



МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

11 КЛАСС. Вариант 1



1. [3 балла] Найдите все тройки натуральных чисел $(A; B; C)$ такие, что:
- A — четырёхзначное число, составленное из одинаковых цифр,
 - B — трёхзначное число, хотя бы одна из цифр которого равна 2,
 - C — двузначное число, хотя бы одна из цифр которого равна 3,
 - произведение $A \cdot B \cdot C$ является квадратом некоторого натурального числа.
2. [3 балла] Положительные числа x и y таковы, что значение выражения $K = \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{2}{xy}$ не изменяется, если x уменьшить на 1, а y — увеличить на 1. Найдите все возможные значения выражения $M = x^3 - y^3 - 3xy$.
3. [5 баллов] а) Найдите все пары действительных чисел $(x; y)$ такие, что $(\sin \pi x + \sin \pi y) \sin \pi x = (\cos \pi x + \cos \pi y) \cos \pi x$.
- б) Сколько пар целых чисел (x, y) удовлетворяют одновременно этому уравнению и неравенству

$$\arcsin \frac{x}{5} + \arccos \frac{y}{4} < \frac{3\pi}{2}?$$

4. [4 балла] В начале месяца было выделено 4 билета на праздничный концерт, которые планировалось случайным образом распределить между одиннадцатиклассниками. В конце месяца выяснилось, что будет выделено больше 4 билетов. Одиннадцатиклассники Петя и Вася вычислили, что вероятность им обоим вместе попасть на концерт в начале месяца была в 2,5 раза меньше, чем оказалась в конце месяца. Сколько всего было выделено билетов на концерт в конце месяца, если количество одиннадцатиклассников не изменилось?
5. [5 баллов] Точка O — центр окружности ω_1 , описанной около остроугольного треугольника ABC . Окружность ω_2 , описанная около треугольника BOC , пересекает отрезок AB в точке P . Найдите площадь треугольника ABC , если $AP = \frac{15}{2}$, $BP = 5$, $AC = 9$.
6. [6 баллов] На координатной плоскости изображена фигура $\Phi(\alpha)$, состоящая из всех точек, координаты $(x; y)$ которых удовлетворяют системе неравенств

$$\begin{cases} (x - 3\sqrt{2} \sin \alpha)(y - 3\sqrt{2} \cos \alpha) \leq 0, \\ x^2 + y^2 \leq 25. \end{cases}$$

Найдите максимальное значение M периметра (длины границы) фигуры $\Phi(\alpha)$ и укажите все значения α , при которых оно достигается.

7. [6 баллов] Шар Ω касается всех рёбер правильной усечённой пирамиды, а шар ω касается всех её граней. Пусть сторона верхнего основания меньше, чем сторона нижнего. Найдите отношение площади боковой поверхности пирамиды к площади её нижнего основания.



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.



2



3



4



5



6



7



СТРАНИЦА

1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$A = \overline{aaaa} = a \cdot 1111 = a \cdot 11 \cdot 101 \quad a \in [1, 9] \quad a \in \mathbb{N}$$

~~Q~~ $A : 101 \Rightarrow$ В так же делится на 101, т.к. С не может на него делиться

Т.к. хотя бы одна из цифр $B = 2$, $B = 202 = 2 \cdot 101$

$A : 11 \Rightarrow C : 11$, т.к. $202 \nmid 11$

Хотя бы из цифр C это $3 \Rightarrow C = 33 = 3 \cdot 11$

$$\text{сл } A \cdot B \cdot C = 11^2 \cdot 101^2 \cdot 3 \cdot 2 \cdot a$$

Т.к. $A \cdot B \cdot C$ - полный квадрат, $a = 6 \Rightarrow A = 6666$

Ответ: $A = 6666$; $B = 202$; $C = 33$.



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

☐☒☐☐☐☐☐

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{2}{xy} = \frac{1}{x-1} + \frac{1}{y+1} + \frac{2}{(x-1)(y-1)} \quad x \neq 0; 1; y \neq 0; -1$$

$$\frac{x+y+2}{xy} = \frac{y+1+x-1+2}{(x-1)(y+1)}$$

$$(x+y+2) \left(\frac{xy+x-y-1-xy}{xy(x-1)(y+1)} \right) = 0$$

$$(x+y+2)(x-y-1) = 0$$

$$x \text{ и } y - \text{положительные} \Rightarrow x+y+2 > 0$$

$$x-y-1 = 0$$

$$M-1 = x^3 - y^3 - 3xy - 1$$

$$\text{Используем формулу } a^3 + b^3 + c^3 - 3abc = (a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ac)$$

$$M-1 = (x-y-1)(x^2+y^2+1+xy+x-y)$$

$$x-y-1=0 \Rightarrow M-1=0 \Rightarrow M=1$$

Ответ: 1.



