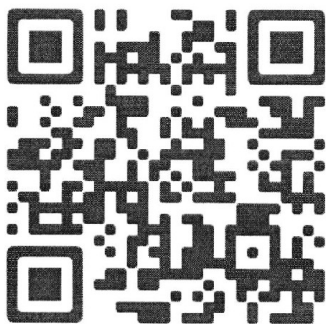




МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

11 КЛАСС. Вариант 4



1. [3 балла] Найдите все тройки натуральных чисел $(A; B; C)$ такие, что:

- A — четырёхзначное число, составленное из одинаковых цифр,
- B — трёхзначное число, хотя бы одна из цифр которого равна 7,
- C — двузначное число, хотя бы одна из цифр которого равна 1,
- произведение $A \cdot B \cdot C$ является квадратом некоторого натурального числа.

2. [3 балла] Положительные числа x и y таковы, что значение выражения $K = \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{3}{xy}$ не изменяется, если x уменьшить на 4, а y — увеличить на 4. Найдите все возможные значения выражения $M = x^3 - y^3 - 12xy$.

3. [5 баллов] а) Найдите все пары действительных чисел $(x; y)$ такие, что $(\sin \pi y - \sin \pi x) \sin \pi y = (\cos \pi y + \cos \pi x) \cos \pi y$.

б) Сколько пар целых чисел (x, y) удовлетворяют одновременно этому уравнению и неравенству

$$\arccos \frac{x}{7} - \arcsin \frac{y}{4} > -\frac{\pi}{2}?$$

4. [4 балла] В начале месяца было выделено 4 билета на праздничный концерт, которые планировалось случайным образом распределить между одиннадцатиклассниками. В конце месяца выяснилось, что будет выделено больше 4 билетов. Одиннадцатиклассники Петя и Вася вычислили, что вероятность им обоим вместе попасть на концерт в начале месяца была в 11 раз меньше, чем оказалась в конце месяца. Сколько всего было выделено билетов на концерт в конце месяца, если количество одиннадцатиклассников не изменилось?

5. [5 баллов] Точка O — центр окружности ω_1 , описанной около остроугольного треугольника ABC . Окружность ω_2 , описанная около треугольника BOC , пересекает отрезок AB в точке P . Найдите площадь треугольника ABC , если $AP = 16$, $BP = 8$, $AC = 22$.

6. [6 баллов] На координатной плоскости изображена фигура $\Phi(\alpha)$, состоящая из всех точек, координаты $(x; y)$ которых удовлетворяют системе неравенств

$$\begin{cases} (x + 4 \sin \alpha)(y - 4 \cos \alpha) \leq 0, \\ x^2 + y^2 \leq 36. \end{cases}$$

Найдите максимальное значение M периметра (длины границы) фигуры $\Phi(\alpha)$ и укажите все значения α , при которых оно достигается.

7. [6 баллов] Шар Ω касается всех рёбер правильной усечённой пирамиды, а шар ω касается всех её граней. Найдите угол наклона боковой грани пирамиды к плоскости её основания.



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☒ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА
1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

1. $A, B, C \in \mathbb{N}$

2. A может быть 1 из чисел: 1111, 2222, 3333, 4444, 5555, 6666, 7777, 8888, 9999. Заметим, что каждое из этих чисел делится на 11 и на 101 по 1 раз.

3. $A \cdot B \cdot C = R^2$, $R \in \mathbb{N}$, т.е. 101 и 11 в разложении на простые множители произведения должны встретиться четное число раз (101 и 11 — простые числа, т.е. известно, что простое, докажем это и для 101).

4. $101:1=101$, $101:2=50,5$, $101:3=33\frac{2}{3}$; $101:4=25\frac{1}{4}$; $101:5=20\frac{1}{5}$; $101:6=16\frac{5}{6}$; $101:7=14\frac{3}{7}$; $101:8=12\frac{5}{8}$; $101:9=11\frac{2}{9}$; $101:10=10\frac{1}{10}$, дальнейшее

рассмотрение не требуется, т.к. при делении 101 на q , где $q > 10$, $q \in \mathbb{N}$ натуральный делитель полученный должен быть меньше $\frac{11}{10}$, а таких нет.

