



МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

11 КЛАСС. Вариант 4



1. [3 балла] Найдите все тройки натуральных чисел $(A; B; C)$ такие, что:
- A — четырёхзначное число, составленное из одинаковых цифр,
 - B — трёхзначное число, хотя бы одна из цифр которого равна 7,
 - C — двузначное число, хотя бы одна из цифр которого равна 1,
 - произведение $A \cdot B \cdot C$ является квадратом некоторого натурального числа.
2. [3 балла] Положительные числа x и y таковы, что значение выражения $K = \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{3}{xy}$ не изменяется, если x уменьшить на 4, а y — увеличить на 4. Найдите все возможные значения выражения $M = x^3 - y^3 - 12xy$.
3. [5 баллов] а) Найдите все пары действительных чисел $(x; y)$ такие, что $(\sin \pi y - \sin \pi x) \sin \pi y = (\cos \pi y + \cos \pi x) \cos \pi y$.
- б) Сколько пар целых чисел (x, y) удовлетворяют одновременно этому уравнению и неравенству

$$\arccos \frac{x}{7} - \arcsin \frac{y}{4} > -\frac{\pi}{2}?$$

4. [4 балла] В начале месяца было выделено 4 билета на праздничный концерт, которые планировалось случайным образом распределить между одиннадцатиклассниками. В конце месяца выяснилось, что будет выделено больше 4 билетов. Одиннадцатиклассники Петя и Вася вычислили, что вероятность им обоим вместе попасть на концерт в начале месяца была в 11 раз меньше, чем оказалась в конце месяца. Сколько всего было выделено билетов на концерт в конце месяца, если количество одиннадцатиклассников не изменилось?
5. [5 баллов] Точка O — центр окружности ω_1 , описанной около остроугольного треугольника ABC . Окружность ω_2 , описанная около треугольника BOC , пересекает отрезок AB в точке P . Найдите площадь треугольника ABC , если $AP = 16$, $BP = 8$, $AC = 22$.
6. [6 баллов] На координатной плоскости изображена фигура $\Phi(\alpha)$, состоящая из всех точек, координаты $(x; y)$ которых удовлетворяют системе неравенств

$$\begin{cases} (x + 4 \sin \alpha)(y - 4 \cos \alpha) \leq 0, \\ x^2 + y^2 \leq 36. \end{cases}$$

Найдите максимальное значение M периметра (длины границы) фигуры $\Phi(\alpha)$ и укажите все значения α , при которых оно достигается.

7. [6 баллов] Шар Ω касается всех рёбер правильной усечённой пирамиды, а шар ω касается всех её граней. Найдите угол наклона боковой грани пирамиды к плоскости её основания.



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7
☒ ☐ ☐ ☐ ☐ ☐ ☐

СТРАНИЦА
1 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

№ 1
 $A = \overline{aaaa}$

$B = \overline{abc}$, где a или b или $c = 7$

$C = \overline{ab}$, где a или $b = 1$

$A \cdot B \cdot C = K^2$

$A = a \cdot 1111$

~~$1111 = 11 \cdot 101 \Rightarrow B \cdot C$ должно быть делителем 1111~~

$1111 = 11 \cdot 101 \Rightarrow B \cdot C$ должно содержать множители 11 и 101

Т.к. 101 и 11 взаимнопросты, а

B — трёхзначное, $B \neq 101 \cdot 11 \cdot p \Rightarrow$

$\Rightarrow$ множитель 11 содержится

в числе C , а т.к. в

нём есть по крайней мере одна цифра 1 ; $C = 11$

$B = 101 \cdot K$, т.к. в числе B есть 7 , то $B = 707$

$A \cdot B \cdot C = a \cdot 11 \cdot 101 \cdot 11 \cdot 101 \cdot 7 = K^2 \Rightarrow a = 7, A = 7777$

Ответ: $(7777; 707; 11)$

$$\begin{array}{r} 1111 \overline{) 13} \\ 107 \\ \hline 21 \\ 21 \\ \hline 0 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 1111 \overline{) 17} \\ 102 \\ \hline 21 \\ 21 \\ \hline 0 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 1111 \overline{) 19} \\ 25 \\ \hline 161 \\ 152 \\ \hline 9 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 1111 \overline{) 29} \\ 87 \\ \hline 241 \\ 232 \\ \hline 9 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 1111 \overline{) 11} \\ 11 \\ \hline 011 \\ 11 \\ \hline 0 \end{array}$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1
☐

2
☒

3
☐

4
☐

5
☐

6
☐

7
☐

СТРАНИЦА
2 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

N. 2

$$k = \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{3}{xy} = \frac{x+y+3}{xy}$$

$$\frac{x+y+3}{xy} = \frac{x-4+y+4+3}{(x-4)(y+4)}$$

$$xy = (x-4)(y+4)$$

$$xy = xy + 4x - 4y - 16$$

$$4(y-x) = -16$$

$$\underline{x-y=4}$$

$$\begin{aligned} M &= x^3 - y^3 - 12xy = (x-y)(x^2 + xy + y^2) - 12xy = \\ &= 4(x^2 + xy + y^2) - 12xy = 4x^2 + 4xy + 4y^2 - 12xy = \\ &= 4x^2 - 8xy + 4y^2 = 4(x-y)^2 = 4 \cdot 16 = 64 \end{aligned}$$

Ответ: 64



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении **каждой** задачи отдельно.