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☒	☐	☐	☐	☐

СТРАНИЦА
1 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$(\sin^2 \pi x + \sin^2 \pi y) \sin \pi x = (\cos^2 \pi x + \cos^2 \pi y) \cos \pi x$$

$$\cos^2 \pi x - \cos^2 \pi y + \cos \pi x \cos \pi y - \sin \pi x \sin \pi y = 0$$

$$\cos(2\pi x) + \cos(\pi x + \pi y) = 0$$

$$2 \cos\left(\frac{3x+y}{2}\pi\right) \cdot \cos\left(\frac{x-y}{2}\pi\right) = 0$$

$$\begin{cases} \frac{3x+y}{2}\pi = \frac{\pi}{2} + \pi n & n \in \mathbb{Z} \\ \frac{x-y}{2}\pi = \frac{\pi}{2} + \pi k & k \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \frac{3x+y}{2}\pi = \frac{\pi}{2} + \pi n \\ \frac{x-y}{2}\pi = \frac{\pi}{2} + \pi k \end{cases}$$

$$2x = 1 + k + n$$

$$x = \frac{1+k+n}{2}$$

$$y = -1 + n - k$$

$$\arcsin \frac{1+k+n}{10} + \arccos \frac{-1+n-k}{8} < \frac{3\pi}{2}$$

$$\arcsin \frac{1+k+n}{10} \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \quad \arccos \frac{-1+n-k}{8} \in [0, \pi]$$

$$\arcsin \frac{1+k+n}{10} + \arccos \frac{-1+n-k}{8} \leq \frac{3\pi}{2}$$

$$\text{Равенство достигается при } \arcsin \frac{1+k+n}{10} = \frac{\pi}{2}$$

$$\arccos \frac{-1+n-k}{8} = \pi$$

$$\begin{cases} \frac{1+k+n}{10} = 1 \\ \frac{-1+n-k}{8} = -1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} n+k=9 \\ n-k=-7 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} n=1 \\ k=8 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=5 \\ y=-4 \end{cases}$$

$$\begin{cases} -4 \leq \frac{1+k+n}{10} \leq 1 \\ -1 \leq \frac{-1+n-k}{8} \leq 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -4 \leq k+n \leq 9 \\ -4 \leq n-k \leq 9 \end{cases} \Rightarrow -9 \leq n \leq 9$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.



СТРАНИЦА
2 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\left. \begin{aligned} -1 \leq \frac{x}{5} \leq 1 \\ -1 \leq \frac{y}{4} \leq 1 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \begin{cases} -5 \leq x \leq 5 \\ -4 \leq y \leq 4 \end{cases}$$

Каждому из x соответствует 9 значений y , каждому из y соответствует 11 значений $x \Rightarrow$ всего $11 \cdot 9 = 99$ решений
вычитая 1 не подходящее решение $x=5; y=-4$, получаем
 98 решений

Ответ: а) $x = \frac{1+k+n}{2}, y = \frac{-1+n-k}{2}, n, k \in \mathbb{Z}$; б) 98

$$\left. \begin{aligned} -1 \leq \frac{1+k+n}{2} \leq 1 \\ -1 \leq \frac{-1+n-k}{2} \leq 1 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \begin{cases} -1 \leq k+n \leq 9 \\ -4 \leq n-k \leq 9 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} n \in [-9, 9] \\ k \in [-10, 8] \end{cases}$$

$$\begin{cases} x \in [-5, 5] \\ y \in [-4, 4] \end{cases}$$

~~$\begin{cases} n+k=2x-1 \\ n-k=2y+1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} n=x+y \\ k=x-y \end{cases}$~~



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☒	☐	☐	☐

СТРАНИЦА

1 из 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Пусть n — количество одиноклассников,
 x — количество выделенных билетов в конце месяца
В конце месяца всего способов раздать билеты — C_n^x
Способов раздать билеты так, чтобы ~~они~~ билеты попались или
обоим — C_{n-2}^{x-2}

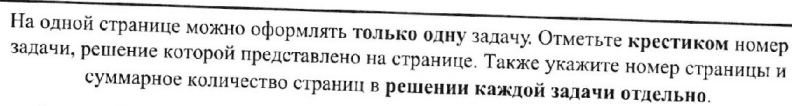
$$\frac{C_{n-2}^{x-2}}{C_n^x} = \frac{\frac{(n-2)!}{(n-x)!(x-2)!}}{\frac{n!}{(n-x)!x!}} = \frac{(n-2)!x!}{n!(x-2)!} = \frac{x(x-1)}{n(n-1)}$$

$$\frac{5 \cdot 4 \cdot (4-1)}{2 \cdot n(n-1)} = \frac{x(x-1)}{n(n-1)}$$

~~$x=4, 6, 8$~~ $x^2 - x - 30 = 0$

$x=4, 6, 8$ ~~$x=6, -8$~~ $x > 0$

Ответ: 6.



