



МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

11 КЛАСС. Вариант 2



1. [3 балла] Найдите все тройки натуральных чисел $(A; B; C)$ такие, что:
- A — четырёхзначное число, составленное из одинаковых цифр,
 - B — трёхзначное число, хотя бы одна из цифр которого равна 1,
 - C — двузначное число, хотя бы одна из цифр которого равна 5,
 - произведение $A \cdot B \cdot C$ является квадратом некоторого натурального числа.
2. [3 балла] Положительные числа x и y таковы, что значение выражения $K = \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{xy}$ не изменяется, если x уменьшить на 3, а y — увеличить на 3. Найдите все возможные значения выражения $M = x^3 - y^3 - 9xy$.
3. [5 баллов] а) Найдите все пары действительных чисел $(x; y)$ такие, что $(\sin \pi x - \sin \pi y) \sin \pi x = (\cos \pi x + \cos \pi y) \cos \pi x$.
- б) Сколько пар целых чисел (x, y) удовлетворяют одновременно этому уравнению и неравенству

$$\arccos \frac{x}{4} + \arccos \frac{y}{9} < 2\pi?$$

4. [4 балла] В начале месяца было выделено 4 билета на праздничный концерт, которые планировалось случайным образом распределить между одиннадцатиклассниками. В конце месяца выяснилось, что будет выделено больше 4 билетов. Одиннадцатиклассники Петя и Вася вычислили, что вероятность им обоим вместе попасть на концерт в начале месяца была в 3,5 раза меньше, чем оказалась в конце месяца. Сколько всего было выделено билетов на концерт в конце месяца, если количество одиннадцатиклассников не изменилось?
5. [5 баллов] Точка O — центр окружности ω_1 , описанной около остроугольного треугольника ABC . Окружность ω_2 , описанная около треугольника BOC , пересекает отрезок AB в точке P . Найдите площадь треугольника ABC , если $AP = \frac{16}{5}$, $BP = 2$, $AC = 4$.
6. [6 баллов] На координатной плоскости изображена фигура $\Phi(\alpha)$, состоящая из всех точек, координаты $(x; y)$ которых удовлетворяют системе неравенств

$$\begin{cases} (x - 2 \cos \alpha)(y - 2 \sin \alpha) \geq 0, \\ x^2 + y^2 \leq 9. \end{cases}$$

Найдите максимальное значение M периметра (длины границы) фигуры $\Phi(\alpha)$ и укажите все значения α , при которых оно достигается.

7. [6 баллов] Шар Ω касается всех рёбер правильной усечённой пирамиды, а шар ω касается всех её граней. Найдите угол наклона бокового ребра пирамиды к плоскости её основания.



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.



СТРАНИЦА
1 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Задача 1.

Решение. Пусть $A = 1111n$, где n — однозначное натуральное число. $A = 101 \cdot 11 \cdot n$;

$$A \cdot B \cdot C = 101 \cdot 11 \cdot n \cdot B \cdot C = x^2, x \in \mathbb{N}.$$

Значит, в произведении nBC должен быть хотя бы один множитель 11 и хотя бы один множитель 101 (11 и 101 — простые числа, а в квадраты все простые множители входят в четных степенях). Очевидно, что ни в n , ни в C множитель 101 не содержится, значит он содержится в B . Но единственное трехзначное число с хотя бы одной цифрой 1, делящееся на 101, — это 101. Значит, $B = 101$ — простое число. Тогда в C должен содержаться множитель 11. Но единственное такое число, подходящее под условие — это $C = 55$. Итак, $ABC = (101)^2 \cdot (11)^2 \cdot 5 \cdot n$.



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.



СТРАНИЦА
2 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. **Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно.** Порча QR-кода недопустима!

Отсюда $n = 5$, и $A = 5555$.

Ответ: $(5555; 101; 55)$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

1
☐

2
☒

3
☐

4
☐

5
☐

6
☐

7
☐

СТРАНИЦА
1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Задача 2.

