



МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

11 КЛАСС. Вариант 4



1. [3 балла] Найдите все тройки натуральных чисел $(A; B; C)$ такие, что:
- A — четырёхзначное число, составленное из одинаковых цифр,
 - B — трёхзначное число, хотя бы одна из цифр которого равна 7,
 - C — двузначное число, хотя бы одна из цифр которого равна 1,
 - произведение $A \cdot B \cdot C$ является квадратом некоторого натурального числа.
2. [3 балла] Положительные числа x и y таковы, что значение выражения $K = \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{3}{xy}$ не изменяется, если x уменьшить на 4, а y — увеличить на 4. Найдите все возможные значения выражения $M = x^3 - y^3 - 12xy$.
3. [5 баллов] а) Найдите все пары действительных чисел $(x; y)$ такие, что $(\sin \pi y - \sin \pi x) \sin \pi y = (\cos \pi y + \cos \pi x) \cos \pi y$.
- б) Сколько пар целых чисел (x, y) удовлетворяют одновременно этому уравнению и неравенству

$$\arccos \frac{x}{7} - \arcsin \frac{y}{4} > -\frac{\pi}{2}?$$

4. [4 балла] В начале месяца было выделено 4 билета на праздничный концерт, которые планировалось случайным образом распределить между одиннадцатиклассниками. В конце месяца выяснилось, что будет выделено больше 4 билетов. Одиннадцатиклассники Пётя и Вася вычислили, что вероятность им обоим вместе попасть на концерт в начале месяца была в 11 раз меньше, чем оказалась в конце месяца. Сколько всего было выделено билетов на концерт в конце месяца, если количество одиннадцатиклассников не изменилось?
5. [5 баллов] Точка O — центр окружности ω_1 , описанной около остроугольного треугольника ABC . Окружность ω_2 , описанная около треугольника BOC , пересекает отрезок AB в точке P . Найдите площадь треугольника ABC , если $AP = 16$, $BP = 8$, $AC = 22$.
6. [6 баллов] На координатной плоскости изображена фигура $\Phi(\alpha)$, состоящая из всех точек, координаты $(x; y)$ которых удовлетворяют системе неравенств

$$\begin{cases} (x + 4 \sin \alpha)(y - 4 \cos \alpha) \leq 0, \\ x^2 + y^2 \leq 36. \end{cases}$$

Найдите максимальное значение M периметра (длины границы) фигуры $\Phi(\alpha)$ и укажите все значения α , при которых оно достигается.

7. [6 баллов] Шар Ω касается всех рёбер правильной усечённой пирамиды, а шар ω касается всех её граней. Найдите угол наклона боковой грани пирамиды к плоскости её основания.



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7
☒ ☐ ☐ ☐ ☐ ☐ ☐

СТРАНИЦА
1 из 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

№1.

Так как A — четырехзначное число, составленное из одинаковых цифр, то $A = 1111 \cdot k = 11 \cdot 101 \cdot k$, $k = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$.

Тогда, поскольку $C < 100$, то $C \div 101$, но $A \cdot B \cdot C$ — квадрат, значит $B \div 101$ (иначе степень вхождения простого 101 в $A \cdot B \cdot C$ нечетна). Так как B — трехзначное число, у которого есть цифра 7 и оно делится на 101, то $B = 707$ (101, 202, 303, 404, 505, 606, 808, 909 не содержат 7).

$A \cdot B \cdot C = 11 \cdot 101 \cdot k \cdot 7 \cdot 101 \cdot \overset{C}{\cancel{k}} = 101^2 \cdot 7 \cdot \cancel{k} \cdot 11 \cdot C$. Если $k \neq 7$, то $\text{НОД}(k, 7) = 1$, $\text{НОД}(11, k) = 1$, но поскольку $A \cdot B \cdot C = t^2$, $t \in \mathbb{Z}$, то степени вхождения простых 7 и 11 четны, тогда $C = 7 \cdot 11 \cdot \ell$, $\ell \in \mathbb{N}$, при $\ell \geq 2$ $C > 99$, при $\ell = 1$ $C = 77$ и не содержит цифр 1.