СТРАНИЦА
1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. **Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!**

Проведён ОБ и ОС

$OB = OC$, т.к. это радиусы ω_1

$\angle OCB = \angle OBC = \alpha$ как углы в равнобедренном $\triangle KCB$

$$\angle OPB + \angle OCB = 180^\circ, \text{ T.K.}$$

OPBC - вписанный четырехугольник =)

$$\Rightarrow \angle OPB = 180^\circ - \alpha \Rightarrow \angle APO = 180^\circ - \angle OPB = \alpha$$

$\angle CAB = \frac{1}{2} \angle COB = 90^\circ - \alpha$, т.к. это вписанный и центральный углы окружности ω , опирающиеся на BC

H-пересечение РВ и Ас

$$\angle AHP = 180^\circ - \angle MAP - \angle HPA = 90^\circ$$

О лежит на ~~центре~~ ^{середина} перпендикуляре к AC , т.к. это центр описанной окружности $\Rightarrow M$ - центр Ac

$$AM = MC = \frac{g}{2}$$

$$\cos(90-\alpha) = \sin \alpha = \frac{AM}{AP} = \frac{3}{5} \Rightarrow \cos \alpha = \sin(90-\alpha) = \frac{4}{5}$$

$$S_{ABC} = \frac{AC \cdot AP \cdot PB \cdot \sin(90^\circ - \alpha)}{2} = 45$$

Ответ: 45

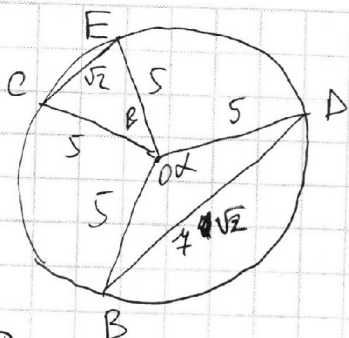


На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.



СТРАНИЦА
2 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



Т. косинусов для $\triangle OCE$ и $\triangle BOD$:

$$98 = 50 - 50 \cos \alpha$$

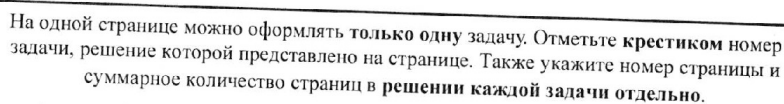
$$12 = 50 - 50 \cos \beta$$

$$\begin{cases} \cos \alpha = -\frac{24}{25} \\ \cos \beta = \frac{24}{25} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \sin \alpha = \sqrt{1 - \frac{24^2}{25^2}} = \frac{7}{25} \\ \sin \beta = \sqrt{1 - \frac{24^2}{25^2}} = \frac{7}{25} \end{cases}$$

Длина дуги CE и BD = ~~$5 \arccos \frac{24}{25}$~~

$$= 5 \left(\arccos -\frac{24}{25} + \arccos \frac{24}{25} \right)$$

$$\text{Ответ: } 16 + 5 \arccos -\frac{24}{25} + 5 \arccos \frac{24}{25}$$



1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☒ 7 ☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

СТРАНИЦА 1 ИЗ 2

СТРАНИЦА
1 ИЗ 2

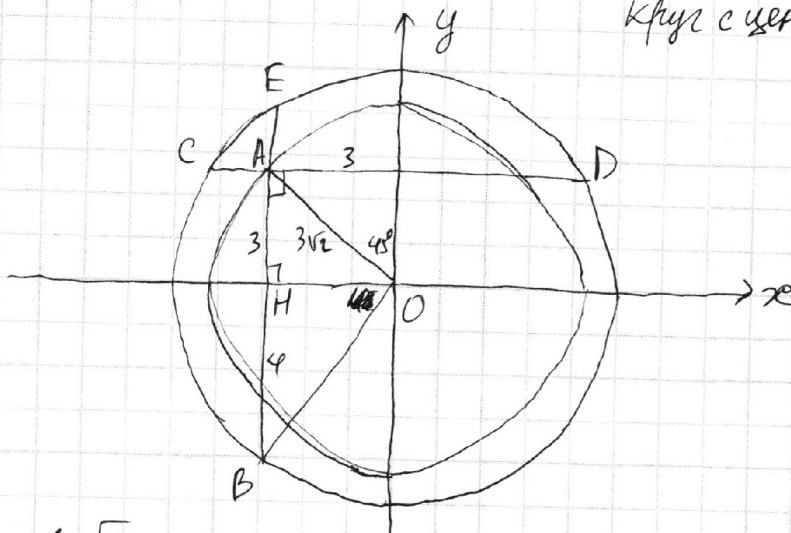
$$x - 3\sqrt{2}\sin\alpha = 0; y - 3\sqrt{2}\cos\alpha = 0 - 2 \text{ не перпендикулярные}$$

прямые, движущиеся по плоскости на 4 части. Неравенство
будет выполняться в левой верхней и правой нижней части.

