МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

11 КЛАСС. Вариант 4

1. [3 балла] Найдите все тройки натуральных чисел $(A; B; C)$ такие, что:
   - A — четырёхзначное число, составленное из одинаковых цифр,
   - B — трёхзначное число, хотя бы одна из цифр которого равна 7,
   - C — двузначное число, хотя бы одна из цифр которого равна 1,
   - произведение $A \cdot B \cdot C$ является квадратом некоторого натурального числа.
2. [3 балла] Положительные числа x и y таковы, что значение выражения $K = \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{3}{xy}$ не изменяется, если x уменьшить на 4, а y — увеличить на 4. Найдите все возможные значения выражения $M = x^3 - y^3 - 12xy$.
3. [5 баллов] а) Найдите все пары действительных чисел $(x; y)$ такие, что $(\sin \pi y - \sin \pi x) \sin \pi y =$ $= (\cos \pi y + \cos \pi x) \cos \pi y$.

   б) Сколько пар целых чисел (x, y) удовлетворяют одновременно этому уравнению и неравенству
   $$\arccos \frac{x}{7} - \arcsin \frac{y}{4} > -\frac{\pi}{2}?$$
4. [4 балла] В начале месяца было выделено 4 билета на праздничный концерт, которые планировалось случайным образом распределить между одиннадцатиклассниками. В конце месяца выяснилось, что будет выделено больше 4 билетов. Одиннадцатиклассники Петя и Вася вычислили, что вероятность им обоим вместе попасть на концерт в начале месяца была в 11 раз меньше, чем оказалась в конце месяца. Сколько всего было выделено билетов на концерт в конце месяца, если количество одиннадцатиклассников не изменилось?
5. [5 баллов] Точка O — центр окружности ω_1, описанной около остроугольного треугольника ABC. Окружность ω_2, описанная около треугольника BOC, пересекает отрезок AB в точке P. Найдите площадь треугольника ABC, если $AP = 16$, $BP = 8$, $AC = 22$.
6. [6 баллов] На координатной плоскости изображена фигура $\Phi(\alpha)$, состоящая из всех точек, координаты $(x; y)$ которых удовлетворяют системе неравенств
   $$\begin{cases} (x + 4\sin \alpha)(y - 4\cos \alpha) \leqslant 0, \\ x^2 + y^2 \leqslant 36. \end{cases}$$
   Найдите максимальное значение M периметра (длины границы) фигуры $\Phi(\alpha)$ и укажите все значения α, при которых оно достигается.
7. [6 баллов] Шар Ω касается всех рёбер правильной усечённой пирамиды, а шар ω касается всех её граней. Найдите угол наклона боковой грани пирамиды к плоскости её основания.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

1 ☒ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА 1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. **Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно.** Порча QR-кода недопустима!

№1.

Так как A – четырёхзначное число, составленное из одинаковых цифр, то $A = 1111 \cdot k = 11 \cdot 101 \cdot k$, $k = \{1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$. Тогда, поскольку $C < 100$, то $C \not\vdots\, 101$, но $A \cdot B \cdot C$ – квадрат, значит $B \,\vdots\, 101$ (иначе степень вхождения простого 101 в $A \cdot B \cdot C$ нечётна). Так как B – трёхзначное число, у которого есть цифра 7 и оно делится на 101, то $B = 707$ (101, 202, 303, 404, 505, 606, 808, 909 не содержат 7).

$A \cdot B \cdot C = 11 \cdot 101 \cdot k \cdot 7 \cdot 101 \cdot \cancel{k}^{C} = 101^2 \cdot 7 \cdot \cancel{k} \cdot 11 \cdot C$. Если $k \neq 7$, то $НОД(k,7) = 1$, $НОД(11,k) = 1$, но поскольку $A \cdot B \cdot C = t^2$, $t \in \mathbb{Z}$, то степени вхождения простых 7 и 11 четны, тогда $C = 7 \cdot 11 \cdot l$, $l \in \mathbb{N}$, при $l \geq 2$ $C > 99$, при $l = 1$ $C = 77$ и не содержит цифры 1. Значит, $k = 7$. Тогда $A \cdot B \cdot C = 101^2 \cdot 7^2 \cdot 11 \cdot C$, тогда поскольку степень вхождения 11 в $A \cdot B \cdot C = t^2$, $t \in \mathbb{Z}$, четна, то $C = 11 \cdot d$, $d \in \mathbb{N}$. При $d \geq 10$ $C > 100$, при $d = \{2,3,4,5,6,7,8,9\}$ C не содержит цифры 1. При $d = 1$ $C = 11$, и тройка $(7777, 707, 11)$ подходит:

$7777 \cdot 707 \cdot 11 = 11 \cdot 707 \cdot 707 \cdot 11 = (707 \cdot 11)^2$.