Значит, $k = 7$. Тогда $A \cdot B \cdot C = 101^2 \cdot 7^3 \cdot 11 \cdot C$, тогда поскольку степень вхождения 11 в $A \cdot B \cdot C = t^2$, $t \in \mathbb{Z}$, четна, то $C = 11 \cdot d$, $d \in \mathbb{N}$. При $d \geq 10$ $C > 100$, при $d = \{2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$ C не содержит цифр 1.

При $d = 1$ $C = 11$, и тройка $(7777, 707, 11)$ подходит:

$$7777 \cdot 707 \cdot 11 = 11 \cdot 707 \cdot 707 \cdot 11 = (707 \cdot 11)^2.$$

Ответ: $(7777, 707, 11)$.



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении **каждой задачи отдельно**.

1 ☐ 2 ☒ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА
1 из 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

№2.

По условию $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{3}{xy} = \frac{1}{(x-4)} + \frac{1}{(y+4)} + \frac{3}{(x-4)(y+4)}$

$\frac{x+y+3}{xy} = \frac{x+y+3}{(x-4)(y+4)}$, если что $xy \neq 0$, $(x-4)(y+4) \neq 0$,

тогда $(x+y+3) \cdot (x-4)(y+4) = (x+y+3) \cdot xy$ $\begin{cases} x+y+3=0 & (1) \\ xy \neq 0 \\ xy = (x-4)(y+4) & (2) \end{cases}$

(1) $x+y+3=0$, $y = -x-3$ этот случай невозможен, так

$x^3 - y^3 - 12xy = x^3 + (x+3)^3 + 12x(x+3)$ как $x > 0$, $y > 0$, и

$x+y+3 > 3$

(2) $\begin{cases} xy = (x-4)(y+4) \\ xy \neq 0 \end{cases} \begin{cases} 0 = -4x - 4y + 16 \\ xy \neq 0 \end{cases} \begin{cases} x+y=4 \\ xy \neq 0 \end{cases}$ - если что $xy \neq 0$ в силу $x > 0$, $y > 0$.

$y = 4 - x$

$M = x^3 - y^3 - 12xy = (4-x)^3 - x^3 - (4-x)^3 - 12x \cdot (4-x) = x^3 + (x-4)^3 + 12x^2 - 48x = x^3 + x^3 - 12x^2 + 48x - 64 + 12x^2 - 48x = 2x^3 - 64.$

$f(x) = 2x^3 - 64$ - возрастает на $D(f) = (-\infty; +\infty)$, поскольку $x > 0$, $y > 0$

и $x+y=4$, то $x > 0$, и $4-x > 0$, откуда $x \in (0; 4)$. При таких x $x \neq 0$, $y \neq 0$, $x-4 \neq 0$, $y+4 \neq 0$, тогда $M \in (f(0); f(4))$:

$f(0) = -64$, $f(4) = 128 - 64 = 64$. Ответ: $M \in (-64; 64)$.



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☒ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА
1 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

№3.

$$a) (\sin \pi y - \sin \pi x) \sin \pi y = (\cos \pi y + \cos \pi x) \cdot \cos \pi y$$

$$\sin^2 \pi y - \sin \pi x \sin \pi y = \cos^2 \pi y + \cos \pi x \cos \pi y$$

$$(\sin^2 \alpha - \sin \beta) \sin \alpha = (\cos^2 \alpha + \cos \beta) \cos \alpha;$$

$$\sin^2 \alpha - \sin \alpha \sin \beta = \cos^2 \alpha + \cos \alpha \cos \beta$$

$$\sin^2 \alpha - \sin \alpha \sin \beta = \cos^2 \alpha + \cos \alpha \cos \beta;$$