Точка пересечения прямых $\begin{cases} x = 3\sqrt{2} \sin \alpha \\ y = 3\sqrt{2} \cos \alpha \end{cases}$ движется по окружности

$x^2 + y^2 = 3\sqrt{2}$ в зависимости от α . 2-е коэф-во определяет

Круг с центром в $(0; 0)$
радиуса 5



Периметр будет максимальным тогда, когда точка пересечения 2-х прямых будет $(-3\sqrt{2}; 3\sqrt{2})$ или $(3\sqrt{2}; -3\sqrt{2})$

Обозначим точки A, B, C, D, E, O, M

$$AM = MO = 3$$

$$BM = EM = \sqrt{OB^2 - OM^2} = 4$$

$$CD + EB = 4 \cdot BM = 16$$

$$BD = \sqrt{AB^2 + AD^2} = 7\sqrt{2}$$

$$CE = \sqrt{AC^2 + AE^2} = \sqrt{2}$$

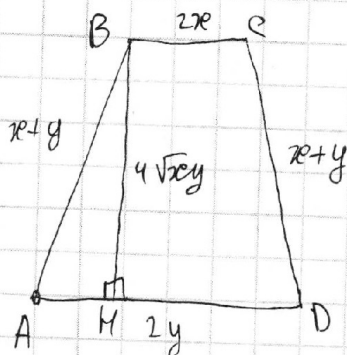


На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☒

СТРАНИЦА
1 из 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



ABCD - боковая сторона усеченной пирамиды
Поскольку усеченная пирамида правильная,

$$AB = CD$$

$$BC \parallel AD$$

Множество всех ребер $\Rightarrow$ сечение
шара плоскостью ABCD - круг, вписанный в

$$ABCD \Rightarrow AB + CD = BC + AD \Leftrightarrow ABCD - \text{равнобокая трапеция}$$

$$\text{Пусть } BC = 2x; AD = 2y$$

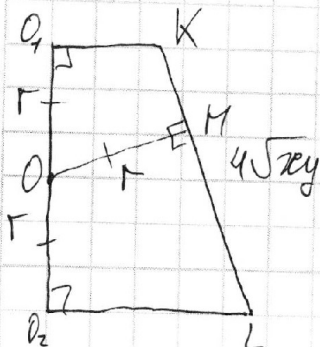
$$\text{Тогда } AB = CD = x + y$$

Опустим высоту BH на AD

$$AH = y - x$$

$$BH = \sqrt{AB^2 - AH^2} = 4\sqrt{xy}$$

O_1, O_2 - центры верхней и нижней грани



K, L - середины ~~х~~ ребер верхней и нижней грани

O - центр шара ω , O лежит на O_1, O_2

$OO_1 \perp KN$ - перпендикуляр, опущенный на KL
 $OO_1 = OH = OO_2$ как радиусы

$$KL = 4\sqrt{xy}$$

$OO_2 \perp LM; OO_1 \perp KN$ - дельтаиды

$$KL = KM + ML = O_1K + O_2L = 4\sqrt{xy}$$

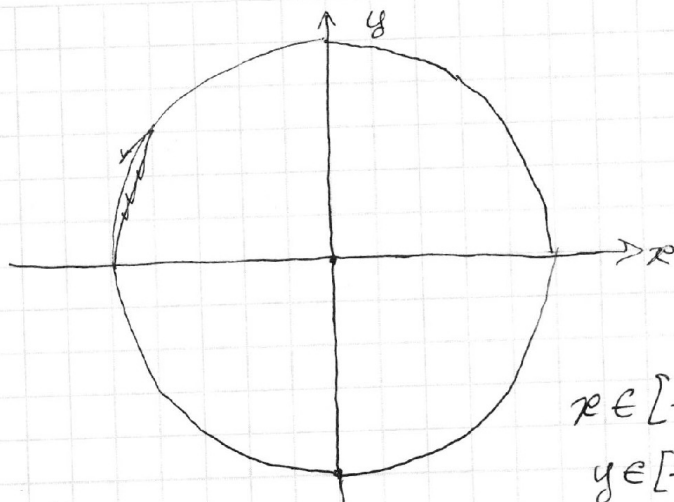
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.



1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА
— ИЗ —

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



$$x \in [-5, 5]$$

$$y \in [-4, 4]$$

$$\arcsin\left(\frac{1+k+n}{10}\right) + \arccos\left(\frac{-1+n-k}{8}\right) < \frac{3\pi}{2}$$