Решение:

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{xy} = \frac{1}{x-3} + \frac{1}{y+3} + \frac{1}{(x-3)(y+3)}$$

Приведем все к общему знаменателю и домножим на $xy(x-3)(y+3) \neq 0$.

$$y(x-3)(y+3) + x(x-3)(y+3) + (x-3)(y+3) = \\ = xy(y+3) + xy(x-3) + xy;$$

$$y(xy+3x-3y-9) + x(xy+3x-3y-9) + \\ + (xy+3x-3y-9) = xy^2 + 3xy + x^2y - 3xy + xy$$

$$(xy+3x-3y-9)(x+y+1) = xy(x+y+1)$$

Из положительности x и y :

$$xy + 3x - 3y - 9 = xy$$

$$3x - 3y = 9$$

$$3(x-y) = 9$$

$$\underline{x-y = 3.}$$

$$M = x^3 - y^3 - 9xy = (x-y)(x^2 + xy + y^2) - 9xy = \\ = 3x^2 + 3xy + 3y^2 - 9xy = 3(x^2 - 2xy + y^2) = \\ = 3(x-y)^2 = 27. \text{ Ответ: } 27.$$

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☒ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА

1 из 3

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Задача 3.

Решение:

$$\begin{aligned} \text{a) } \sin^2 \pi x - \sin \pi y \sin \pi x &= \cos^2 \pi x + \cos \pi y \cos \pi x \\ &- (\cos^2 \pi x - \sin^2 \pi x) = \cos \pi y \cos \pi x + \sin \pi y \sin \pi x \\ &- \cos 2\pi x = \cos(\pi y - \pi x) \end{aligned}$$

$$\cos(\pi - 2\pi x) = \cos(\pi y - \pi x)$$

$$\begin{cases} \pi - 2\pi x = \pi y - \pi x + 2\pi k, k \in \mathbb{Z} \\ \pi - 2\pi x = \pi x - \pi y + 2\pi n, n \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \pi - 2\pi x = \pi x - \pi y + 2\pi n, n \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

$$\begin{cases} 1 - 2x = y - x + 2k, k \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

$$\begin{cases} 1 - 2x = x - y + 2n, n \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

$$\begin{cases} x + y = 1 - 2k, k \in \mathbb{Z} \quad (1) \end{cases}$$

$$\begin{cases} 3x - y = 1 - 2n, n \in \mathbb{Z} \quad (2) \end{cases}$$

Таким образом, равенство верно тогда и только тогда, когда ^{хотя бы} одно из выражений $x + y$ и $3x - y$ ~~является~~ — целое нечетное число. Заметим, что арккосинус не может быть больше, чем π . Поэтому равенство не выполняется тогда и только тогда,



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☒	☐	☐	☐	☐

СТРАНИЦА

3 из 3

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

б) Для того, чтобы оба арккосинуса были определены, необходимо, чтобы $x \in [-4; 4]$ и $y \in [-9; 9]$. Посчитаем количество пар, ~~где~~ (чет; нечет):

~~15~~ $5 \cdot 10 = 50$.

И количество пар (нечет; чет):

$$4 \cdot 9 = 36.$$

Итого 86 пар $(x; y)$ при которых определены оба арккосинуса. Остается только исключить те случаи, когда оба арккосинуса достигают своего наибольшего значения: π . Ведь тогда сумма будет 2π , что не удовлетворяет условию. Такой случай всего один: $(-4; -9)$
Ответ: 85.



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☒	☐	☐	☐

СТРАНИЦА

1 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Задача 4.

Решение: Пусть было в 11 классе n человек, и в конце месяца было выделено k билетов.

~~Тогда~~ Посчитаем количество благоприятных исходов m_1 в начале года:

$$m_1 = C_{n-2}^2 = \frac{(n-2)(n-3)}{2}$$

И кол-во благоприятных исходов в начале года m_2 :

$$m_2 = C_{n-2}^{x-2}$$

Тогда по условию:

$$\frac{\frac{C_{n-2}^2}{C_n^4}}{\frac{C_{n-2}^{x-2}}{C_n^x}} = \cancel{\frac{1}{2}} \cdot \frac{2}{7}$$

$$\frac{C_{n-2}^2 \cdot C_n^x}{C_n^4 \cdot C_{n-2}^{x-2}} = \cancel{\frac{1}{2}} \cdot \frac{2}{7}$$

$$\frac{(n-2)(n-3) \cdot n(n-1) \cdots (n-x+1)}{2 \cdot x!}$$

$$\frac{n(n-1)(n-2)(n-3) \cdots (n-x+1)}{2^4(x-2)!} = \frac{2}{7}$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

1
☐

2
☐

3
☐

4
☒

5
☐

6
☐

7
☐

СТРАНИЦА
2 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. **Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно.** Порча QR-кода недопустима!

