



МОСКОВСКИЙ  
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ  
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"  
ПО МАТЕМАТИКЕ

11 КЛАСС. Вариант 4



- [3 балла] Найдите все тройки натуральных чисел  $(A; B; C)$  такие, что:
  - $A$  — четырёхзначное число, составленное из одинаковых цифр,
  - $B$  — трёхзначное число, хотя бы одна из цифр которого равна 7,
  - $C$  — двузначное число, хотя бы одна из цифр которого равна 1,
  - произведение  $A \cdot B \cdot C$  является квадратом некоторого натурального числа.
- [3 балла] Положительные числа  $x$  и  $y$  таковы, что значение выражения  $K = \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{3}{xy}$  не изменяется, если  $x$  уменьшить на 4, а  $y$  — увеличить на 4. Найдите все возможные значения выражения  $M = x^3 - y^3 - 12xy$ .
- [5 баллов] а) Найдите все пары действительных чисел  $(x; y)$  такие, что  $(\sin \pi y - \sin \pi x) \sin \pi y = (\cos \pi y + \cos \pi x) \cos \pi y$ .  
б) Сколько пар целых чисел  $(x, y)$  удовлетворяют одновременно этому уравнению и неравенству

$$\arccos \frac{x}{7} - \arcsin \frac{y}{4} > -\frac{\pi}{2}?$$

- [4 балла] В начале месяца было выделено 4 билета на праздничный концерт, которые планировалось случайным образом распределить между одиннадцатиклассниками. В конце месяца выяснилось, что будет выделено больше 4 билетов. Одиннадцатиклассники Петя и Вася вычислили, что вероятность им обоим вместе попасть на концерт в начале месяца была в 11 раз меньше, чем оказалась в конце месяца. Сколько всего было выделено билетов на концерт в конце месяца, если количество одиннадцатиклассников не изменилось?
- [5 баллов] Точка  $O$  — центр окружности  $\omega_1$ , описанной около остроугольного треугольника  $ABC$ . Окружность  $\omega_2$ , описанная около треугольника  $BOC$ , пересекает отрезок  $AB$  в точке  $P$ . Найдите площадь треугольника  $ABC$ , если  $AP = 16$ ,  $BP = 8$ ,  $AC = 22$ .
- [6 баллов] На координатной плоскости изображена фигура  $\Phi(\alpha)$ , состоящая из всех точек, координаты  $(x; y)$  которых удовлетворяют системе неравенств

$$\begin{cases} (x + 4 \sin \alpha)(y - 4 \cos \alpha) \leq 0, \\ x^2 + y^2 \leq 36. \end{cases}$$

Найдите максимальное значение  $M$  периметра (длины границы) фигуры  $\Phi(\alpha)$  и укажите все значения  $\alpha$ , при которых оно достигается.

- [6 баллов] Шар  $\Omega$  касается всех рёбер правильной усечённой пирамиды, а шар  $\omega$  касается всех её граней. Найдите угол наклона боковой грани пирамиды к плоскости её основания.

На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.



1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
1 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

№ 1

$$A = \overline{aaaa}$$

$$B = \overline{abc}, \text{ где } a \text{ или } b \text{ или } c = 7$$

$$C = \overline{ab}, \text{ где } a \text{ или } b = 1$$

$$A \cdot B \cdot C = k^2$$

$$A = a \cdot 1111$$

~~1111 - простое  $\Rightarrow B \cdot C$  должно быть делителем 1111~~

$1111 = 11 \cdot 101 \Rightarrow B \cdot C$  должно содержать множители 11 и 101

Т.к. 101 и 11 взаимнопросты, а

$B$  - трёхзначное,  $B \neq 101 \cdot 11 \cdot p \Rightarrow$

$\Rightarrow$  множитель 11 содержится

в числе  $C$ , а т.к. в

числе  $C$  по крайней мере одна цифра 1;  $C = 11$

$B = 101 \cdot k$ , т.к. в числе  $B$  есть 7, то  $B = 707$

$$A \cdot B \cdot C = a \cdot 11 \cdot 101 \cdot 11 \cdot 101 \cdot 7 = k^2 \Rightarrow a = 7, A = 7777$$