$$\arcsin \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$$

$$\arccos \in [0, \pi]$$

$$x=5 \quad y=-4$$

$$\begin{cases} n+k=9 \\ n-k=-4 \end{cases}$$

$$\begin{cases} n=1 \\ k=8 \end{cases}$$

$$-10 \leq 1+k+n \leq 10$$

$$-8 \leq -1+n-k \leq 8$$

$$\begin{cases} -10 \leq k+n \leq 9 \\ -4 \leq n-k \leq 9 \end{cases}$$

$$k-n \leq 4$$

$$k-n \geq -9$$

$$n \geq -11-k$$

$$n \leq 9-k$$

$$k \leq n+4$$

$$k \geq n+4$$

$$-9 \leq n \leq 9$$

$$-10 \leq k \leq 8$$

$$-2 \leq k \leq 18$$

$$-2 \leq k \leq -18$$

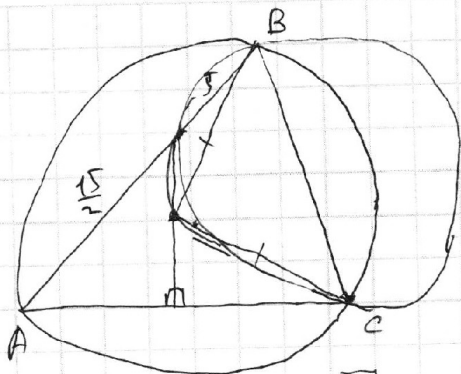


На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐

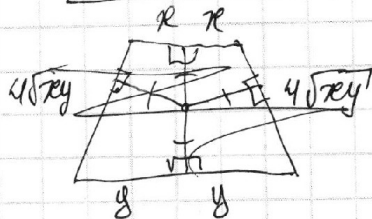
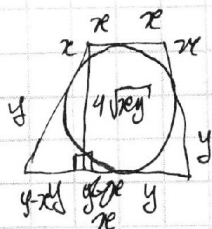
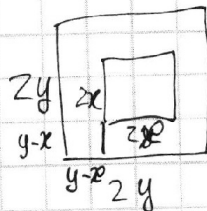
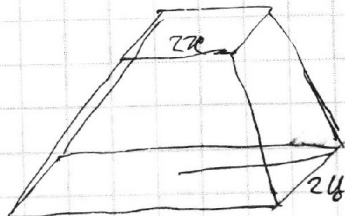
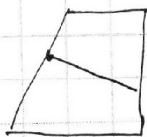
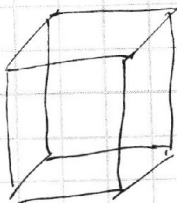
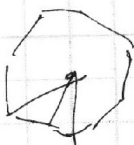
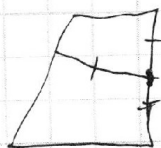
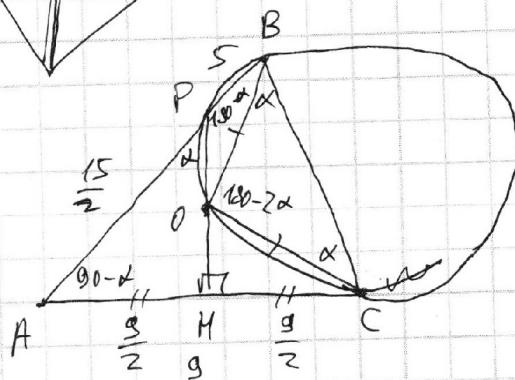
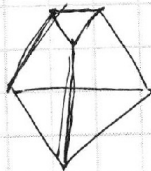
СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



$$PH = \frac{15}{2} \cdot 6$$

$$\alpha =$$



$$\sqrt{2}(y-x)$$

$$\sqrt{2}(y-x)$$

$$2x + 2y = 8\sqrt{xy}$$

$$x + y = 4\sqrt{xy}$$

$$x^2 - 14xy + y^2 = 0$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА
— ИЗ —

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$n = -9$$

$$\leq k \leq 18$$

$$\begin{cases} -11 \leq k+n \leq 9 \\ -4 \leq n-k \leq 9 \end{cases}$$

$$\begin{cases} -11 \leq k+n \leq 9 \\ -4 \leq n-k \leq 9 \end{cases}$$

$$k+n = -11$$

$$n = -9$$

$$n-k = -4$$

$$n+k = 2x-1$$

$$n = x-4$$

$$x = \frac{k+n+1}{2}$$

$$y = \frac{n-k-1}{2}$$

$$k = x+3$$

$$k = 2x-1-x+4$$

$$k+n = 2x-1$$

$$625$$

$$24$$

$$24$$

$$96$$

$$48$$

$$548$$

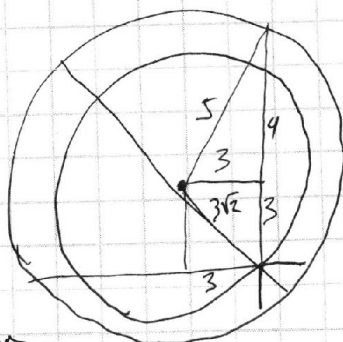
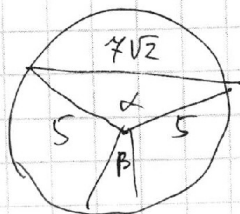
$$\begin{cases} k \leq n+4 \\ k \geq n-9 \end{cases}$$

$$248$$

$$-9 \leq k-n \leq 4$$

$$-10 \leq k \leq 8$$

$$-11 \leq n+k \leq 9$$



$$25\pi \cdot 2 \arccos \frac{24}{25}$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

☐☐☐☐☐☐☐

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$(k^2+1)(x^2+2xy+y^2)-16xy=0$$