Ответ: $(7777; 707; 11)$.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

1 ☐ 2 ☒ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА 1 из 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. **Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно.** Порча QR-кода недопустима!

№2.

По условию $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{3}{xy}=\frac{1}{(x-4)}+\frac{1}{(y+4)}+\frac{3}{(x-4)(y+4)}$

$\frac{x+y+3}{xy}=\frac{x+y+3}{(x-4)(y-4)}$, ясно что $xy\neq 0$, $(x-4)(y-4)\neq 0$,

тогда $\cancel{(x+y+3)\cdot(x-4)(y-4)=(x+}$ $\left[\begin{array}{l} x+y+3=0 \quad (1) \\ \begin{cases} xy\neq 0 \\ xy=(x-4)(y-4) \quad (2) \end{cases} \end{array}\right.$

(1) $x+y+3=0$, $\cancel{y=-x-3;}$ Этот случай невозможен, так $\cancel{x^3-y^3-12xy=x^3+(x+3)^3+12x(x+3)}$ как $x>0$, $y>0$, и $x+y+3>3$.

(2) $\begin{cases} xy=(x-4)(y-4) \\ xy\neq 0 \end{cases}$ $\begin{cases} 0=-4x-4y+16; \\ xy\neq 0 \end{cases}$ $\begin{cases} x+y=4 \\ xy\neq 0 \end{cases}$ – ясно, что $xy\neq 0$ в силу $x>0, y>0$

$y=4-x$

$M=x^3-y^3-12xy=\cancel{(4-x)^3}\,x^3-(4-x)^3-12x\cdot(4-x)=x^3+(x-4)^3+12x^2-48x=$
$=x^3+x^3-12x^2+48x-64+12x^2-48x=2x^3-64.$

$f(x)=2x^3-64$ – возрастает на $D(f)=(-\infty;+\infty)$, поскольку $x>0$, $y>0$ и $x+y=4$, то $x>0$, и $4-x>0$, откуда $x\in(0;4)$. При таких x $x\neq 0$, $y\neq 0$, $x-4\neq 0$, $y+4\neq 0$, тогда $\cancel{f}$ $M\in(f(0);f(4))$:

$f(0)=-64$; $f(4)=128-64=64$. Ответ: $M\in(-64;64)$.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☒ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. **Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно.** Порча QR-кода недопустима!

№3.

а) $(\sin\pi y - \sin\pi x)\sin\pi y = (\cos\pi y + \cos\pi x)\cdot\cos\pi y$

$\cancel{\sin^2\pi y - \sin\pi x}$ Пусть $\pi y = \alpha$, $\pi x = \beta$:

$(\sin\alpha - \sin\beta)\sin\alpha = (\cos\alpha + \cos\beta)\cos\alpha$;

$\cancel{\sin\alpha\sin\beta - \sin^2\beta = \cos^2\alpha + \cos\alpha\cos\beta}$

$\sin^2\alpha - \sin\alpha\sin\beta = \cos^2\alpha + \cos\alpha\cos\beta$;

$\sin^2\alpha - \cos^2\alpha = \sin\alpha\sin\beta + \cos\alpha\cos\beta$

$-\cos 2\alpha = \cos(\alpha-\beta)$; $\quad \cos 2\alpha + \cos(\alpha-\beta) = 0$

$2\cos\left(\frac{3\alpha-\beta}{2}\right)\cdot\cos\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right) = 0$