$$\sin^2 \alpha - \cos^2 \alpha = \sin \alpha \sin \beta + \cos \alpha \cos \beta$$

$$-\cos 2\alpha = \cos(\alpha - \beta); \quad \cos 2\alpha + \cos(\alpha - \beta) = 0$$

$$2 \cos \left(\frac{3\alpha - \beta}{2} \right) \cdot \cos \left(\frac{\alpha + \beta}{2} \right) = 0$$

$$\begin{cases} \frac{3\alpha - \beta}{2} = \frac{\pi}{2} + \pi n, n \in \mathbb{Z} \\ \frac{\alpha + \beta}{2} = \frac{\pi}{2} + \pi n, n \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \frac{3\pi y - \pi x}{2} = \frac{\pi}{2} + \pi n, n \in \mathbb{Z} \\ \frac{\pi y + \pi x}{2} = \frac{\pi}{2} + \pi n, n \in \mathbb{Z} \end{cases} \quad \begin{cases} 3y - x = 2n + 1, n \in \mathbb{Z} \\ y + x = 2m + 1, m \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = 3y - 2n - 1, n \in \mathbb{Z} \\ x = 2n + 1 - y, n \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

$$\text{Ответ: } (3y - 2n - 1, y); (2n + 1 - y, y),$$

$$y \in \mathbb{R}, n \in \mathbb{Z}.$$

$$b) \arccos \frac{x}{7} - \arcsin \frac{y}{4} > -\frac{\pi}{2} \quad \begin{cases} -\frac{\pi}{2} \leq \frac{y}{4} \leq \frac{\pi}{2} \\ 0 \leq \frac{x}{7} \leq \pi \end{cases}$$

$$\begin{cases} -2\pi \leq y \leq 2\pi \\ 0 \leq x \leq 7\pi \end{cases} \quad (1)$$

$$\text{Возможны значения } \arccos \frac{x}{7} \geq 0,$$

$$\arcsin \frac{y}{4} \leq \frac{\pi}{2}, \text{ откуда } -\arcsin \frac{y}{4} \geq -\frac{\pi}{2},$$

$$\text{значит } \arccos \frac{x}{7} - \arcsin \frac{y}{4} \geq -\frac{\pi}{2}, \text{ значит достаточно}$$

$$\text{найти все } x \in \mathbb{Z}, y \in \mathbb{Z}, \text{ удовлетворяющие неравенству, исключив случаи}$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1
☐

2
☐

3
☒

4
☐

5
☐

6
☐

7
☐

СТРАНИЦА
2 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

той равенства, который возможен при $\begin{cases} \frac{x}{7} = 0 \\ \frac{y}{9} = -\frac{\pi}{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = -2\pi \end{cases}$

но $y = -2\pi \notin \mathbb{Z}$, значит $\arccos \frac{x}{7} - \arcsin \frac{y}{9} = -\frac{\pi}{2}$ невозможно при $x \in \mathbb{Z}, y \in \mathbb{Z}$. Тогда достаточно найти все x, y , удовлетворяющие (1).

$$\begin{cases} -2\pi \leq y \leq 2\pi & y = \{6, -5, \dots, 5, 6\}^* \\ 0 \leq x \leq 7\pi & x = \{0, 1, \dots, 21\}^{**} \end{cases} \quad (\pi \approx 3,14159 < 3,1416, 7\pi < 21,9912).$$

Известно, что числа $x = 3y - 2\pi - 1$ и y разной четности, т.е., как и $x = 2n + 1 - y$ и $y, y \in \mathbb{Z}$. Тогда для любой пары (x, y) ~~разной~~ ^{одной} четности подобрать целое n не получится, где ~~одной~~ ^{разной} четности. Тогда число подходящих пар

(x, y) равно числу способов выбрать по одному числу из $*$ и $**$ разной четности, то есть

$$\begin{matrix} 7 & \cdot & 11 & + & 6 & \cdot & 11 \\ 2 & n & n & 2 \end{matrix} = 11 \cdot 13 = 143. \quad \text{Ответ: } 143.$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☒ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА
1 из 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

№4.