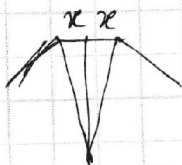
$$48-16k$$

$$x^2+xy \left(2 - \frac{16}{k^2+1} \right) + y^2 = 0$$

$$x^2+2xy \left(\frac{k^2-4}{k^2+1} \right) + y^2 = 0$$

$$\frac{D}{4} = \frac{(k^2-4)^2 - (k^2+1)^2}{(k^2+1)^2} = \frac{-14k^2+49-2k^2-1}{(k^2+1)^2} = \frac{4}{(k^2+1)^2} (3-k^2)$$

$$x =$$



$$x = \left(\frac{k^2-4}{k^2+1} + \frac{4\sqrt{3-k^2}}{k^2+1} \right) y$$

$$3-k^2=t^2$$

$$16xy - (y-x)^2(k^2+1) = 16M^2$$

$$\frac{-t^2-4+4t}{-t^2+4}$$

$$x = \frac{(t+2)^2}{t^2+4} y$$

$$t^2+4+4t$$

$$x = \frac{(t+2)^2}{t^2+4} y = \frac{t^2+4t+4}{t^2+4} y \approx 1 + \frac{4t}{t^2+1}$$

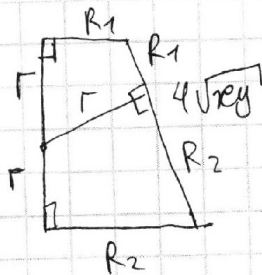


На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

☐☐☐☐☐☐☐

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



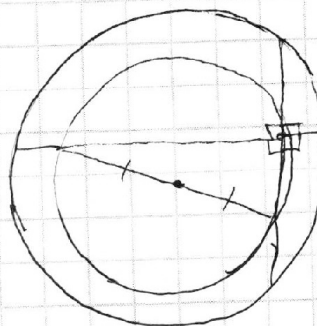
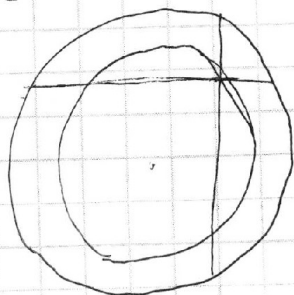
$$R_1 + R_2 = 4\sqrt{xy}$$

$$2R_1^2 + R_2^2 + R_1^2 = 2(R_1 R_2)$$

$$R_1 + R_2 = 10\pi$$

$$b + a = 10\pi$$

$$\begin{cases} x + y = b \\ y + z = a \end{cases}$$





На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$x^3 + y^3 + z^3 + 3xyz = (x+y+z)(x^2+y^2+z^2-xy-yz-zx)$$

$$x^3/(x+y+z) + y^3/(x+y+z) + z^3/(x+y+z)$$

$$\sin \alpha \sin \beta + \sin^2 \alpha = \cos^2 \alpha + \cos \alpha \cos \beta$$

$$\cos 2\alpha + \cos(\alpha + \beta) = 0$$

$$\frac{4}{n} \cdot \frac{3}{n-1}$$

$$\frac{4+x}{n} \cdot \frac{3+x}{n-1} = \frac{5}{2} \cdot \frac{4}{n} \cdot \frac{3}{n-1}$$

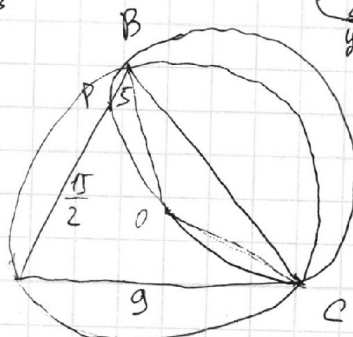
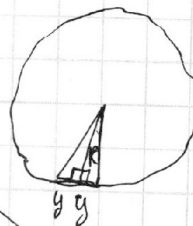
$$x^2 + 7x + 12 = 30$$