5. Т.к. 101 — простое C — двузначное а в A входит 1 раз, то $B:101$ при этом степень возведения может равняться только 1.

6. Из условия в B есть цифра 7 т.е. $B=707$ — единственное трехзначное число кратное 101, в котором присутствует цифра 7.

7. Т.к. $B:11$, A делится на 11 1 раз, то $C:11$ единственное двузначное число, в разложении на простые множители которого есть 11 и при этом содержащее цифру 1 — это 11.

8. $B=707=7 \cdot 101$, $C=11$, $A \cdot B \cdot C = 11^2 \cdot 101^2 \cdot 7 \cdot m$, где $m \in \mathbb{N}$, $1 \leq m \leq 409$, $m \cdot 101 \cdot 11 = A$; $R^2 = 11^2 \cdot 101^2 \cdot 7 \cdot m$, $11^2 \cdot 101^2 = 2^2$, $2 \in \mathbb{N}$, значит $7 \cdot m$ — квадрат натурального числа, значит $m=7$ — единственный вариант; $A=7777$, $B=707$, $C=11$

Ответ: 1 тройка: $A=7777$, $B=707$, $C=11$.



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.



СТРАНИЦА
1 из 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$1. k = \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{3}{xy} = \frac{1}{x-4} + \frac{1}{y+4} + \frac{3}{(x-4)(y+4)}, x > 0, y > 0, x \neq 4$$

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{3}{xy} = \frac{1}{x-4} + \frac{1}{y+4} + \frac{3}{(x-4)(y+4)}$$

$$\frac{y}{xy} + \frac{x}{xy} + \frac{3}{xy} = \frac{y+4}{(x-4)(y+4)} + \frac{x-4}{(x-4)(y+4)} + \frac{3}{(x-4)(y+4)}$$

$$\frac{y+x+3}{xy} = \frac{x+y+3}{(x-4)(y+4)} \text{ из того, что } x > 0 \text{ и } y > 0: xy > 0, x+y+3 > 0, \text{ значит } (x-4)(y+4) > 0, x > 4.$$

$$2. \frac{y+x+3}{xy} = \frac{x+y+3}{(x-4)(y+4)} \mid \text{м.к. } xy > 0, (x-4)(y+4) > 0, \text{ то делим обе части}$$

$$\text{на } xy \text{ и на } (x-4)(y+4).$$

$$(y+x+3) \cdot (x-4)(y+4) = xy(x+y+3) \mid x+y+3 > 0, \text{ м.с. делим на } \frac{1}{x+y+3} \text{ обе части}$$

$$(x-4)(y+4) = xy, xy - 4y + 4x - 16 = xy, 4x = 4y + 16, x = y + 4.$$

$$3. x^3 - y^3 - 12xy = (y+4)^3 - y^3 - 12(y+4) \cdot y = y^3 + 12y^2 + 48y + 64 - y^3 - 12y^2 - 48y = 64.$$

$$\text{Ответ: } M = x^3 - y^3 - 12xy = 64.$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☒ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА
2 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