Ответ: (7777; 707; 11)

$$\begin{array}{r} 1111 \overline{) 13} \\ 107 \phantom{00} \\ \hline 71 \phantom{00} \\ 65 \phantom{00} \\ \hline 6 \phantom{00} \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 1111 \overline{) 17} \\ 102 \phantom{00} \\ \hline 91 \phantom{00} \\ 85 \phantom{00} \\ \hline 6 \phantom{00} \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 1111 \overline{) 19} \\ 95 \phantom{00} \\ \hline 161 \phantom{00} \\ 152 \phantom{00} \\ \hline 9 \phantom{00} \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 1111 \overline{) 29} \\ 87 \phantom{00} \\ \hline 241 \phantom{00} \\ 232 \phantom{00} \\ \hline 9 \phantom{00} \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 1111 \overline{) 11} \\ -11 \phantom{00} \\ \hline 011 \phantom{00} \\ -11 \phantom{00} \\ \hline 0 \phantom{00} \end{array}$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
2 ИЗ 9

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

N. 2

$$k = \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{3}{xy} = \frac{x+y+3}{xy}$$

$$\frac{x+y+3}{xy} = \frac{x-4+y+4+3}{(x-4)(y+4)}$$

$$xy = (x-4)(y+4)$$

$$xy = xy + 4x - 4y - 16$$

$$4(y-x) = -16$$

$$\underline{x-y=4}$$

$$\begin{aligned} M &= x^3 - y^3 - 12xy = (x-y)(x^2 + xy + y^2) - 12xy = \\ &= 4(x^2 + xy + y^2) - 12xy = 4x^2 + 4xy + 4y^2 - 12xy = \\ &= 4x^2 - 8xy + 4y^2 = 4(x-y)^2 = 4 \cdot 16 = 64 \end{aligned}$$

Ответ: 64



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
5 ИЗ 9

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

N. 3

8)  $y = -2 \Rightarrow x = 3 + 2k$  ( $k = -5; \dots; 7$ ) или  $x = -7 + 2k$  ( $k = -7; \dots; 9$ )  
всего 16 пар

9)  $y = 1 \Rightarrow x = 2 + 2k$  ( $k = -4; \dots; 6$ ) или  $x = -4 + 2k$  ( $k = -5; \dots; 1$ )  
всего 14 пар

$$N = (16 + 14) \cdot 4 + 16 = 136$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
3 из 9

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

N.3

a)  $(\sin \pi y - \sin \pi x) \sin \pi y = (\cos \pi y + \cos \pi x) \cos \pi y$

$$\sin^2 \pi y - \sin \pi x \cdot \sin \pi y = \cos^2 \pi y + \cos \pi x \cdot \cos \pi y$$
~~$$-\sin^2 \pi y - \cos^2 \pi y - \sin \pi x \cdot \sin \pi y - \cos \pi x \cdot \cos \pi y = 0$$~~
~~$$(\sin \pi y \cdot \cos \pi y) (\sin \pi y + \cos \pi y)$$~~

$$-\sin \pi x \cdot \sin \pi y - \cos \pi x \cdot \cos \pi y = \cos^2 \pi y - \sin^2 \pi y$$

$$-(\cos \pi x \cdot \cos \pi y + \sin \pi x \cdot \sin \pi y) = \cos^2 \pi y - \sin^2 \pi y$$

$$-\cos(\pi x - \pi y) = \cos 2\pi y$$

$$\cos 2\pi y + \cos(\pi x - \pi y) = 0$$

$$2 \cos \frac{2\pi y + \pi x - \pi y}{2} \cdot \cos \frac{2\pi y - \pi x + \pi y}{2} = 0 \quad | :2$$
~~$$2 \cos \frac{\pi y + \pi x}{2} \cdot \cos \frac{3\pi y - \pi x}{2} = 0$$~~