$\left[\begin{array}{l} \frac{3\alpha-\beta}{2} = \frac{\pi}{2} + \pi n, n\in Z \\ \frac{\alpha+\beta}{2} = \frac{\pi}{2} + \pi n, n\in Z \end{array}\right.$ $\quad \left[\begin{array}{l} \frac{3\pi y - \pi x}{2} = \frac{\pi}{2} + \pi n, n\in Z \\ \frac{\pi y + \pi x}{2} = \frac{\pi}{2} + \pi n, n\in Z \end{array}\right.$ $\quad \left[\begin{array}{l} 3y - x = 2n+1, n\in Z \\ y + x = 2n+1, n\in Z. \end{array}\right.$

$\left[\begin{array}{l} x = 3y - 2n - 1, n\in Z \\ x = 2n+1-y, n\in Z. \end{array}\right.$

Ответ: $(3y-2n-1; y)$; $(2n+1-y; y)$, $y\in R$, $n\in Z$.

б) $\arccos\frac{x}{7} - \arcsin\frac{y}{4} > -\frac{\pi}{2}$ $\quad \begin{cases} -\frac{\pi}{2} \le \frac{y}{4} \le \frac{\pi}{2} \\ 0 \le \frac{x}{7} \le \pi \end{cases}$

$\begin{cases} -2\pi \le y \le 2\pi \\ 0 \le x \le 7\pi \end{cases}$ (1) $\quad$ В то же время $\arccos\frac{x}{7} \geq 0$,

$\arcsin\frac{y}{4} \le \frac{\pi}{2}$, откуда $-\arcsin\frac{y}{4} \geq -\frac{\pi}{2}$,

значит $\arccos\frac{x}{7} - \arcsin\frac{y}{4} \geq -\frac{\pi}{2}$, значит достаточно найти все $x\in Z$, $y\in Z$, удовл. нестрогому неравенству, и исключить слу-

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☒ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. **Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно.** Порча QR-кода недопустима!

чай равенства, который возможен при $\begin{cases} \frac{x}{7}=0 \\ \frac{y}{4}=-\frac{\pi}{2} \end{cases}$ $\begin{cases} x=0 \\ y=-2\pi, \end{cases}$

но $y=-2\pi \notin \mathbb{Z}$, значит $\arccos\frac{x}{7}-\arcsin\frac{y}{4}=-\frac{\pi}{2}$ невозможно при $x\in\mathbb{Z}$, $y\in\mathbb{Z}$. Тогда достаточно найти все x, y, удовлетворяющие (1).

$$\begin{cases} -2\pi\le y\le 2\pi & y=\{6,-5\dots 5,6\}^{*} \\ 0\le x\le 7\pi & x=\{0,1\dots 21\}^{**}. \end{cases}$$ ($\pi\approx 3{,}14159<3{,}1416$, $7\pi<21{,}9912$).

Ясно, что числа $x=3y-2n-1$ и y разной четности, $n\in\mathbb{Z}$, как и числа $x=2n+1-y$ и y, $y\in\mathbb{Z}$. Тогда для любой пары (x,y) ~~разной~~ одной четности подобрать целое n не получится, для ~~одной~~ разной четности подойдет $n=\frac{x+y-1}{2}\in\mathbb{Z}$. Тогда число подходящих пар (x,y) равно числу способов выбрать по одному числу из * и ** разной четности, то есть

$\underset{ч}{7}\cdot\underset{н}{11}+\underset{н}{6}\cdot\underset{ч}{11}=11\cdot 13=143$. Ответ: 143.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☒ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА 1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. **Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно.** Порча QR-кода недопустима!

N.4.

Пусть всего x одиннадцатиклассников и ~~x~~ бил k билетов.

Всего возможных исходов C_x^k, из них Петю и Васю устраивают C_{x-2}^{k-2} (2 билета у Пети и Васи, остальные раздаются как угодно). Тогда искомая вероятность равна

$$\frac{C_{x-2}^{k-2}}{C_x^k} = \frac{\cancel{1\cdot2\cdot3\cdot\ldots\cdot k}\,(x-2)\cdot(x-3)\cdot\ldots\cdot(k\cancel{+1})}{1\cdot2\cdot\ldots\cdot(x-2-k+2)} : \frac{x\cdot(x-1)\cdot(x-2)\cdot\ldots\cdot(k+1)}{1\cdot2\cdot\ldots\cdot(x-k)} =$$