- при этом $\arccos \frac{x}{7} \geq 0$; $\frac{\pi}{2} \geq \arcsin \frac{y}{4} \geq -\frac{\pi}{2}$
7. $y \geq y_2 - 4$; $x \geq x_2 - 7$; $\arccos \frac{x}{7} - \arcsin \frac{y}{4} > -\frac{\pi}{2}$ при всех x и y удовлетворяющих неравенствам и при $\arccos \frac{x}{7} \neq 0$ если $\arcsin \frac{y}{4} = -\frac{\pi}{2}$ удовлетворяющих неравенствам и $\arccos \frac{x}{7} \neq 0$ при $\arcsin \frac{y}{4} = -\frac{\pi}{2}$.
8. $x \in \mathbb{Z}$, $y \in \mathbb{Z}$, всею пар целых чисел x и y , таких что $y \geq y_2 - 4$, $x \geq x_2 - 7$.
9. $40 + 28 = 68$ (при x -неч, y -ч, при этом для каждого $y - x$ x может принимать все нечетные значения удовлетворяющие неравенству; $x \geq x_2 - 7$, аналогично при x -ч, y -неч, получается $5 \cdot 8 + 7 \cdot 4 = 68$).
9. Если $\arcsin \frac{y}{4} = -\frac{\pi}{2}$ 9. $\arccos \frac{x}{7} > -\frac{\pi}{2} + \arcsin \frac{y}{4}$
9. Если $\arcsin \frac{y}{4} = \frac{\pi}{2}$, т.е. $\frac{y}{4} = 1$ при $y \in \mathbb{Z}$, то $y = 4$, тогда $\arccos \frac{x}{7} \neq 0$, т.е. $\frac{x}{7} \neq 1$ что принимает значение равное 0 только при единственном значении x , а именно при $\frac{x}{7} = 1$, т.е. при $x = 7$.
10. $68 - 1 = 67$ - вариантов пар чисел x и y , которые целые и удовлетворяют одновременно двум неравенствам и неравенству.
- Ответ: 1) $x = 3y - 1 - 2k$, $y = 1 + 2k - 4$ при $k \in \mathbb{Z}$; 2) 67.



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1
☐2
☐3
☒4
☐5
☐6
☐7
☐

СТРАНИЦА

1 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\begin{aligned}
 1. \text{ Пусть } \pi x = \alpha, \pi y = \beta; \\
 (\sin \alpha - \sin \alpha) \cdot \sin \beta &= (\cos \beta + \cos \alpha) \cdot \cos \beta \\
 \sin^2 \beta - \cos^2 \beta &= \sin \beta \sin \alpha + \cos \beta \cos \alpha \\
 \sin^2 \beta - \cos^2 \beta &= -2 \cos \alpha - \cos 2\beta; \sin \beta \sin \alpha + \cos \beta \cos \alpha = \cos(\alpha - \beta) = \cos(\beta - \alpha) \\
 -\cos 2\beta &= \cos(\beta - \alpha) = \cos(\alpha - \beta)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 2. \cos \varphi &= -1 - \cos(180 - \varphi) \\
 \cos 2\beta &= \cos(180 + \beta - \alpha) \\
 2\beta &= 180 + \beta - \alpha + 2\pi k, k \in \mathbb{Z} \\
 \beta - \alpha &= 180 + 2\pi k = \pi + 2\pi k \\
 \pi(x + y) &= \pi + 2\pi k \\
 x + y &= 1 + 2k, x = 1 + 2k - y; \text{ при этом } \cos 2\beta = \cos(180 - \beta + \alpha) \Rightarrow 3\beta - \alpha = \pi + 2\pi k, \\
 3y - x &= 1 + 2k; k \in \mathbb{Z}.
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 3. \text{ При } x = 1 + 2k - y: \cos \pi y + \cos \pi x \text{ будет равен } 0, \text{ т.к. } x = 1 - y \cos(\pi - y) \cdot \pi = \\
 = \cos(\pi - y + 2\pi k) \text{ при } k \in \mathbb{Z}; \cos \pi y + \cos(\pi - y) = \cos \pi y - \cos \pi y = 0; \\
 \sin \pi y - \sin \pi x = 0, \text{ т.к. } \sin \pi x = \sin(\pi - y) \cdot \pi = \sin(\pi - y + 2\pi k); \\
 \sin \pi y = \sin(\pi - \pi y) \Rightarrow \sin \pi y - \sin(\pi - \pi y) = 0; 0 = 0 \text{ верно}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 4. \text{ При } x = 3y - 1 - 2k \text{ будет также верно при любых } y \text{ и любых } k \in \mathbb{Z}, \text{ т.к.} \\
 \cos(2\pi y) = \cos(180 - \beta + \alpha) = \cos(-\pi y + \pi x + 180) = \cos(180 - \pi y + \pi(3y - 1)) = \cos(180 - \\
 - \pi y + \pi(3y - 1 - 2k)) = \cos(-\pi y + 3\pi y) = \cos 2\pi y.
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 5. \text{ И.е. подходят все } x, y \text{ удовлетворяющие системе из 2 равенств:} \\
 x = 3y - 1 - 2k; x = 1 + 2k - y; \text{ при } k \in \mathbb{Z}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 6. \arccos \frac{x}{4} - \arcsin \frac{y}{4} > -\frac{\pi}{2}; \frac{y}{4} \geq -1; \frac{x}{4} \geq -1; \text{ при этом } \arccos \left(\frac{x}{4} \right) \text{ и } \arcsin \frac{y}{4} \\
 \text{больше или равны } -\frac{\pi}{2}, \text{ и меньше или равны } \frac{\pi}{2}.
 \end{aligned}$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☒	☐	☐	☐