~~12(x-2)!~~

$$\frac{12(x-2)!}{x!} = \frac{2}{7}$$

$$\frac{12}{x^2 - x} = \frac{2}{7}$$

$$x^2 - x - 42 = 0$$

$$x = 7$$

Ответ: 7.



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

1
☐

2
☐

3
☐

4
☐

5
☒

6
☐

7
☐

СТРАНИЦА
2 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Запишем теорему косинусов для $\triangle APC$:

$$\frac{256}{25} + 16 - \frac{128}{5} \cos \angle PAC = \frac{256}{25}$$

$$\cos \angle PAC = \frac{5}{8}$$

$$\sin \angle PAC = \sqrt{1 - \frac{25}{64}} = \sqrt{\frac{39}{64}} = \frac{\sqrt{39}}{8}$$

$$S_{\triangle ABC} = \frac{AB \cdot AC \cdot \sin \angle PAC}{2} = \frac{26 \cdot 4 \cdot \frac{\sqrt{39}}{8}}{2} = \frac{42\sqrt{39}}{40} = \frac{21\sqrt{39}}{20}$$

$$\text{Ответ: } \frac{21\sqrt{39}}{20}$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☒ 7 ☐

СТРАНИЦА
3 из 3

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

~~Тогда по неравенству о средних~~ максимальное значение ~~$\frac{EP+PC+BA+AD}{4} = \frac{EC+BD}{4}$~~ равно $\sqrt{7}$. Отсюда

$$\text{Тогда } EC+BD = 2\sqrt{9-4\cos^2\alpha} + 2\sqrt{9-4\sin^2\alpha}$$

~~Выразив все через $\sin$ и косинус и посчитав производную, можно убедиться,~~

$$\text{при } |\sin\alpha| = |\cos\alpha| = \frac{\sqrt{2}}{2}, \text{ имеем: } EC+BD = 4\sqrt{7}$$

Покажем, что эта сумма наибольшая.

$$EP+PC+BA+AD = EC+BD \leq 4\sqrt{\frac{EP^2+PC^2+BA^2+AD^2}{4}} = \sqrt{\frac{36-2\cdot 4}{4}} = 4\sqrt{7}.$$

Осталось посчитать сумму дуг $\overset{\frown}{ED}$ и $\overset{\frown}{BC}$.

Она равна половине длины всей окружности, то есть $\frac{2\pi \cdot 3}{2} = 3\pi$

Тогда максимальный периметр равен $4\sqrt{7} + 3\pi$. Достигается же он при всех

$$\alpha = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi k}{2}, k \in \mathbb{Z}$$

$$\text{Ответ: } 4\sqrt{7} + 3\pi; \alpha = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi k}{2}, k \in \mathbb{Z}$$

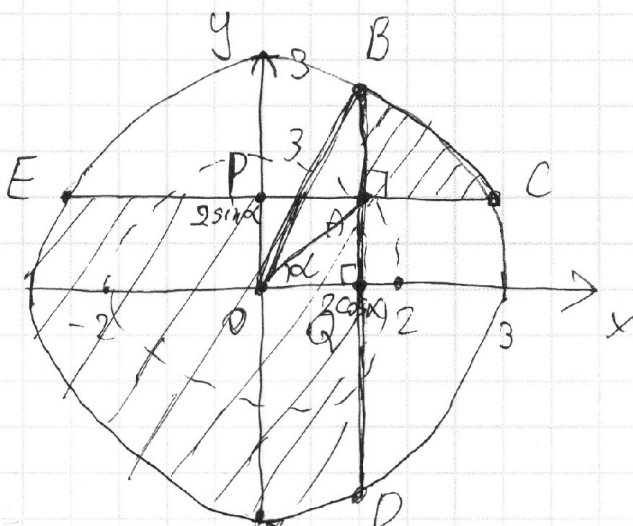


На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☒ 7 ☐

СТРАНИЦА
2 ИЗ 3

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



Заштрихованная область — фигура $\Phi(\alpha)$.