$$x^2 + 7x - 18 = 0$$

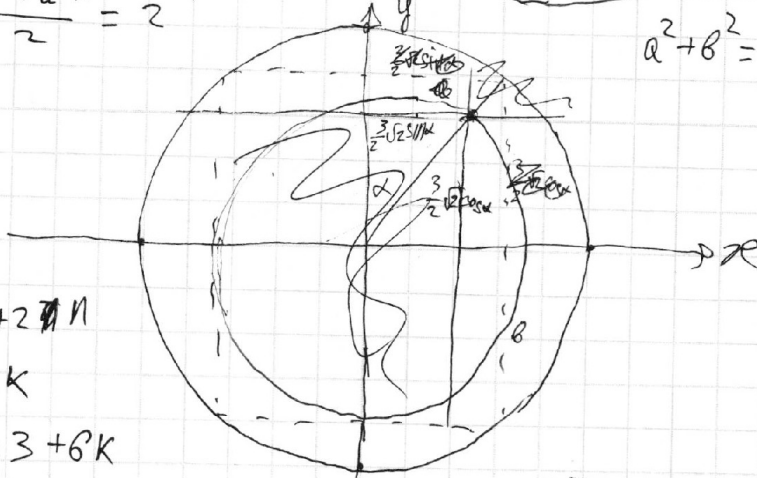
$$D = 49 + 72 = 121$$

$$x = \frac{-7 \pm 11}{2} = 2$$

$$\frac{4!}{(4-2)!2!} = 6$$



$$a^2 + b^2 = 3\sqrt{2}$$

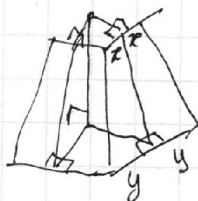


$$\begin{cases} 3x + y = 1 + 2n \\ x - y = 1 + 2k \end{cases}$$

$$3x - 3y = 3 + 6k$$

$$4y = -2 + 2n - 6k$$

$$y = -\frac{1}{2} + \frac{n}{2} - \frac{3}{2}k$$



$$g \cdot \frac{25}{2} \cdot \frac{4}{5}$$

$$\frac{1}{2} kx \sqrt{1+k^2} (x+y) = 4\sqrt{xy}$$

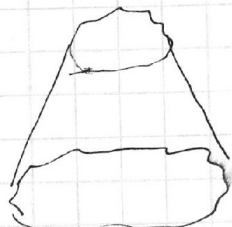


На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи** отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

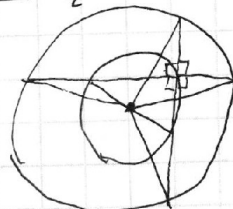
СТРАНИЦА
— ИЗ —

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



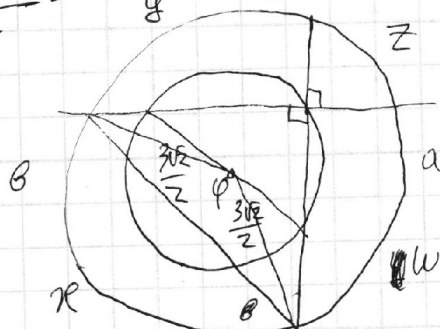
$$y = \frac{x}{2} - \frac{1}{2} - k$$

$$y = \frac{1+k+n}{4} - \frac{1}{2} - k = \frac{n-3k-1}{4}$$



$$\frac{3x+y}{2} - \frac{3x-3y}{2} = -1+n-3k$$

$$y =$$



$$\cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha$$

$$\cos 2\alpha + \cos(\alpha + \beta) = 0$$

$$2 \cos\left(\frac{3\alpha + \beta}{2}\right) \cos\left(\frac{\alpha - \beta}{2}\right) = 0$$

$$\cos(\alpha - \beta) + \cos(\alpha + \beta) = 2 \cos \alpha \cos \beta$$

$$\cos x + \cos y = 2 \cos \frac{x+y}{2} \cos \frac{x-y}{2}$$

$$\begin{cases} \frac{3\pi x + \pi y}{2} = \frac{\pi}{2} + \pi n \\ \frac{x-y}{2} = \frac{1}{2} + k \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{3x+y}{2} = \frac{1}{2} + n \\ \frac{x-y}{2} = \frac{1}{2} + k \end{cases}$$

$$x = 1 + k + n$$

$$\frac{3x+y}{2} - \frac{3x-3y}{2} = -1+n-3k$$

$$y = -\frac{1}{2} + \frac{n-3k}{2}$$

$$\cancel{3x-3y} - \cancel{3x} = \cancel{3x} - \cancel{3x}$$

$$x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz = (x+y+z)(x^2+y^2+z^2 - xy - xz - yz)$$

$$\cancel{x^3 + y^3 + z^3} \quad \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{xy} = \frac{1}{x-1} + \frac{1}{y-1} + \frac{2}{(x-1)(y-1)}$$

$$x^3 - y^3 - 3xy \cdot 1 - 1^3 = (x-y-1)(x^2+y^2+1+xy+x-y)$$

$$M+1 = (x-y-1)(x^2+y^2-y+1)$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$A = a \cdot 1111$$

$$a \cdot 11 \cdot 101$$

$$B = 100b + 10c + d$$

$$B = 202 = 2 \cdot 101$$

$$C = 10e + f$$

$$C = 33 = 3 \cdot 11$$

$$11^2 \cdot 101^2 \cdot 6 \cdot a$$

$$C_n^4 \quad C_{n-2}^2$$

$$= \frac{(n-2)!}{2! \cdot n!} \cdot \frac{(n-4)! \cdot 2!}{4!} \cdot \frac{n!}{(n-4)! \cdot 4!} = \frac{4 \cdot 3}{n-1}$$

$$\frac{(n-2)!}{(n-x)! \cdot (x-2)!} = \frac{(n-2)! x!}{n! (x-2)!} = \frac{x \cdot (x-1)}{n-1}$$