СТРАНИЦА
1 из 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

1. Дадимотрши, какая вероятность попасть на концерт была у одиннадцатиклассников раньше: пусть всего n -ти классников, тогда число всех вариантов выбрать 4 школьника: $\frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}$, если идут Петя и Вася, то $\frac{(n-2)(n-3)}{2}$, т.е. Вероятность нужного условия исхода равна $\frac{4 \cdot 3}{n \cdot (n-1)}$.

2. Пусть билетов стало m , $m > 4$, если $m \geq n$, то вероятность пойти на концерт у мальчиков - 1, тогда $\frac{1 \cdot 2}{n(n-1)} = \frac{1}{11}$, т.е. $n(n-1) = 12 \cdot 11$, $n = 12$, $m \geq 12$, т.к. по условию $m > n$ не могло быть, то $m = 12$.

3. Если $m < n$, тогда выбрать m человек из n можно: $\frac{n(n-1)(n-2) \dots (n-m+1)}{m(m-1) \dots 2}$, Если Петя и Вася получают билет, то число таких исходов: $\frac{(n-2)(n-3) \dots (n-m+1)}{(m-2)(m-3) \dots 2}$, тогда вероятность пойти на концерт обоих мальчиков: $\frac{m(n-1)}{n(n-1)}$.

4. $\frac{m(m-1)}{n(n-1)} = \frac{4 \cdot 3 \cdot 11}{n(n-1)}$, $n(n-1) > 0$, тогда $\frac{m(m-1)}{1} = \frac{12 \cdot 11}{1}$, $m^2 - m - 12 \cdot 11 = 0$

$D = 1 + 48 \cdot 11 = 529 = 23^2$, $m > 0$, значит $m = \frac{1+23}{2} = 12$.

Ответ: 12 билетов.



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении **каждой** задачи отдельно.

1
☐

2
☐

3
☐

4
☐

5
☒

6
☐

7
☐

СТРАНИЦА
2 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$24^2 = 2 \cdot 24 \cdot \frac{192}{11} \cdot \cos \alpha$$

$$\cos \alpha = \frac{24 \cdot 8 \cdot 11}{192 \cdot 2} = \frac{6 \cdot 11}{96} = \frac{11}{16}$$

$$\sin \alpha = \sqrt{1 - \frac{121}{256}} = \sqrt{\frac{135}{256}} = \frac{1}{16} \cdot \sqrt{5 \cdot 3^3} = \frac{3 \cdot \sqrt{15}}{16}$$

$$P. S_{\triangle ABC} = 24 \cdot 22 \cdot \frac{3\sqrt{15}}{16} = 33 \cdot 3\sqrt{15} = 99\sqrt{15}$$

$$\text{Ответ: } S_{\triangle ABC} = 99\sqrt{15}$$

$$24^2 + \left(\frac{192}{11}\right)^2 - 2 \cdot 24 \cdot \frac{192}{11} \cdot \cos 4 = \left(\frac{192}{11}\right)^2$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1
☐

