 = 2 \sin \alpha \cos \alpha$$

$$\frac{1}{2}$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

 1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
ИЗ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач **нумеруются отдельно**. Порча QR-кода недопустима!

Черновик

y - любое действительное

$$\begin{cases} x = -y + 2k, k \in \mathbb{Z} \\ x = \frac{y}{3} + \frac{2k}{3}, k \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

$$8) \arcsin \frac{-y+2k}{6} + \arcsin \frac{y}{2} < \pi$$

$\underbrace{-1 \leq y \leq 1}_{-1 \leq 1}$

Пусть $n = \sin \alpha$

$$-1 \leq n \leq 1$$

$$\sqrt{2} \leq \sin x + \cos x \leq \sqrt{2}$$

$$\begin{cases} x + 5\sqrt{2} \cos \alpha \leq 0 \\ y + 5\sqrt{2} \sin \alpha \geq 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x \leq -5\sqrt{2} \cos \alpha \\ y \geq -5\sqrt{2} \sin \alpha \\ x \leq -5\sqrt{2} \cos \alpha \\ -y \leq 5\sqrt{2} \sin \alpha \\ x - y \leq 5\sqrt{2} (\sin \alpha - \cos \alpha) \\ y \geq x - 5\sqrt{2} (\sin \alpha - \cos \alpha) \end{cases}$$

$$\begin{cases} 5\sqrt{2} \sin \alpha = m \\ 5\sqrt{2} \cos \alpha = n \end{cases}$$

$$② \begin{cases} x + 5\sqrt{2} \cos \alpha \geq 0 \\ y + 5\sqrt{2} \sin \alpha \leq 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x + 5\sqrt{2} \cos \alpha \geq y + 5\sqrt{2} \sin \alpha \\ x \geq -5\sqrt{2} \cos \alpha \\ y \leq -5\sqrt{2} \sin \alpha \\ x \geq -5\sqrt{2} \cos \alpha \\ -y \geq 5\sqrt{2} \sin \alpha \\ x - y \geq 5\sqrt{2} (\sin \alpha - \cos \alpha) \\ y \leq x - 5\sqrt{2} (\sin \alpha - \cos \alpha) \end{cases}$$

~ 6

$$\begin{cases} (x + 5\sqrt{2} \cos \alpha)(y + 5\sqrt{2} \sin \alpha) \leq 0 \\ x^2 + y^2 \leq 169 = 13^2 \end{cases}$$

окружность

$$\begin{cases} x \geq -5\sqrt{2} \cos \alpha = 5\sqrt{2} \sqrt{1 - \sin^2 \alpha} \\ y \geq -5\sqrt{2} \sin \alpha \\ x \leq -5\sqrt{2} \cos \alpha \\ y \leq -5\sqrt{2} \sin \alpha \end{cases}$$

$$\begin{cases} x \geq -5\sqrt{2} \sqrt{1 - n^2} \\ y \geq -5\sqrt{2} n \\ x \leq -5\sqrt{2} \sqrt{1 - n^2} \\ y \leq -5\sqrt{2} n \end{cases} \Rightarrow x + y \geq -5\sqrt{2}(\sqrt{1 - n^2} + n)$$

$$\Rightarrow x + y \leq -5\sqrt{2}(\sqrt{1 - n^2} + n)$$

$$\begin{cases} y \geq -x - 5\sqrt{2}(\sqrt{1 - n^2} + n) \\ y \leq -x - 5\sqrt{2}(\sqrt{1 - n^2} + n) \end{cases}$$





На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

- 1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
ИЗ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Черновик
№1

$$A = \overline{aaaa} = 1000a + 100a + 10a + a = 1111a$$

$$B = mn6 = m6n = 6mn \rightarrow 100m + 10n + 6$$

$$C = \overline{c3} \text{ или } \overline{3c}$$

$$\begin{matrix} " \\ 10c+3 \end{matrix} \quad \begin{matrix} " \\ 30+c \end{matrix}$$

$$\begin{matrix} \rightarrow 100m + 60 + n \\ 600 + 10m + n \end{matrix}$$

$$1. A \cdot B \cdot C = 1111a \cdot (10c+3) \cdot B$$

$$K = \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{5}{xy} = \frac{1}{x-2} + \frac{1}{y+2} + \frac{5}{(x-2)(y+2)}$$