$$R = ky$$

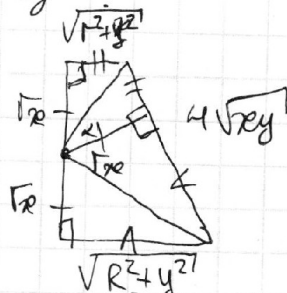
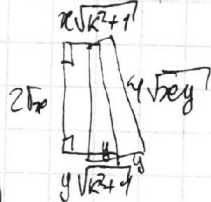
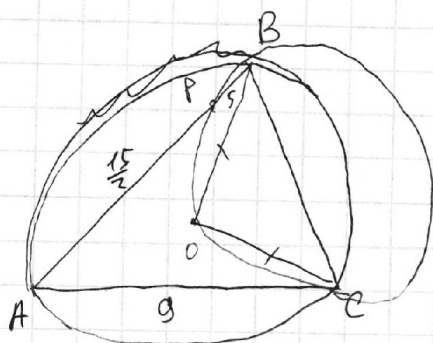
$$r = kx$$

$$x + y + z = 0$$

$$x^3 - y^3 - 3xy = ?$$

$$5x^2 - 5x - 24 = 0$$

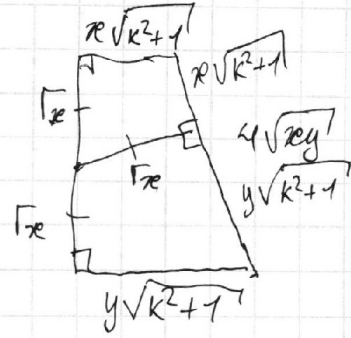
$$D = 25 + 480 = 505$$



$$x^2 + y^2 - R^2 + \frac{x^2}{k^2} = 16xy$$

$$(y-x)^2 + 4x^2 = 16xy$$

$$(k^2+1)(x^2+2xy+y^2) - 4xy = 0$$



$$\sqrt{k^2+1}(x+y) = 4\sqrt{xy}$$

$$x\sqrt{k^2+1}(y+x) = 4x$$

На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.



1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА

— ИЗ —

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\frac{x+y+2}{xy} = \frac{x+y+2}{(x-1)(y+1)}$$

$$\frac{1}{x-1} + \frac{1}{y+1} + \frac{2}{(x-1)(y+1)}$$

$$(x+y+2) \left(\frac{1}{xy+x-y-1} + \frac{1}{xy} \right) = 0$$

$$(x+y+2)(x-y-1) = 0$$

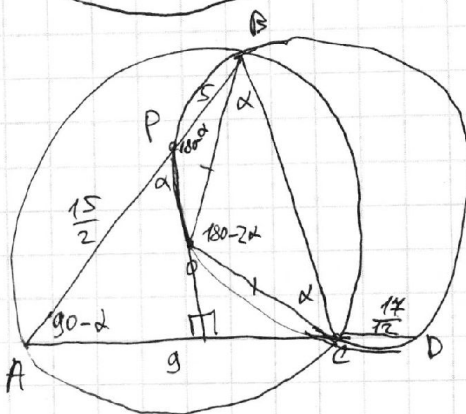
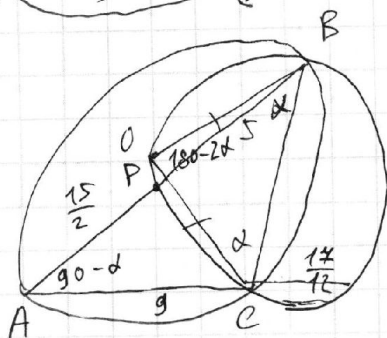
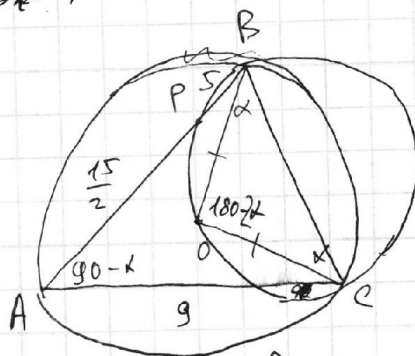
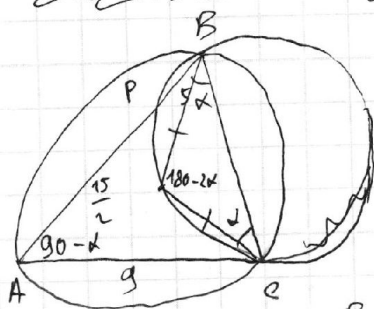
$$x+y = -2$$

$$x^3 + 3x^2 + 3x + 1 + y^3 - 3y^2 - 3y - 1 = 0$$

$$g(g+x) = \frac{15}{2} \cdot \frac{25}{2}$$

$$g+x = \frac{15}{12}$$

$$x = \frac{14}{12}$$



$$\begin{cases} 180-2x + \alpha + \gamma = 180 \\ 180-2x + \gamma + \beta = 180 \end{cases}$$

$$\gamma + \beta = \alpha$$

$$-2x + \beta + 2x - \beta = 0$$