2
☐

3
☐

4
☐

5
☐

6
☒

7
☐

СТРАНИЦА
2 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

6. $|x|=|y|$, т.е. $14\sin\alpha=14\cos\alpha$, $|\sin\alpha|=|\cos\alpha|$ $\alpha=\frac{\pi}{4}+\pi k$, $\alpha=-\frac{\pi}{4}+\pi k$.

7. $|x|=|y|=2\sqrt{2}$, т.к. сумма синусов по ρ , то пусть $x=2\sqrt{2}$, $y=2\sqrt{2}$, значение $M=\rho_{\text{окр}}+\sqrt{2}\cdot 4=\rho_{\text{окр}}+8\sqrt{2}$, $\rho_{\text{окр}}$ всегда равна $\frac{1}{2}\cdot 2\pi r=\pi r$ — при любом α , т.е. $M=6\pi+8\sqrt{2}\approx 3,14\cdot 6+8\sqrt{2}\neq$
Ответ: $M=6\pi+8\sqrt{2}$ при $\alpha=\pm\frac{\pi}{4}+\pi k$.

8



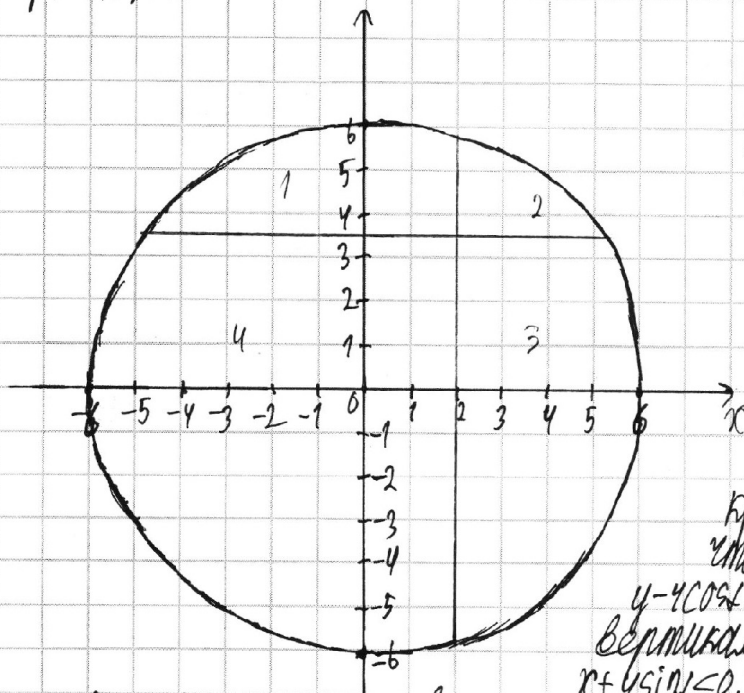
На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☒ 7 ☐

СТРАНИЦА
1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$\begin{cases} (x+4\sin t)(y-4\cos t) \leq 0 \\ x^2+y^2 \leq 36 \end{cases}$ — формула, задающая все x, y принадлежащие кругу с центром $(0, 0)$ и $r=6$.



1. $-4 \leq 4\sin t \leq 4$ и $-4 \leq 4\cos t \leq 4$,
т.е. $x \geq -6$, $y \geq -6$, т.е. при любых значениях t найдется такое значение x и такое значение y , что $x = -4\sin t$, $y = 4\cos t$, графики данных функций соответственно горизонтальная и вертикальная прямые, которые пересекутся где-то в круге.