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☒	☐	☐	☐	☐

СТРАНИЦА
5 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

N. 3

8) $y = -2 \Rightarrow x = 3 + 2k$ ($k = -5; \dots; 7$) или $x = -7 + 2k$ ($k = -7; \dots; 0$)
всего 16 пар

9) $y = 1 \Rightarrow x = 2 + 2k$ ($k = -4; \dots; 2$) или $x = -4 + 2k$ ($k = -5; \dots; 1$)
всего 14 пар

$$N = (16 + 14) \cdot 4 + 16 = \boxed{136}$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☒ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА
3 из 9

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

N.3

a) $(\sin \pi y - \sin \pi x) \sin \pi y = (\cos \pi y + \cos \pi x) \cos \pi y$

$$\sin^2 \pi y - \sin \pi x \cdot \sin \pi y = \cos^2 \pi y + \cos \pi x \cdot \cos \pi y$$

$$\cancel{\sin^2 \pi y - \cos^2 \pi y - \sin \pi x \cdot \sin \pi y} = \cancel{\cos^2 \pi x \cdot \cos \pi y} = 0$$

$$\cancel{(\sin \pi y - \cos \pi y)(\sin \pi y + \cos \pi y)}$$

$$-\sin \pi x \cdot \sin \pi y - \cos \pi x \cdot \cos \pi y = \cos^2 \pi y - \sin^2 \pi y$$

$$-(\cos \pi x \cdot \cos \pi y + \sin \pi x \cdot \sin \pi y) = \cos^2 \pi y - \sin^2 \pi y$$

$$-\cos(\pi x - \pi y) = \cos 2\pi y$$

$$\cos 2\pi y + \cos(\pi x - \pi y) = 0$$

$$2 \cos \frac{\pi y + \pi x - \pi y}{2} \cdot \cos \frac{\pi y - \pi x + \pi y}{2} = 0 \quad | :2$$

$$\cancel{2 \cos} \cos \frac{\pi y + \pi x}{2} \cdot \cos \frac{3\pi y - \pi x}{2} = 0$$

$$\begin{cases} \cos \frac{\pi y + \pi x}{2} = 0 \\ \cos \frac{3\pi y - \pi x}{2} = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{\pi y + \pi x}{2} = \frac{\pi}{2} + \pi n \quad | : \pi \\ \frac{3\pi y - \pi x}{2} = \frac{\pi}{2} + \pi k \quad | : \pi \end{cases}, n, k \in \mathbb{Z} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \frac{x+y}{2} = \frac{1}{2} + n \\ \frac{3y-x}{2} = \frac{1}{2} + k \end{cases}, n, k \in \mathbb{Z} \Rightarrow \begin{cases} x+y = 2n+1 \\ 3y-x = 2k+1 \end{cases}, n, k \in \mathbb{Z} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = -y + 2n + 1 & (1) \\ x = 3y - 2k - 1 & (2) \end{cases}, n, k \in \mathbb{Z}$$

Ответ: $(-y + 2n + 1, y), (3y - 2k - 1, y), n, k \in \mathbb{Z}, y$ — любое



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☒	☐	☐	☐	☐

СТРАНИЦА
4 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$(1) \quad x = -y + 2n + 1$$

$$(\sin \pi y - \sin \pi(-y + 2n + 1)) \cdot$$

$$\begin{aligned} & (\sin \pi y - \sin \pi x) \sin \pi y = (\cos \pi y + \cos \pi x) \cos \pi y \\ & \cancel{x \sin \frac{\pi(y-x)}{2} \cos \frac{\pi(y+x)}{2} \cdot \sin \pi y = x \cdot \cos \frac{\pi(y+x)}{2} \cdot \cos \frac{\pi(y-x)}{2} \cdot \cos \pi y} \\ & \cancel{y \sin \frac{\pi(y-x)}{2} \cos \frac{\pi(y+x)}{2} \cdot \sin \pi y = y \cdot \cos \frac{\pi(y+x)}{2} \cdot \cos \frac{\pi(y-x)}{2} \cdot \cos \pi y} \end{aligned}$$