$$\begin{cases} \cos \frac{\pi y + \pi x}{2} = 0 \\ \cos \frac{3\pi y - \pi x}{2} = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{\pi y + \pi x}{2} = \frac{\pi}{2} + \pi n \quad | : \pi \\ \frac{3\pi y - \pi x}{2} = \frac{\pi}{2} + \pi k \quad | : \pi \end{cases}, n, k \in \mathbb{Z} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \frac{x+y}{2} = \frac{1}{2} + n \\ \frac{3y-x}{2} = \frac{1}{2} + k \end{cases}, n, k \in \mathbb{Z} \Rightarrow \begin{cases} x+y = 2n+1 \\ 3y-x = 2k+1 \end{cases}, n, k \in \mathbb{Z} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = -y + 2n + 1 & (1) \\ x = 3y - 2k - 1 & (2) \end{cases}, n, k \in \mathbb{Z}$$

Ответ:  $(-y + 2n + 1, y), (3y - 2k - 1, y), n, k \in \mathbb{Z}, y$ -любое



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
4 из 9

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

~~$$(1) x = -y + 2n + 1$$~~

~~$$(\sin \pi y - \sin \pi(-y + 2n + 1))$$~~

~~$$(\sin \pi y - \sin \pi x) \sin \pi y = (\cos \pi y + \cos \pi x) \cos \pi y$$~~

$$\sin \frac{\pi(y-x)}{2} \cos \frac{\pi(y+x)}{2} \cdot \sin \pi y = \cos \frac{\pi(y+x)}{2} \cdot \cos \frac{\pi(y-x)}{2} \cdot \cos \pi y$$

$$\sin \frac{\pi(y-x)}{2} \cdot \cos \frac{\pi(y+x)}{2} \cdot \sin \pi y = \cos \frac{\pi(y+x)}{2} \cdot \cos \frac{\pi(y-x)}{2} \cdot \cos \pi y$$

п. 3

$$\arccos \frac{x}{7} - \arcsin \frac{y}{4} > -\frac{\pi}{2}$$

ОДЗ:  $\begin{cases} -1 \leq \frac{x}{7} \leq 1 \\ -1 \leq \frac{y}{4} \leq 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -7 \leq x \leq 7 \\ -4 \leq y \leq 4 \end{cases}$

~~$$\arccos \frac{x}{7} - \arcsin \frac{y}{4} > -\arccos \frac{y}{4} - \arcsin \frac{y}{4}$$~~

~~$$\arccos \frac{x}{7} + \arccos \frac{y}{4} > 0$$~~

~~$$\arccos \frac{x}{7} > -\arccos \frac{y}{4}$$~~

~~$$\cos(\arccos \frac{x}{7}) > \cos(\arccos \frac{y}{4})$$~~

~~$$\frac{x}{7} > -\frac{y}{4} \quad | \cdot 28$$~~

~~$$4x > -7y$$~~

~~$$7y + 4x > 0; \quad 7x + 7y > 0$$~~

Можно получить пары вида  $(-y + 2n + 1; y)$ , или  $(3y - 2x - 1; y)$ ,

~~$$y = -4, x = 5 + 2n \quad \text{по 7.к.}$$~~

$$1) y = -4 \Rightarrow x = 5 + 2n \quad (n = 0; 1) \quad \text{или} \quad x = -13 - 2k \quad (k = 2; 1)$$

$k = -10; -9; -8; \dots; -3$   
всего 16 пар

$$2) y = -3 \Rightarrow x = 4 + 2n \quad (n = -5; \dots; 4) \quad \text{или} \quad x = -10 - 2k \quad (k = -8; \dots; -2)$$