$= \frac{k\cdot(k-1)}{x\cdot(x-1)}$. Таким образом, изначальная вероятность равна $\frac{4\cdot3}{x(x-1)}$, если в конце месяца было выделено l билетов, то вероятность равна $\frac{l\cdot(l-1)}{x(x-1)}$, и по условию она больше исходной в 11 раз:

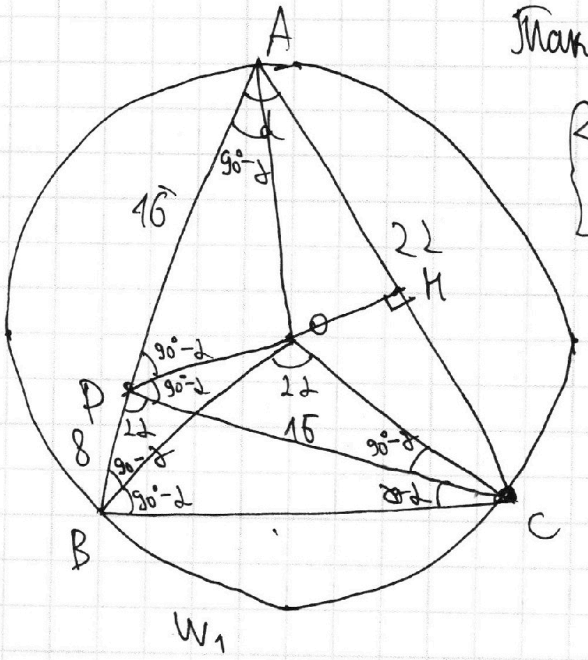
$\frac{4\cdot3\cdot11}{x(x-1)} = \frac{l(l-1)}{x(x-1)}$, $x\cdot(x-1)\neq0$, т.к. одиннадцатиклассников ≥2 (Петя и Вася).

$l^2-l=12\cdot11$; $\quad l^2-l-132=0$ $\quad \left[\begin{array}{l} l=12 \\ l=-11 \end{array}\right.$

Ясно, что $l\geq0$, потому $l=12$.

Ответ: в конце месяца было выделено 12 билетов.

№5.



Так как O-центр w_1, то

$\begin{cases} \angle AOB = 2\angle C \\ AO = BO \end{cases} \Rightarrow \angle BAO = \angle OBA = 90° - \angle C$

Аналогично,

$\begin{cases} \angle BOC = 2\angle A \\ BO = OC \end{cases} \Rightarrow \angle OBC = \angle OCB = 90° - \angle A$.

Тогда из вписанности $BPOC$ $\angle ABO = \angle PBO = \angle PCO = 90° - \angle C$; ~~$\angle OCP = \angle OBP = \angle OB$~~

$\angle OPC = \angle OBC = \angle OCB = 90° - \angle A$. Из $\angle BPO + \angle OCB = 180°$ и $\angle BPO + \angle OPA = 180°$ следует $\angle APO = \angle OCB = 90° - \angle A$. Тогда в $\triangle APC$ $\angle APC = \angle OPC + \angle OPA = 180° - 2\angle A$, $\angle PCA = 180° - \angle APC - \angle CAP = 180° - 180° + 2\angle A - \angle A = \angle A$ (из суммы углов $\triangle ACP$), значит $\angle PAC = \angle PCA$, то есть он равнобедренный с $AP = PC = 16$, $AC = 22$. Тогда можно найти $\sin A$: $PH \perp AC$, $H \in AC$. Тогда поскольку $\triangle PAC$ - равнобедренный с $PA = PC$, то $AH = HC = \frac{22}{2} = 11$, $PH = \sqrt{AP^2 - AH^2} = \sqrt{16^2 - 11^2} = \sqrt{5 \cdot 27} = 3\sqrt{15}$ (по теореме Пифагора для $\triangle AHP$), $\sin\angle PAC = \frac{PH}{AP} = \frac{3\sqrt{15}}{16}$,

тогда $S_{ABC} = \frac{1}{2} \cdot \sin\angle PAC \cdot AB \cdot AC = \frac{1}{2} \cdot \frac{3\sqrt{15}}{\cancel{22}\,16} \cdot (16+8) \cdot 22 = \frac{3\sqrt{15}}{32} \cdot 2^3 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 11 = \frac{99\sqrt{15}}{2}$. Ответ: $S_{ABC} = \frac{99\sqrt{15}}{2}$.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☒ 7 ☐

СТРАНИЦА 1 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. **Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно.** Порча QR-кода недопустима!