Пусть всего x одинадцатиклассников и x^k билетов.

Всего возможных исходов C_x^k , из них Петя и Васька управляют C_{x-2}^{k-2} 12 билетов у Пети и Васи, остальные раздают как угодно). Тогда искомая вероятность равна

$$\frac{C_{x-2}^{k-2}}{C_x^k} = \frac{\frac{(x-2)!}{(k-2)!(x-k)!}}{\frac{x!}{k!(x-k)!}} = \frac{(x-2)! \cdot k! \cdot (x-k)!}{(k-2)! \cdot (x-k)! \cdot x!} = \frac{k \cdot (k-1)}{x \cdot (x-1)}$$

Таким образом, искомая вероятность равна $\frac{4 \cdot 3}{x(x-1)}$, если в конце месяца было выделено l

билетов, то вероятность равна $\frac{l(l-1)}{x(x-1)}$, и по условию она больше исходной в 11 раз:

$$\frac{4 \cdot 3 \cdot 11}{x(x-1)} = \frac{l(l-1)}{x(x-1)}, \quad x \cdot (x-1) \neq 0, \text{ т.к. одинадцатиклассников } \geq 2 \text{ (Петя и Васька)}.$$

$$l^2 - l = 12 \cdot 11; \quad l^2 - l - 132 = 0 \quad \begin{cases} l = 12 \\ l = 14 - 11 \end{cases}$$

Изно, что $l \geq 0$, поэтому $l = 12$.

Ответ: в конце месяца было выделено 12 билетов.



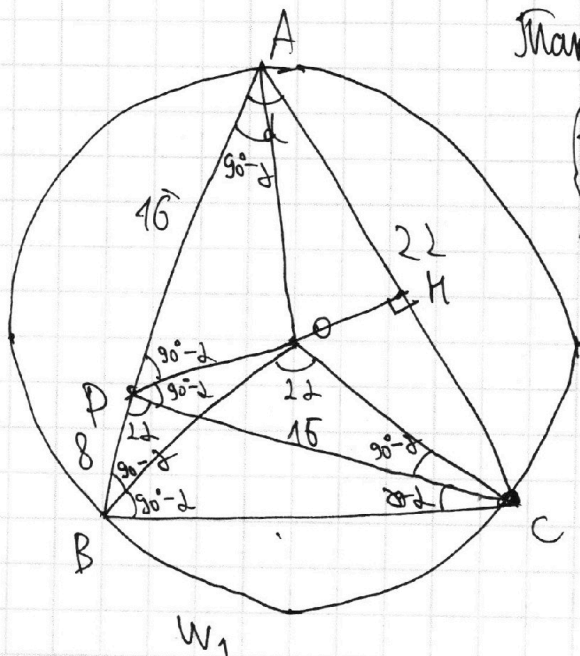
На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☒ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА
1 из 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

№5.



Поскольку O — центр W_1 , то

$$\begin{cases} \angle AOB = 2\angle C \\ AO = BO \end{cases} \Rightarrow \angle BAO = \angle OBA = 90^\circ - \angle C$$

аналогично,

$$\begin{cases} \angle BOC = 2\angle A \\ BO = OC \end{cases} \Rightarrow \angle OBC = \angle OCB = 90^\circ - \angle A$$

Поскольку вписанности

$$\angle BOC = \angle ABO = \angle PBO = \angle PCO = 90^\circ - \angle C; \angle OCP = \angle OBP = \angle OAP$$

$$\angle OPC = \angle OBC = \angle OCB = 90^\circ - \angle A. \text{ Из } \angle BPO + \angle OCB = 180^\circ \text{ и } \angle BPO + \angle OPA = 180^\circ \text{ следует } \angle APO = \angle OCB = 90^\circ - \angle A. \text{ Тогда в } \triangle APC \angle APC =$$

$$= \angle OPC + \angle OPA = 180^\circ - 2\angle A, \angle PCA = 180^\circ - \angle APC - \angle CAP = 180^\circ -$$

$$- 180^\circ + 2\angle A - \angle A = \angle A \text{ (из суммы углов } \triangle APC), \text{ значит } \angle PAC = \angle PCA,$$