п. 3

$$1) \quad \arccos \frac{x}{7} - \arcsin \frac{y}{4} > -\frac{\pi}{2}$$

$$023: \begin{cases} -1 \leq \frac{x}{7} \leq 1 \\ -1 \leq \frac{y}{4} \leq 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -7 \leq x \leq 7 \\ -4 \leq y \leq 4 \end{cases}$$

$$\arccos \frac{x}{7} - \arcsin \frac{y}{4} > -\arccos \frac{y}{4} - \arcsin \frac{y}{4}$$

$$\arccos \frac{x}{7} + \arccos \frac{y}{4} > 0$$

$$\arccos \frac{x}{7} > -\arccos \frac{y}{4}$$

$$\cos(\arccos \frac{x}{7}) > \cos(-\arccos \frac{y}{4})$$

$$\frac{x}{7} > -\frac{y}{4} \quad | \cdot 28$$

$$4x > -7y$$

$$7y + 4x > 0; \quad 7x + 7y > 0$$

Можно получить пары вида $(-y + 2n + 1; y)$, или $(3y - 2x - 1; y)$,

$$\underline{y = -4, \quad x = 5 + 2n} \quad \text{по 7.к.}$$

$$1) \quad y = -4 \Rightarrow x = 5 + 2n \quad (n = 0; \dots; 1) \quad \text{или} \quad x = -13 - 2k \quad (k = 2; \dots; 1)$$

$k = -10; -8; \dots; -3$
Всего 16 пар

$$2) \quad y = -3 \Rightarrow x = 4 + 2n \quad (n = -5; \dots; 1) \quad \text{или} \quad x = -10 - 2k \quad (k = -8; \dots; -2)$$

Всего 14 пар



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☒ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА
6 из 9

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

№ 4

Планы оркестрантов было N , тогда верны планы
всего на концерт в начале месяца у 10 и в конце
равна $\frac{4}{N} \cdot \frac{3}{N-1}$ а в конце месяца стала $\frac{4+x}{N} \cdot \frac{3+x}{N-1}$

~~$$\frac{4}{N} \cdot \frac{3}{N-1} = 11 \cdot \frac{4+x}{N} \cdot \frac{3+x}{N-1} \quad | \cdot N(N-1)$$~~

~~$$4(N-1) \cdot 3N = 11N(N-1) \cdot (4+x)(N-1) \cdot (3+x)N$$~~

~~$$(4N-4) \cdot 3N = (11N)(4+x)(N-1) \cdot (3+x)N$$~~

~~$$\frac{(4+x)(3+x)}{N(N-1)} : \frac{4 \cdot 3}{N(N-1)} = 11$$~~

~~$$\frac{(4+x)(3+x) \cdot N(N-1)}{N(N-1) \cdot 12} = 11$$~~

~~$$(x+4)(x+3) = 132$$~~

~~$$x^2 + 7x - 120 = 0$$~~

~~$$D = 49 + 480 = 529 = 23^2$$~~

~~$$x_{1,2} = \frac{-7 \pm 23}{2} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = -15 \text{ не ок т.к. } < 0 \\ x_2 = 8 \end{cases}$$~~

Ответ: 8 дирижеров



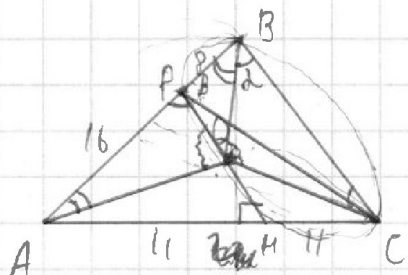
На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☒ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА
7 из 9

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

N. 5



$S_{ABC} = ?$ Окруж. окр. отн. отрез. ABC

$AO = OC = OB$ как радиусы

$PBCO$ - впис. $\rightarrow \angle OCB + \angle OPB = 180^\circ$

$\angle BPO + \angle APO = 180^\circ \rightarrow \angle APO = \angle BCO$

Пусть $\angle BCO = \alpha$; $\angle PBO = \alpha$

$PBCO$: $\alpha + \angle POC = 180^\circ$

$\triangle APO$: $\alpha + \angle AOP = 180^\circ$

$\rightarrow \angle POC = \angle AOP$

$\triangle APO = \triangle CPO$ ($\angle POC = \angle AOP$, PO - общ., $AO = OC$) $\rightarrow$

$\rightarrow AP = CP = 16$, $\angle APO = \angle CPO = \alpha$, $\angle BPC = 180 - 2\alpha$

$\alpha + \gamma = 180^\circ$ ($\angle POC = \gamma$)

$\triangle APC$: $\angle APO = \angle OPC = \alpha \rightarrow PO$ - медиана $\triangle APC$, $\triangle APC$ - $\triangle$ $\rightarrow$

$\rightarrow PH$ - выс. и мед. (H - точка пересек. PO и AC)