всего 14 пар



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
6 ИЗ 9

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

№ 4

Путь орноклассников было  $N$ , тогда вернь понаит  
весе на концерт в начале месяца у  $\Pi$  и в  $\beta$  дна  
равна  $\frac{4}{N} \cdot \frac{3}{N-1}$  а в конце месяца стала  $\frac{4+x}{N} \cdot \frac{3+x}{N-1}$

~~$$\frac{4}{N} \cdot \frac{3}{N-1} = 11 \cdot \frac{4+x}{N} \cdot \frac{3+x}{N-1} \quad | \cdot N(N-1)$$~~

~~$$4(N-1) \cdot 3N = 11N(N-1) \cdot (4+x) \cdot (N-1) \cdot (3+x)N$$~~

~~$$(4N-4) \cdot 3N = (11N) (4+x) (N^2-2N+1)$$~~

~~$$\frac{(4+x)(3+x)}{N(N-1)} : \frac{4 \cdot 3}{N(N-1)} = 11$$~~

$$\frac{(4+x)(3+x) \cdot N(N-1)}{N(N-1) \cdot 12} = 11$$

$$(x+3)(x+4) = 132$$

$$x^2 + 7x - 120 = 0$$

$$D = 49 + 480 = 529 = 23^2$$

$$x_{1,2} = \frac{-7 \pm 23}{2} \rightarrow \begin{cases} x_1 = -15 \text{ не ок т.к. } < 0 \\ x_2 = 8 \end{cases}$$

Ответ: 8 билетов



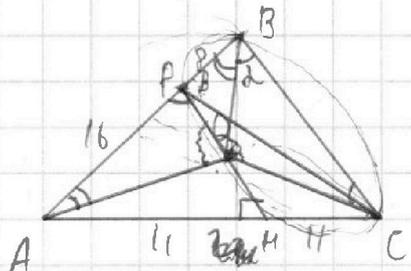
На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
7 ИЗ 9

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

N. 5



$S_{ABC} = ?$  Окружность окр. отрезков ABC

$AO = OC = OB$  как радиусы

$PBCO$  - выпн.  $\rightarrow \angle OCB + \angle OPB = 180^\circ$

$\angle BPO + \angle APO = 180^\circ \rightarrow \angle APO = \angle BCO$

Пусть  $\angle CBO = \alpha$ ;  $\angle PBO = \beta$

$PBCO$ :  $\alpha + \beta + \angle POC = 180^\circ$

$\Delta APO$ :  $\alpha + \beta + \angle AOP = 180^\circ$

$\Rightarrow \angle POC = \angle AOP$

$\Delta APO = \Delta CPO$  ( $\angle POC = \angle AOP$ ,  $PO$  - общ.,  $AO = OC$ )  $\Rightarrow$

$\Rightarrow AP = CP = 16$ ,  $\angle APO = \angle CPO = \alpha$ ,  $\angle BPC = 180 - 2\alpha$

$\alpha + \beta + \gamma = 180^\circ$  ( $\angle POC = \gamma$ )

$\Delta APC$ :  $\angle APO = \angle OPC = \alpha \Rightarrow PO$  - медиан.  $\Delta APC$ ,  $\Delta APC$  -  $\Delta$   $\Rightarrow$

$\Rightarrow PH$  - выпн. и мед. ( $H$  - точка пересек.  $PO$  и  $AC$ )

$\Delta APH$  -  $\Delta$ :  $\sin \alpha = \frac{11}{16}$

$$PH = \sqrt{16^2 - 11^2} = \sqrt{(16-11)(16+11)} = \sqrt{5 \cdot 27} = 3\sqrt{15} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \sin \angle PAH = \frac{3\sqrt{15}}{16}$$

$$S_{ABC} = \frac{1}{2} \cdot AB \cdot AC \cdot \sin \angle PAH = \frac{1}{2} \cdot 16 \cdot 16 \cdot \frac{3\sqrt{15}}{16} = \frac{99\sqrt{15}}{2}$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении **каждой** задачи отдельно.