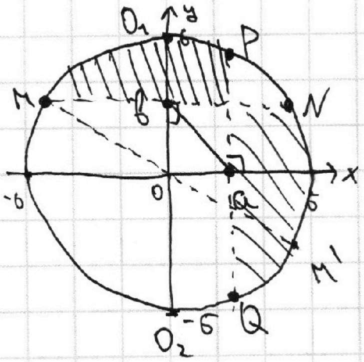
№6.

$$\begin{cases}(x+4\sin\alpha)\cdot(y-4\cos\alpha)\leq 0\\ x^2+y^2\leq 36\end{cases}$$

$$\begin{cases}\left[\begin{array}{l}\begin{cases}x\leq -4\sin\alpha\\ y\geq 4\cos\alpha\end{cases}\\ \begin{cases}x\geq -4\sin\alpha\\ y\leq 4\cos\alpha\end{cases}\end{array}\right.\\ x^2+y^2\leq 36 \quad (2)\end{cases}$$

(2) условие означает, что все точки $(x;y)$ лежат внутри круга с центром в $(0;0)$ и радиусом 6.

① ~~Если $-4\sin\alpha \leq$~~ Пусть $a=-4\sin\alpha$, $b=4\cos\alpha$, тогда $|a|\leq 4$, $|b|\leq 4$, и $a^2+b^2=16$.



$$\begin{cases}\left[\begin{array}{l}\begin{cases}x\leq a\\ y\geq b\end{cases}\\ \begin{cases}x\geq a\\ y\leq b\end{cases}\end{array}\right.\\ x^2+y^2\leq 36\end{cases}$$

Искомая фигура $\Phi(\alpha)$ изображена на картинке.

$P(\Phi(\alpha)) = MN+PQ+\cup MP+\cup QN$, где $M(-\sqrt{36-b^2}; b)$, $N(\sqrt{36-b^2}; b)$, $P(a; \sqrt{36-a^2})$; $Q(a; -\sqrt{36-a^2})$. $MN=\sqrt{4\cdot(36-b^2)}=2\sqrt{36-b^2}$;
$PQ\perp Ox$, $MN\perp Oy$, $(0;b)\in MN$; $(0;a)\in PQ$.
$PQ=2\sqrt{36-a^2}$. Докажем, что сумма дуг MP, QN фиксирована и равна половине длины окр $((0;0); R=6)$, то есть $\frac{2\pi\cdot 6}{2}=6\pi$. Для этого отметим M' — диаметрально противоположную M точку, $M'(\sqrt{36-b^2}; -b)$. Но $N(\sqrt{36-b^2}, b)$, то есть

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☒ 7 ☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. **Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно.** Порча QR-кода недопустима!

N и M' симм. отн. Ox, но P и Q тоже симм. отн Ox, тогда $QM' = PN$, $\cup QM' = \cup PN$, и $\cup QN + \cup MP = \cup QM' + \cup M'N + \cup PM =$

$= \cup M'N + \cup NP + \cup PM = \cup MM' = 6\pi$.

Тогда $P(\varphi(\alpha)) = 6\pi + 2\sqrt{36-b^2} + 2\sqrt{36-a^2}$, то есть необходимо максимизировать $\sqrt{36-b^2} + \sqrt{36-a^2}$ при $a^2+b^2=16$,

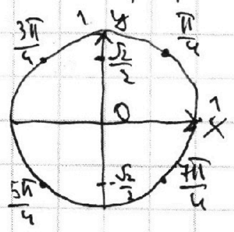
$\sqrt{36-b^2} + \sqrt{36-a^2} = \sqrt{20+a^2} + \sqrt{36-a^2}$, но нер-ву о средних

$$\frac{\sqrt{20+a^2}+\sqrt{36-a^2}}{2} \leq \sqrt{\frac{20+a^2+36-a^2}{2}} = \sqrt{28} = 2\sqrt{7},$$ откуда

$\sqrt{20+a^2} + \sqrt{36-a^2} \leq 4\sqrt{7}$, что достигается при $a^2=8$, $b^2=8$.