$\triangle APH$ - $\triangle$: $\sin \alpha = \frac{2}{16}$

$$PH = \sqrt{16^2 - 2^2} = \sqrt{(16-2)(16+2)} = \sqrt{5 \cdot 27} = 3\sqrt{15}$$

$$\rightarrow \sin \angle PAH = \frac{3\sqrt{15}}{16}$$

$$S_{ABC} = \frac{1}{2} \cdot AB \cdot AC \cdot \sin \angle PAH = \frac{1}{2} \cdot 16 \cdot 11 \cdot \frac{3\sqrt{15}}{16} = \frac{99\sqrt{15}}{2}$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1
☐

2
☐

3
☐

4
☐

5
☐

6
☒

7
☐

СТРАНИЦА
2 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Значит ~~наибольшая~~ ^{или пример} ~~последовательность~~ $\varepsilon(a)$ достигается при

~~$x = 174\pi$~~
 ~~$x = \frac{3\pi}{2} + 2\pi n$~~

$$\begin{cases} x = \pi n \\ x = \frac{\pi}{2} + \pi n \text{ (для второго случая)} \end{cases}$$

$$M = 12 + 4\sqrt{5} + 6\pi$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☒ 7 ☐

СТРАНИЦА
8 из 9

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\begin{cases} (x+4\sin\alpha)(y-4\cos\alpha) \leq 0 & (1) \\ x^2 + y^2 \leq 36 & (2) \end{cases}$$

$$(x+4\sin\alpha)(y-4\cos\alpha) \leq 0$$

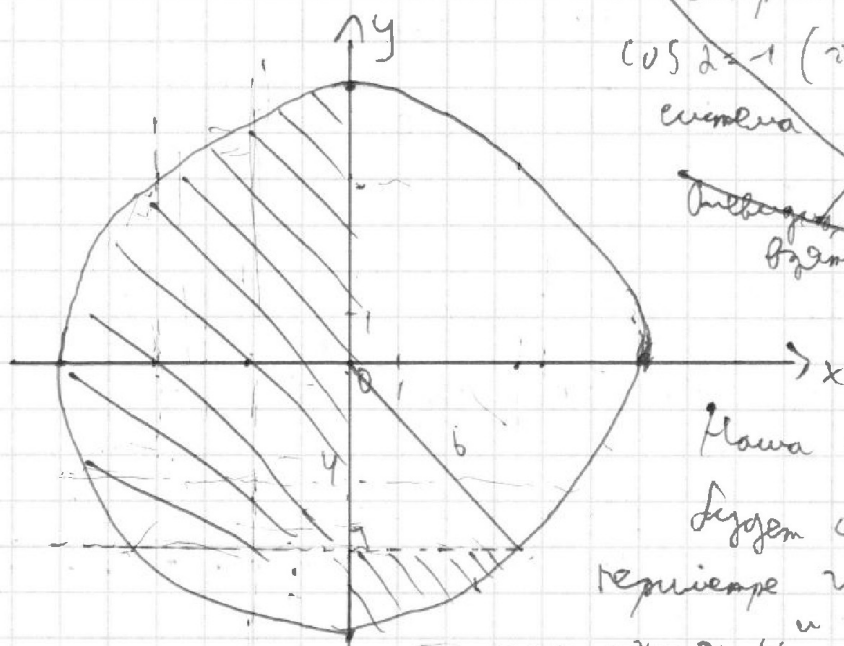
$$\begin{cases} x+4\sin\alpha \leq 0 \\ y-4\cos\alpha \geq 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x+4\sin\alpha \geq 0 \\ y-4\cos\alpha \leq 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x \leq -4\sin\alpha & (1) \\ y \geq 4\cos\alpha \end{cases}$$

$$\begin{cases} x \geq -4\sin\alpha & (2) \\ y \leq 4\cos\alpha \end{cases}$$

$$x^2 + y^2 = 16$$



Рассмотрим первый сл. Возьмем $\cos\alpha = 1$ ($\sin\alpha = 0$) рассмотрим систему $\begin{cases} x \leq 0 \\ y \geq 4 \end{cases}$

Интересно, что максимум y мы взяли не сверху, а при x , y будет уменьшаться быстрее от P будет

Наша фигура $\mathcal{C}(\alpha)$ всегда будет содержаться в своём первом и верх. ось x и y , $-4 \leq x, y \leq 4$

где $x^2 + y^2 = 16$. Следовательно, что тогда

максимальная длина $|x|$ и $|y|$ равно 4. Уменьш при этом

значением длина дуги дуга $\mathcal{C}(\alpha)$ также будет максимальной и будет равна половине окружности.



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

1
☐

2
☐

3
☐

4
☐

5
☐

6
☐

7
☐

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. **Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно.** Порча QR-кода недопустима!