1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
2 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Значит ~~наибольшая~~ <sup>или наименьшая</sup> ~~длина~~  $\varepsilon(a)$  достигается при

~~$\lambda = 17\pi n$   
 $\lambda = \frac{3\pi}{2} + 2\pi n$~~

$$\left[ \begin{array}{l} \lambda = \pi n \\ \lambda = \frac{\pi}{2} + \pi n \text{ (для второго случая)} \end{array} \right.$$

$$M = 12 + 4\sqrt{5} + 6\pi$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
8 ИЗ 9

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

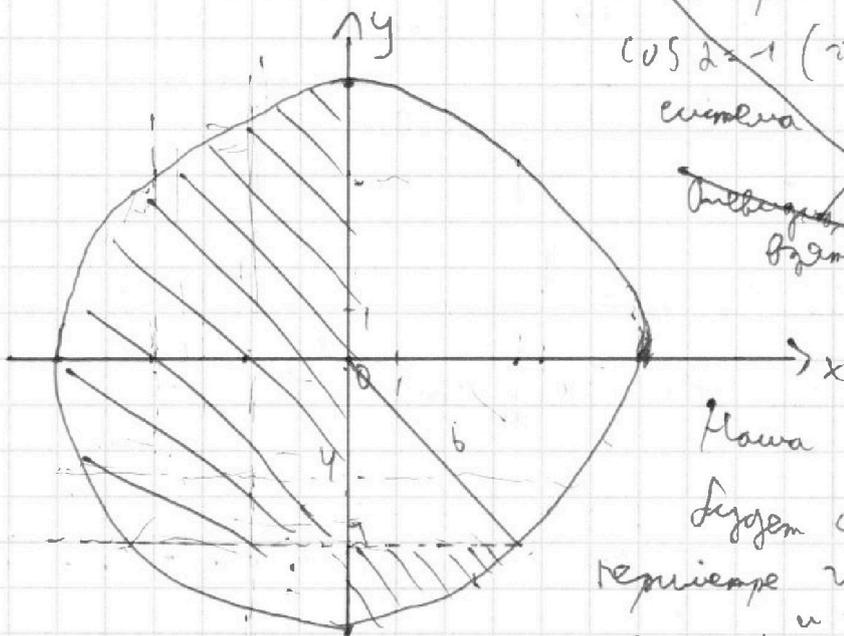
$$\begin{cases} (x+4\sin\alpha)(y-4\cos\alpha) \leq 0 & (1) \\ x^2 + y^2 \leq 36 & (2) \end{cases}$$

$$(x+4\sin\alpha)(y-4\cos\alpha) \leq 0$$

$$\begin{cases} x+4\sin\alpha \leq 0 \\ y-4\cos\alpha > 0 \\ x+4\sin\alpha > 0 \\ y-4\cos\alpha \leq 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x \leq -4\sin\alpha & (1) \\ y > 4\cos\alpha \\ x \geq -4\sin\alpha & (2) \\ y \leq 4\cos\alpha \end{cases}$$

$$x^2 + y^2 = 16$$



~~Рассмотрим первый сл. Возьмем  $\cos\alpha = 1$  ( $\sin\alpha = 0$ ) рассмотрим систему  $\begin{cases} x \leq 0 \\ y > -4 \end{cases}$~~

~~Добавим, что максимум  $y$  мы будем не искать, а при  $x$  и  $y$  будем двигаться быстрее от  $P$  будем~~

Наша фигура  $\mathcal{E}(a)$  всегда будет содержать в своём первом кв. и верх. ось  $x$  и  $y$ , и  $-4 \leq x, y \leq 4$

~~где  $x^2 + y^2 = 16$ . Добавим, что тогда~~

~~максимум функции  $|x|$  и  $|y|$  равен 4. Имеем при этом~~

значении функции  $\mathcal{E}(a)$  также будет максимальна и будет равна половине окружности от



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

1

2

3

4

5

6

7

СТРАНИЦА  
\_\_ ИЗ \_\_

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. **Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно.** Порча QR-кода недопустима!