Тогда наибольший $P(\varphi(\alpha))$ равен $6\pi + 2\cdot 4\sqrt{7} = 6\pi + 8\sqrt{7}$, что достигается при $16\sin^2\alpha = 8$ и $16\cos^2\alpha = 8$. Ясно, что если выполнено 1 условие, то выполнено и второе, поэтому достаточно найти α, при которых $16\sin^2\alpha = 8$, $\sin^2\alpha = \frac{1}{2}$,

$$\left[\begin{array}{l} \sin\alpha = \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \sin\alpha = -\frac{\sqrt{2}}{2} \end{array}\right.$$



$\alpha = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi n}{2}$, $n \in \mathbb{Z}$.

Ответ: $P(\varphi(\alpha))_{наиб} = 6\pi + 8\sqrt{7}$, достигается при $\alpha = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi n}{2}$, $n \in \mathbb{Z}$.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

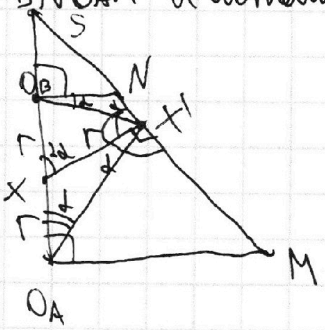
1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☒

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. **Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно.** Порча QR-кода недопустима!

так как $A_1A_2B_1B_2$ описан, но тогда

$O_BB_1 = O_BB_2 \dots O_BB_n = R\cdot\frac{2x-2y}{2y}$, так как $A_1A_2\dots A_n$ и $B_1B_2\dots B_n$ гомотетичны в $S = A_1B_1\cap A_2B_2 \dots \cap A_nB_n$ **. Рассмотрим

O_BNO_AM и используем *.



$O_BN = O_AM\cdot\frac{2x-2y}{2y} = \sqrt{R^2-y^2}\cdot\frac{2x-2y}{2y}$ по **.

$\Delta SO_BN \sim \Delta SO_AM \Rightarrow \frac{BO_B+2r}{2r} = \frac{O_AM}{O_BN} = \frac{2y}{2x-2y}$

Из счета углов $\angle NO_BX' = \angle XO_AX'$ и $\angle NX'O_B = \angle XX'O_A = \angle XO_AX' \Rightarrow$

$NX' = O_BN = \sqrt{R^2-y^2}\cdot\frac{2x-2y}{2y}$. Аналогично $\angle MO_AX' = \angle MX'O_A = 90°-\angle XO_AX' \Rightarrow$

$\Rightarrow X'M = MO_A = \sqrt{R^2-y^2}$. Но MN – высота в равнобедренной трапеции $A_1A_2B_2B_1$, $MN = \sqrt{x^2-(2y-x)^2}$, тогда имеем

$\sqrt{R^2-y^2}\cdot\frac{2x}{2y} = \sqrt{x^2-(2y-x)^2}$

$(R^2-y^2)\cdot x^2 = y^2\cdot(2y-2x)\cdot 2y$, необходимо найти ~~$\angle(A_iB_i$~~

$\angle(A_iB_i; A_iO_A)$, который равен $\arctg\frac{2r}{A_iO_A - B_iO_B} =$

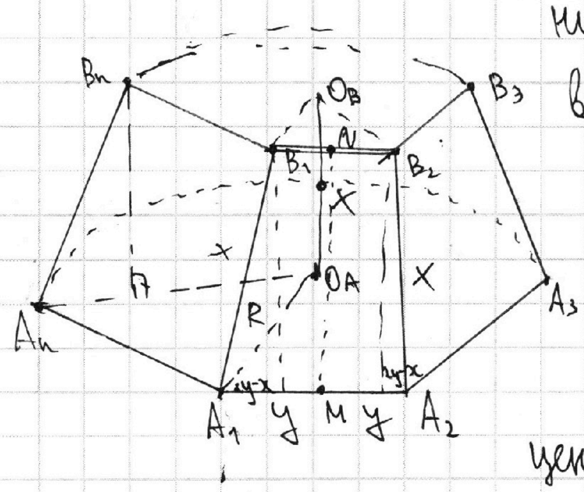
$= \frac{2r}{R - R\cdot\frac{2x-2y}{2y}} = \frac{2r}{R\cdot(2y-x)}$.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☒

СТРАНИЦА 1 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. **Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно.** Порча QR-кода недопустима!