Сумма ~~дуг~~ дуг $\widehat{BC}$ и $\widehat{DE}$ постоянна и равна 180° , потому что угол BAC всегда равен 90° . Значит, на периметр фигуры $\Phi(\alpha)$ влияет только сумма $EC + BD$.

Найдём BQ : Из $\triangle BOQ$:

$$BQ = \sqrt{9 - 4\cos^2\alpha} = QD$$

$$\text{Аналогично, } PC = \sqrt{9 - 4\sin^2\alpha} = EP$$

$$\text{Тогда } \cancel{EC^2} + EP^2 + PC^2 + BQ^2 + QD^2 =$$

$$= 9 \cdot 4 - 2(4\sin^2\alpha + 4\cos^2\alpha) = 28$$

Получается, что среднее квадратическое

всех длин EP, PC, BQ и QD равно $\sqrt{\frac{28}{4}} = \sqrt{7}$.



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1
☐

2
☐

3
☐

4
☐

5
☐

6
☒

7
☐

СТРАНИЦА
1 из 3

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Задача 6.

Решение:

Для каждого α будем определять точку A с координатами $(2\cos\alpha; 2\sin\alpha)$. Тогда все точки A располагаются на окружности с радиусом 2. А поскольку первое уравнение системы эквивалентно совокупности ~~системе~~:

$$\begin{cases} x \geq \cos 2\alpha \\ y \geq \sin 2\alpha \\ x \leq \cos 2\alpha \\ y \leq \sin 2\alpha \end{cases}$$

фигура $\Phi(\alpha)$ является пересечением ~~м-~~ круга с радиусом 3 и верхней правой и нижней левой четвертей плоскости, на которые делит плоскость прямые $x = \cos 2\alpha$ и $y = \sin 2\alpha$:



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7
☐ ☐ ☐ ☐ ☐ ☐ ☐

СТРАНИЦА
 __ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$A = 1111n, n - \text{цифра}$$

$$A = 11 \cdot 101 \cdot n$$

$$\begin{array}{r} 1111 \overline{) 11} \\ - 11 \\ \hline 11 \end{array}$$

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{xy} = \frac{1}{x-3} + \frac{1}{y+3} + \frac{1}{(x-3)(y+3)}$$

$$M = (x-y)(x^2+xy+y^2) = \cancel{x^3} + \cancel{x^2y} + \cancel{xy^2} - \cancel{y^3} - \cancel{xy^2} - \cancel{y^3}$$