то есть $\triangle PAC$ — равнобедренный с $AP = PC = 16, AC = 22$. Тогда можно

найти $\sin A$: $PH \perp AC, H \in AC$. Тогда поскольку $\triangle PAC$ — равнобедренный с $PA = PC$, то $AH = HC = \frac{22}{2} = 11, PH = \sqrt{AP^2 - AH^2} = \sqrt{16^2 - 11^2} =$

$$= \sqrt{5 \cdot 27} = 3\sqrt{15} \text{ (по теореме Пифагора для } \triangle AHP), \sin \angle PAC = \frac{PH}{AP} = \frac{3\sqrt{15}}{16},$$

$$\text{тогда } S_{ABC} = \frac{1}{2} \cdot \sin \angle PAC \cdot AB \cdot AC = \frac{1}{2} \cdot \frac{3\sqrt{15}}{16} \cdot 16 \cdot 22 = \frac{3\sqrt{15}}{32} \cdot 2^3 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 11 =$$

$$= \frac{99\sqrt{15}}{2}. \text{ Ответ: } S_{ABC} = \frac{99\sqrt{15}}{2}.$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☒ 7 ☐

СТРАНИЦА
1 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

№6.

$$\begin{cases} (x+4\sin\alpha)(y-4\cos\alpha) \leq 0 \\ x^2+y^2 \leq 36 \end{cases}$$

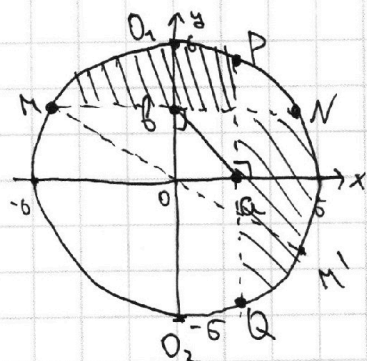
$$\begin{cases} x \leq -4\sin\alpha \\ y \geq 4\cos\alpha \\ x \geq -4\sin\alpha \\ y \leq 4\cos\alpha \\ x^2+y^2 \leq 36 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x \leq -4\sin\alpha \\ y \geq 4\cos\alpha \\ x \geq -4\sin\alpha \\ y \leq 4\cos\alpha \\ x^2+y^2 \leq 36 \end{cases} \quad (2)$$

(2) условие означает, что все точки $(x; y)$ лежат внутри круга с центром в $(0; 0)$ и радиусом 6.

Если $-4\sin\alpha \leq 0$ Пусть $a = -4\sin\alpha$, $b = 4\cos\alpha$, тогда

$$|a| \leq 4, |b| \leq 4, \text{ и } a^2+b^2=16.$$



$$\begin{cases} x \leq a \\ y \geq b \\ x \geq a \\ y \leq b \\ x^2+y^2 \leq 36 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x \leq a \\ y \geq b \\ x \geq a \\ y \leq b \\ x^2+y^2 \leq 36 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x \leq a \\ y \geq b \\ x \geq a \\ y \leq b \\ x^2+y^2 \leq 36 \end{cases}$$

Искомая фигура $\Phi(a)$ изображена на картинке.

$$P(\Phi(2)) = MN + PQ + MP + QN; \text{ где } M(-\sqrt{36-b^2}; b), N(\sqrt{36-b^2}; b),$$

$$P(a; \sqrt{36-a^2}); Q(a; -\sqrt{36-a^2}). MN = \sqrt{4 \cdot (36-b^2)} = 2\sqrt{36-b^2};$$