Пусть $A_1A_2 \ldots A_n$ – нижнее основание усечённой пирамиды, $B_1B_2 \ldots B_n$ – верхнее, O_A, O_B – их центры.

В силу симметрии относительно O_AO_B ω касается этих граней в точках O_A, O_B, тогда центр ω – середина O_AO_B, но

$O_AO_B \perp (B_1B_2B_3)$, $O_AO_B \perp (A_1A_2A_3) \Rightarrow \rho((B_1B_2B_3);(A_1A_2A_3)) = 2r$, где r – радиус ω. Так как эта сфера касается еще и граней $A_1A_2B_1 \ldots A_nB_nA_1$, то $\rho(X; A_1A_2B_1) = \ldots = \rho(X; A_nA_1B_n) = r$, где X – середина O_AO_B. * Поскольку $A_1B_1B_2A_2$ – равнобокая трапеция, то ~~отрезок~~ $MN \perp B_1B_2$, $MN \perp A_1A_2$, и тогда X проецируется в ~~MN~~ X', $X' \in MN$ ($XX' \perp MN$, $XX' \perp A_1A_2$ поскольку $XM \perp A_1A_2$, $MN \perp A_1A_2$, и $(XMN) \perp (A_1A_2)$), где M, N – середины A_1A_2, B_1B_2 соответственно. В силу существования Ω следует, что существует впис. окр. для граней $A_1A_2B_1B_2$, $A_2A_3B_2B_3 \ldots A_nA_1B_nB_1$).

Пусть $O_AA_1 = R$, $A_1B_1 = x$, $A_1A_2 = 2y$. Тогда $B_1B_2 = 2x - 2y$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

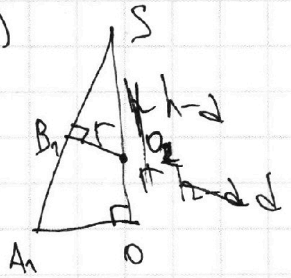
СТРАНИЦА __ ИЗ __

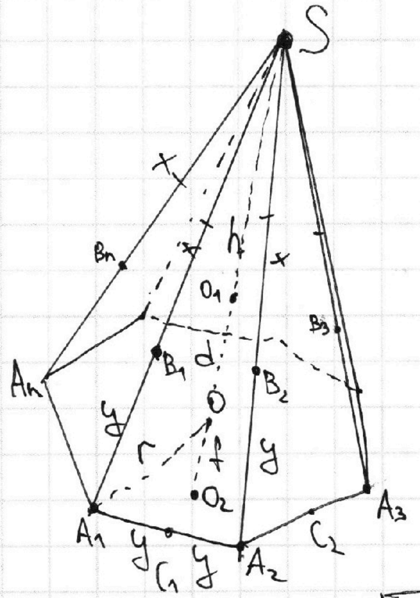
Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. **Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно.** Порча QR-кода недопустима!

$-M(\sqrt{36-b^2}; -b),\ Q(a; -\sqrt{36-a^2})$

$-MQ^2 = (\sqrt{36-b^2}-a)^2 + (b \mp \sqrt{36-a^2})^2 = 36 + 2a\sqrt{36-b^2} + 36 + 2b\sqrt{36-a^2}.$

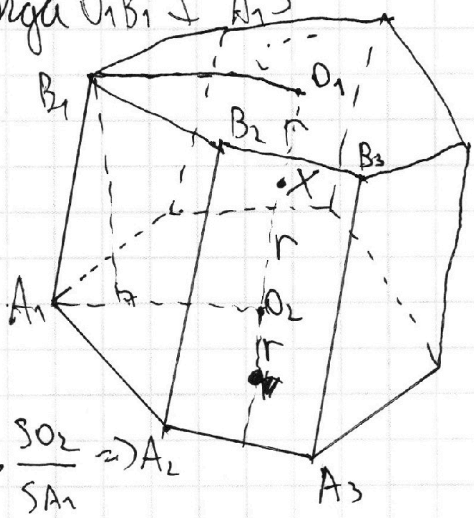
$PN^2 = 2(a-\sqrt{36-b^2})^2 + (\sqrt{36-b^2}-a)$