2. Эти две прямые разделят круг на 4 сектора, таких что выше горизонтальной прямой $y - 4\cos t > 0$, ниже $y - 4\cos t < 0$, правее вертикальной прямой $x + 4\sin t > 0$, левее $x + 4\sin t < 0$. Пронумеруем сектора начиная

с левого верхнего по часовой стрелке, получим, что при x и y из секторов 1 и 3 $(x+4\sin t)(y-4\cos t) < 0$, в секторах 2 и 4 $(x+4\sin t)(y-4\cos t) > 0$.

3. Заметим, что при $|x| > 4$, $|y| > 4$ одновременно $(x+4\sin t)(y-4\cos t) \leq 0$ не зависит от значения t , при $x > 4$, $y > 4$ $(x+4\sin t)(y-4\cos t) > 0$, при $x > 4$, $y < 4$ $(x+4\sin t)(y-4\cos t) < 0$, при $x < 4$, $y > 4$ меньше 0, при $x < 4$, $y < 4$ больше 0.

4. Заметим, что при вертикальной прямой $x=0$, $y=-4$ либо $y=4$, тогда P_1+P_2 будут иметь одно и то же значение, при этом при сдвиге вертикальной прямой влево или вправо горизонтальная будет стремиться к оси OX , при всех $x \in [-4; 4]$ — значение $y = 4\cos t$ симметрично относительно Ox , при $x=-4$, $x=4$ $y=0$.

5. Понятно, что при $S_{\text{общ.}} = \text{const}$ наибольшее P_1+P_2 будет достигнуто при наименьшем P_1+P_3 , а именно при $|x|=|y|$.



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☒

СТРАНИЦА

2 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

6. O_2 -центр $\triangle ZYZ'$, O_1 -центр $\triangle P_1P_2P_3$.

7. O_2 -центр высоты B_0B_1 , тогда $B_0O_2 = B_1O_2 = B_2O_2 = B_3O_2$, при этом B_2O_2 -центр $\triangle P_1P_2P_3$, B_3O_2 -центр $\triangle P_1P_2P_3$, O_2 -центр высоты равнобедренной трапеции, т.е. B_2B_3 и O_2 лежат на одной прямой, B_2B_3 -средняя линия трапеции $\triangle P_1P_2P_3$.

8. B_2B_3 -средняя линия B_0B_1 -высота, т.е. $B_0B_1 \perp B_2B_3$, тогда

$$\triangle B_2O_2B_0 = \triangle B_0B_2O_2 = \triangle B_1O_2B_3 = \triangle B_3O_2B_1, B_2B_0 = B_0B_2 = B_1B_3 = B_3B_1,$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.



СТРАНИЦА
1 ИЗ 1

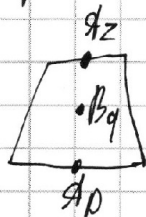
Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

1. Обозначим точки касания шара Ω как $A_1, A_2, \dots, A_m$; а точки касания шара ω как $B_1, B_2, \dots, B_n$.

2. П.к. $A_1, A_2, \dots, A_n$ — точки касания, то они равноудалены от центра шара Ω как A , аналогично $B_1, B_2, \dots, B_n$ равноудалены от центра шара ω .

3. П.к. усеченная пирамида — правильная, то центры обоих шаров лежат на центральной оси правильной усеченной пирамиды.

4. Из пункта следует, что точки на 1 грани и на противоположной грани, в вертикальной также что

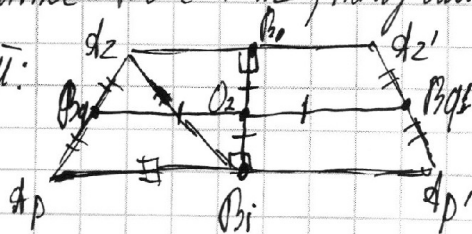


A_z, B_q, A_p и $A_{z'}, B_{q'}, A_{p'}$ — лежат в 1 плоскости, при этом A_z — центр ребра, A_p — центр ребра, B_q — центр ребра, $A_{z'}$ — центр ребра, $A_{p'}$ — центр ребра, $B_{q'}$ — центр ребра, $A_{z'}$ — центр ребра, $A_{p'}$ — центр ребра, $B_{q'}$ — центр ребра.