$PQ = 2\sqrt{36-a^2}$. Докажем, что сумма дуг MP, QN фиксированна и равна половине длины окружности $\text{Окр}(0;0;R=6)$, то есть

$$\frac{2\pi \cdot 6}{2} = 6\pi. \text{ Для этого отметим } M' - \text{ диаметрально противоположную } M \text{ точку, } M'(\sqrt{36-b^2}, -b). \text{ И } N(\sqrt{36-b^2}, b), \text{ то есть}$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☒	☐

СТРАНИЦА

2 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

N и M' симм. отн. OX , но P и Q тоже симм. отн. OX , тогда $QM' = PN$, $\angle QM' = \angle PN$, и $\angle QN + \angle MP = \angle QM' + \angle M'N + \angle PM = \angle M'N + \angle NP + \angle PM = \angle MM' = 6\pi$.

Тогда $P(\varphi(l)) = 6\pi + 2\sqrt{36-b^2} + 2\sqrt{36-a^2}$, чтобы необходимо максимизировать $\sqrt{36-b^2} + \sqrt{36-a^2}$ при $a^2 + b^2 = 16$,

$\sqrt{36-b^2} + \sqrt{36-a^2} = \sqrt{20+a^2} + \sqrt{36-a^2}$, покр-ву о средних

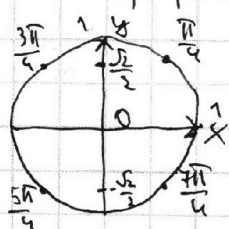
$$\frac{\sqrt{20+a^2} + \sqrt{36-a^2}}{2} \leq \sqrt{\frac{20+a^2+36-a^2}{2}} = \sqrt{28} = 2\sqrt{7}, \text{ откуда}$$

$\sqrt{20+a^2} + \sqrt{36-a^2} \leq 4\sqrt{7}$, что достигается при $a^2 = 8, b^2 = 8$.

Тогда наибольший $P(\varphi(l))$ равен $6\pi + 2 \cdot 4\sqrt{7} = 6\pi + 8\sqrt{7}$,

что достигается при $16\sin^2 l = 8$ и $16\cos^2 l = 8$. Ясно, что если выполнено первое, то выполнено и второе, поэтому достаточно найти l , при которых $16\sin^2 l = 8, \sin^2 l = \frac{1}{2}$,

$$\begin{cases} \sin l = \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \sin l = -\frac{\sqrt{2}}{2} \end{cases}$$



$$l = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi n}{2}, n \in \mathbb{Z}.$$

Ответ: $P(\varphi(l))_{\max} = 6\pi + 8\sqrt{7}$, достигается при

$$l = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi n}{2}, n \in \mathbb{Z}.$$



1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☒

СТРАНИЦА
2 из 2

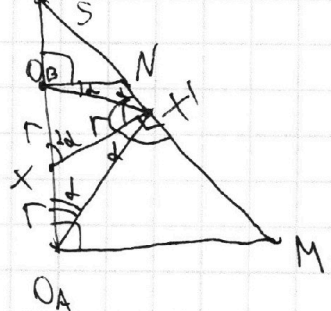
Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

так как $A_1 A_2 B_1 B_2$ описан, то тогда

$O_B B_1 = O_B B_2 = O_B B_n = R \cdot \frac{2x-2y}{2y}$, так как $A_1 A_2 \dots A_n$ и $B_1 B_2 \dots B_n$

симметричны в $S = A_1 B_1 \cap A_2 B_2 \dots \cap A_n B_n$. Рассмотрим

$O_B N O A M$ и используем *.