$$\frac{y+x+5}{xy} = \frac{y+2+x/2+5}{(x-2)(y+2)}$$

$$\frac{x+y+5}{xy} = \frac{x+y+5}{(x-2)(y+2)} \Rightarrow xy = (x-2)(y+2)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} x \neq 0 \\ y \neq 0 \\ x \neq 2 \\ y \neq -2 \end{array} \right.$$

$$xy = xy + 2x - 2y - 4$$

$$0 = 2x - 2y - 4$$

$$x - y - 2 = 0$$

$$x = y + 2$$

$$M = x^3 - y^3 - 6xy =$$

$$= x^3 - y^3 - 6(y+2)y =$$

$$= x^3 + 6y^2 + 12y + 8 - y^3 - 6(y^2 + 2y) =$$

$$= 6y^2 + 12y + 8 - 6y^2 - 12y = 8$$

$$(y+2)(y+2)(y+2) =$$

$$= (y^2 + 4y + 4)(y+2) =$$

$$= y^3 + 2y^2 + 4y^2 + 8y + 4y + 8 =$$

$$= y^3 + 6y^2 + 12y + 8$$

* n - однокл.

$$C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

C_n^k - кол-во
вар-в выбрать ч-к
человек

x - кол-во
билетов
в конц

$$x > n$$

C_{n-2}^2 - кол-во способов
победить Василия Петрова

$\frac{C_{n-2}^2}{C_n^4}$ - вер-ть
в начале

$\frac{C_{n-2}^2}{C_n^x}$ - вер-ть
в конц



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

- | | | | | | | |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|
| <input type="checkbox"/> 1 | <input type="checkbox"/> 2 | <input type="checkbox"/> 3 | <input type="checkbox"/> 4 | <input type="checkbox"/> 5 | <input type="checkbox"/> 6 | <input type="checkbox"/> 7 |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|

СТРАНИЦА
ИЗ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач **нумеруются отдельно**. Порча QR-кода недопустима!

$$6 \cdot \frac{C_{n-2}^2}{C_n^4} = \frac{C_{n-2}^{x-2}}{C_n^x}$$

$$6 \cdot \frac{(n-2)!}{2!(n-2-2)!} = \frac{(n-2)!}{\frac{n!}{4!(n-4)!} \cdot \frac{(x-2)!(n-2-x+2)!}{x!(n-x)!}}$$

$$\frac{6 \cdot (n-2)!}{2!(n-4)!} \cdot \frac{4!(n-4)!}{n(n-1)} = \frac{n-2!}{(x-2)!(n-x)!} \cdot \frac{x!(n-x)!}{n(n-1)}$$

$$\frac{6 \cdot 4 \cdot 3}{n(n-1)} = \frac{x(x-1)}{n(n-1)} \Rightarrow 6 \cdot 4 \cdot 3 = x(x-1)$$

$$\cancel{6} \cdot \cancel{4} \cdot \cancel{3} = x^2 - x - 72 \quad D = 1-4.$$

№3

$$(\sin \pi x + \sin \pi y) \sin \pi x = (\cos \pi x - \cos \pi y) \cos \pi x$$

$$\sin^2(\pi x) + \sin(\pi x) \sin(\pi y) = \cos^2(\pi x) - \cos(\pi x) \cos(\pi y)$$

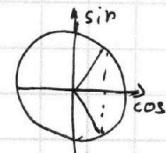
87

$$\cos(\pi x) \cos(\pi y) + \sin(\pi x) \sin(\pi y) = \cos^2(\pi x) - \sin^2(\pi x)$$

$$\cos(\pi x - \pi y)$$

$$\cos(2\pi x)$$

$$\cos(\pi(x-y)) = \cos(\pi(2x))$$



$$\cos \alpha = \cos \beta \rightarrow \begin{cases} \alpha = \beta + 2\pi k, k \in \mathbb{Z} & \textcircled{1} \\ \alpha = -\beta + 2\pi k, k \in \mathbb{Z} & \textcircled{2} \end{cases}$$

$$\textcircled{1} \quad \pi(x-y) = \pi(2x) + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}$$

$$x-y = 2x + 2k.$$

$$-y = x + 2k$$

$$x = -y - 2k$$

$$x = -y + 2k, k \in \mathbb{Z}$$

$$\textcircled{2} \quad \pi(x-y) = -\pi(2x) + 2\pi k$$

$$x-y = -2x + 2k$$

$$3x = y + 2k$$

$$x = \frac{y}{3} + \frac{2k}{3}$$

$$x = \frac{y}{3} + \frac{2}{3}k, k \in \mathbb{Z}$$