$$= x^3 + x^2y + xy^2 - xy^2 - xy^2 - y^3$$

$$x^3 - y^3 = 9xy =$$

$$C_n^k = \frac{n!}{(n-k)!k!}$$

$$C_{n-2}^2 = \frac{(n-2)(n-3)}{2}$$

$$C_n^4 = \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{24}$$

$$C_n^x = \frac{n(n-1) \dots (n-x+1)}{x!}$$

$$C_{n-2}^{x-2} = \frac{(n-2)(n-3) \dots (n-x+1)}{(x-2)!}$$

$$1 + 4 \cdot 42 = 169$$

$$x = \frac{1+13}{2} = 7$$

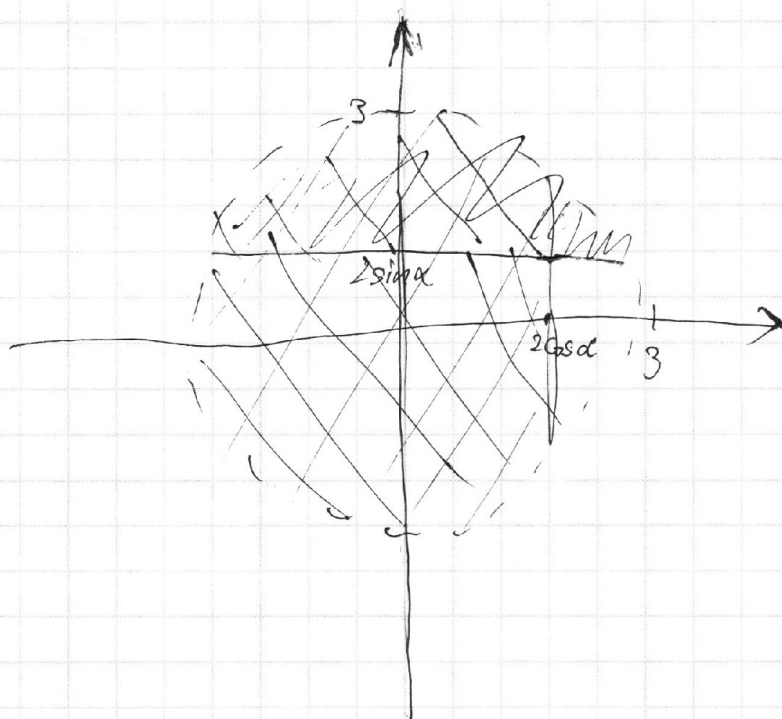
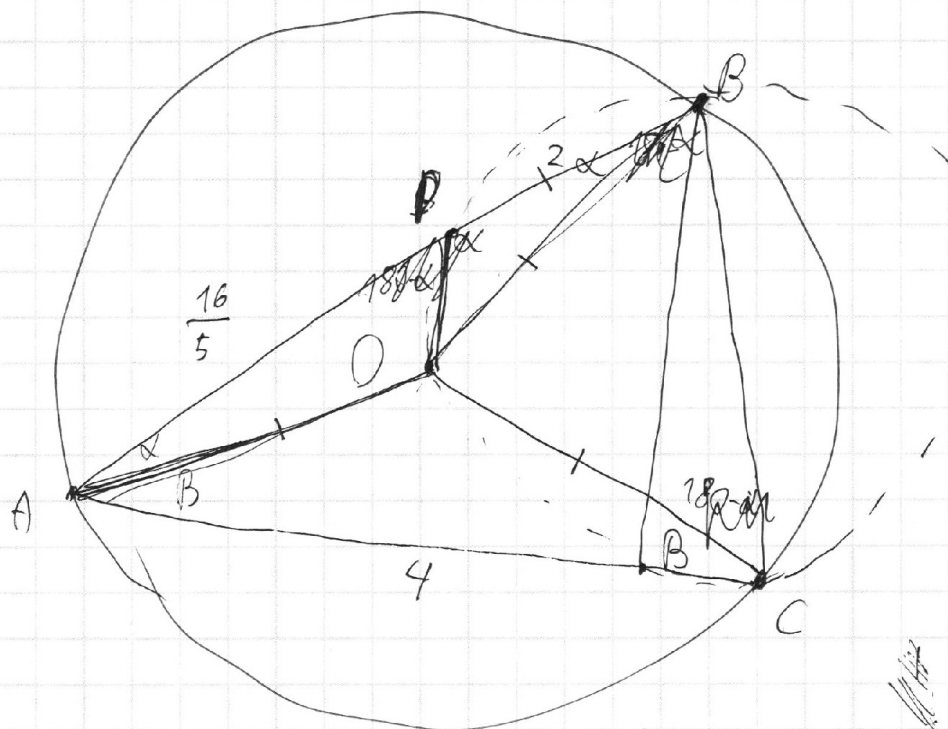


На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



$$\begin{aligned} \sin^2 \pi x - \sin \pi y \sin \pi x &= \cos^2 \pi x + \cos \pi y \pi x \\ -(\cos^2 \pi x - \sin^2 \pi x) &= \cos(\pi x - \pi y) \\ \cos(\pi x - \pi y) &= \cos(\pi x - \pi y) \end{aligned}$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении **каждой задачи отдельно**.

1
☐

2
☐

3
☐

4
☐

5
☐

6
☐

7
☐

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. **Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно.** Порча QR-кода недопустима!