$$O_B N = O A M \cdot \frac{2x-2y}{2y} = \sqrt{R^2 - y^2} \cdot \frac{2x-2y}{2y} \text{ по **}$$

$$\Delta S O_B N \sim \Delta S O A M \Rightarrow \frac{B O_B + 2r}{2r} = \frac{O A M}{O_B N} = \frac{2y}{2x-2y}$$

$$\text{Углы } \angle N O_B X' = \angle X O A X' \text{ и } \angle N X' O_B = \angle X X' O A = \angle X O A X' (=)$$

$$N X' = O_B N = \sqrt{R^2 - y^2} \cdot \frac{2x-2y}{2y}. \text{ Аналогично } \angle M O A X' = \angle M X' O A = 90^\circ - \angle X O A X' (=)$$

$$\Rightarrow X' M = M O A = \sqrt{R^2 - y^2}. \text{ Но } M N - \text{высота в равнобедренной трапеции}$$

$$A_1 A_2 B_2 B_1, M N = \sqrt{x^2 - (2y-x)^2}, \text{ тогда имеем}$$

$$\sqrt{R^2 - y^2} \cdot \frac{2x}{2y} = \sqrt{x^2 - (2y-x)^2}$$

$$(R^2 - y^2) \cdot x^2 = y^2 \cdot (2y-2x) \cdot 2y, \text{ необходимо найти } \angle(A_i B_i)$$

$$\angle(A_i B_i; A_i O A), \text{ который равен } \arcsin \frac{2r}{A_i O A - B_i O B} =$$

$$= \frac{2r}{R - R \cdot \frac{2x-2y}{2y}} = \frac{2r}{R \cdot (2y-x)}.$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении **каждой задачи отдельно**.

1 2 3 4 5 6 7
☐ ☐ ☐ ☐ ☐ ☐ ☐

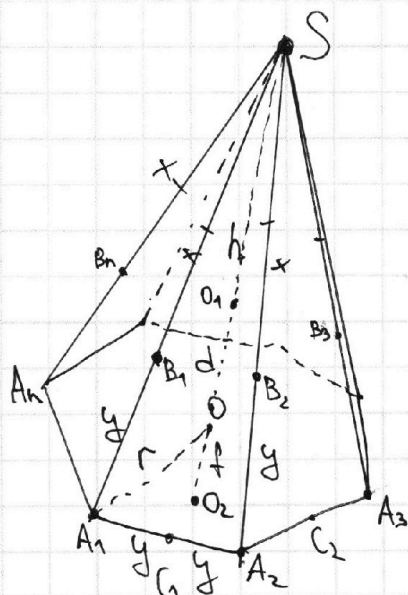
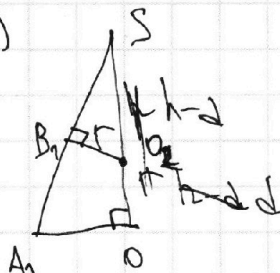
СТРАНИЦА
 _ ИЗ _

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$-M(\sqrt{36-b^2}; -b), Q(a; -\sqrt{36-a^2})$$

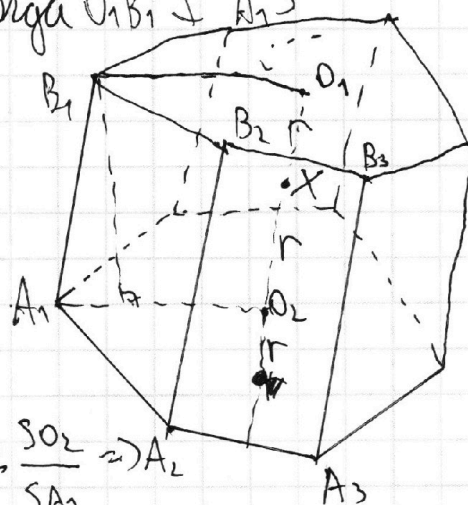
$$MQ^2 = (\sqrt{36-b^2} - a)^2 + (b + \sqrt{36-a^2})^2 = 36 + 2a\sqrt{36-b^2} + 36 + 2b\sqrt{36-a^2}$$