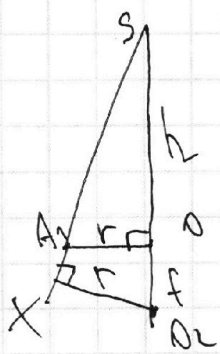




$\angle OA_iS - ?$

O_1 - центр впис. сферы, O_2 - кас. всех ребер. Тогда $O_1B_1 \perp A_1S$





$\sqrt{r^2-y^2+f^2} =$

$\triangle SOA_1 \sim \triangle SXO_2$

$\frac{XO_2}{OA_1} = \cancel{SA_1}\ \frac{SO_2}{SA_1} \Rightarrow$

$XO_2 = \frac{r\cdot(h+f)}{\sqrt{h^2+r^2}}$

$\rho(O_2; A_2A_3B_2) = r.$

$\frac{2r}{R - R\cdot\frac{2x-2y}{2y}} = \frac{2r}{R\cdot(1-\frac{x-y}{y})} = \frac{2r}{R\cdot(2y-x)}.$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

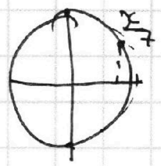
1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА __ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. **Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно.** Порча QR-кода недопустима!

$\cos(\alpha+\beta)+\cos(\alpha-\beta)=2\cos\alpha\cos\beta$

$\sin(90°-\alpha+\beta)=\cos(\alpha-\beta)=\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta.$



$\arccos\frac{x}{7}\geq 0,\quad \arcsin\frac{y}{4}\ \cancel{\leq -\frac{\pi}{2}}\ ;\ \arcsin\frac{y}{4}$

$\arccos\frac{x}{7}\quad y=1, x=0$

$(\sin\pi-\sin 0)\cdot\sin\pi\overset{?}{=}(\cos\pi+\cos 0)\cos\pi$

$y{:}2\quad \cos\pi y=-1, \cos(3y-1)\pi=-1$

$(\sin\pi y-\sin(3y-1)\pi)\cdot\sin\pi y\overset{?}{=}(\cos\pi y+\cos(3y-1)\pi)\cos\pi y.$

$-\sin(2n+1-y)\pi+\sin^0\pi y=0$

$\cos\pi y+\cos(1-y)\pi=0$

$$\begin{array}{r} 3{,}1416 \\ \times\quad 7 \\ \hline 21{,}9912 \end{array}$$

$C_x^k=\frac{x\cdot(x-1)\ldots(k+1)}{1\cdot2\cdot3\ldots k}$

Пусть всего x одиннадцатиклассников.

$C_8^6=\frac{8!}{6!\cdot2!}=\frac{8\cdot7}{1\cdot2}$

$\frac{4}{x}\cdot\frac{3}{(x-1)}=P$ (изн. вер

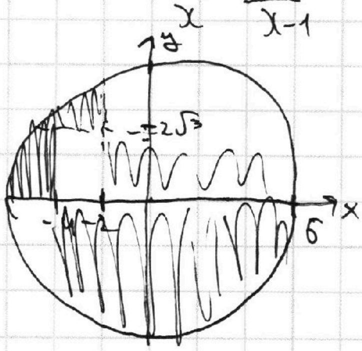
$C_x^4,\quad C_{x-2}^2;\quad \frac{C_{x-2}^2}{C_x^4}$

$C_{x-2}^2=\frac{(x-2)(x-3)}{2};$

$C_x^4=\frac{x\cdot(x-1)(x-2)(x-3)}{1\cdot2\cdot3\cdot4}$

$\frac{4\cdot3}{(x-1)(x-2)}$

$\frac{k}{x}\cdot\frac{(k-1)}{x-1}$



$\frac{1}{2}\cdot24\cdot22\cdot\sin=11\cdot24\cdot\sin=11\cdot24\cdot\frac{3\sqrt{15}}{16}=11\cdot3\cdot\frac{3\sqrt{15}}{2}=\frac{99\sqrt{15}}{2}.$

$(x+4\sin\alpha)(y-4\cos\alpha)\leq0$

~~$xy-$~~ $\alpha=\frac{\pi}{2}\quad(x+4)y\leq0$

$(x+2)(y-2\sqrt{3})\leq0.$