бедренная трапеция, т.е. $A_z A_p$ — высота, $B_q \in A_z A_p$; также т.к.

в основании правильный многоугольник, то $A_p A_{p'}$ — высота к основанию, содержащая эту точку, т.е. $\angle A_z A_p A_{p'}$ — искомым.

5. Из аналогичных рассуждений есть точка $B_i \in A_p A_{p'}$, также $B_o \in A_z A_{z'}$, получим задачу с равнобедренной трапецией:





На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

1
☐

2
☐

3
☐

4
☐

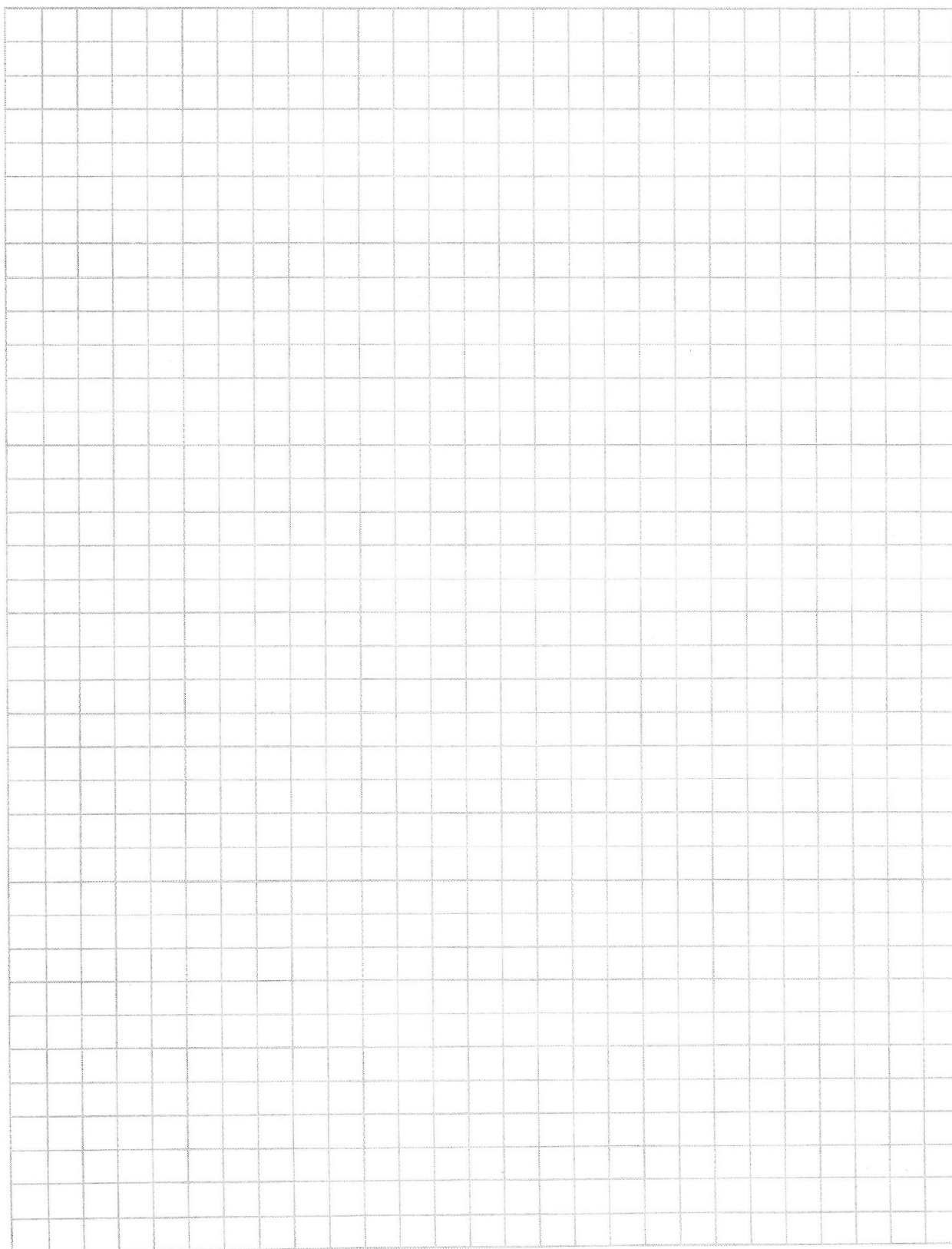
5
☐

6
☐

7
☐