$$PN^2 = (a - \sqrt{36-b^2})^2 + (\sqrt{36-b^2} - a)^2$$



$\angle OA_1S = ?$

O_1 - центр впис. сферы, O_2 - выс. всех ребер. Тогда $O_1B_1 \perp A_1S$



$$\sqrt{r^2 + y^2 + f^2} =$$

$$\triangle SOA_1 \sim \triangle SXO_2$$

$$\frac{XO_2}{OA_1} = \frac{SA_1}{SA_1} \Rightarrow A_2$$

$$XO_2 = \frac{r \cdot (h+f)}{\sqrt{h^2 + r^2}}$$

$$d(O_2; A_2A_3B_1) = r$$

$$\frac{2r}{R - R \cdot \frac{2x-2y}{2y}} = \frac{2r}{R \cdot (1 - \frac{x-y}{y})} = \frac{2r}{R \cdot (2y-x)}$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи** отдельно.



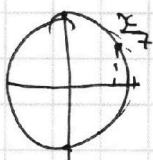
1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\cos(\alpha + \beta) + \cos(\alpha - \beta) = 2 \cos \alpha \cos \beta$$

$$\sin(90^\circ - \alpha + \beta) = \cos(\alpha - \beta) = \cos \alpha \cos \beta + \sin \alpha \sin \beta$$



$$\arccos \frac{x}{7} \geq 0, \quad \arcsin \frac{y}{4} \leq \frac{\pi}{4} \text{ ; } \arcsin \frac{y}{4}$$

$$\arccos \frac{x}{7} \quad y=1, x=0$$

$$(\sin \pi - \sin 0) \cdot \sin \pi = (\cos \pi + \cos 0) \cos \pi$$

$$y=2 \quad \cos \pi y = 1, \cos(3y-1)\pi = -1$$

$$(\sin \pi y + \sin(3y-1)\pi) \cdot \sin \pi y = (\cos \pi y + \cos(3y-1)\pi) \cos \pi y$$

$$-\sin(2n+1-y)\pi + \sin^0 \pi y = 0$$

$$\cos \pi y + \cos(1-y)\pi = 0$$

$$\frac{3,1416}{7}$$

$$\frac{21,9912}{7}$$

$$C_k^x = \frac{x \cdot (x-1) \cdot \dots \cdot (k+1)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot k}$$

Пусть всего x одноклассников.

$$\frac{4}{x} \cdot \frac{3}{(x-1)} = P_{\text{изм. бер}}$$

$$C_8^6 = \frac{8!}{6! \cdot 2!} = \frac{8 \cdot 7}{1 \cdot 2}$$

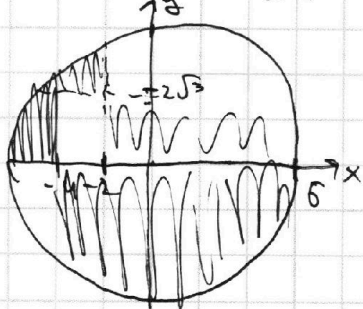
$$C_x^4, C_{x-2}^2; \quad \frac{C_{x-2}^2}{C_x^4}$$

$$C_x^4 = \frac{x \cdot (x-1) \cdot (x-2) \cdot (x-3)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4}$$

$$C_{x-2}^2 = \frac{(x-2)(x-3)}{2};$$

$$\frac{4 \cdot 3}{(x-1)(x-2)}$$

$$\frac{k}{x} \cdot \frac{(k-1)}{x-1}$$



$$\frac{1}{2} \cdot 24 \cdot 22 \cdot \sin \alpha = 11 \cdot 24 \cdot \sin \alpha = 11 \cdot 24 \cdot \frac{3\sqrt{15}}{16} = 11 \cdot 3 \cdot \frac{3\sqrt{15}}{2} =$$

$$(x + u \sin \alpha)(y - u \cos \alpha) \leq 2$$

$$x y - 5 \cdot 2 = \frac{\pi}{2} \quad (x+y)y \leq 0$$

$$(x+2)(y-2\sqrt{3}) \leq 0$$