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. **Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно.** Порча QR-кода недопустима!





На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

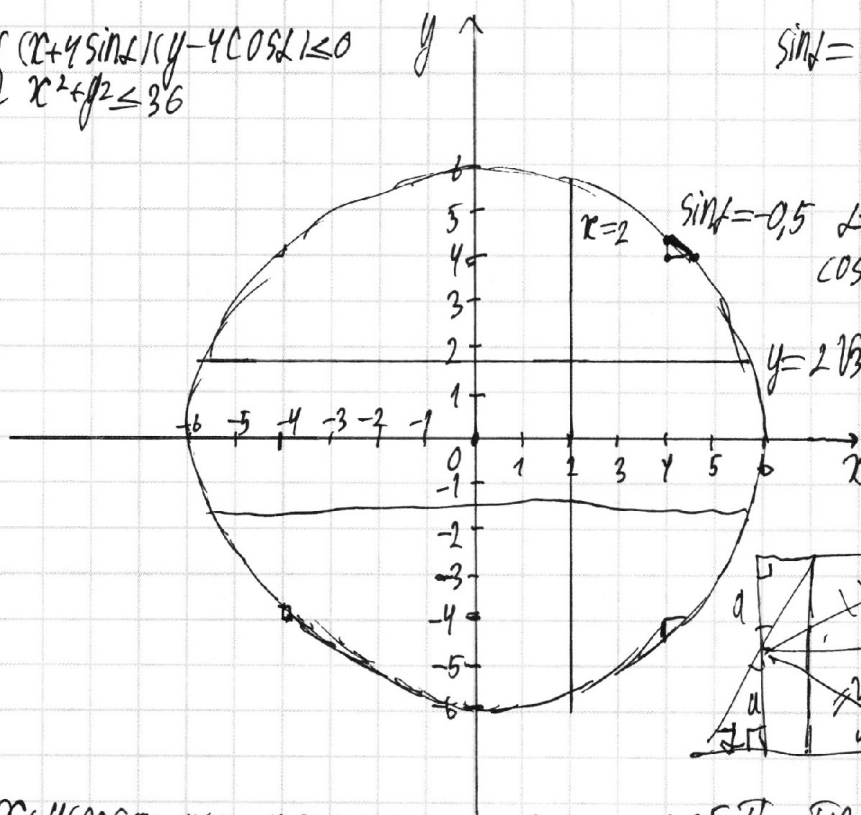
1 2 3 4 5 6 7
☐ ☐ ☐ ☐ ☐ ☐ ☐

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

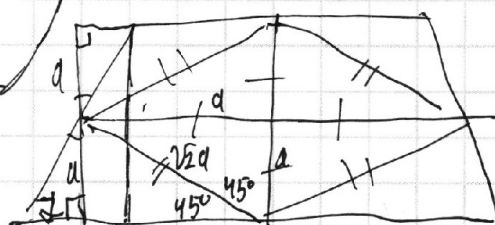
Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\begin{cases} (x+4\sin\alpha)(y-4\cos\alpha) \leq 0 \\ x^2+y^2 \leq 36 \end{cases}$$

$$\sin\alpha = \cos(90^\circ - \alpha)$$



$$\begin{aligned} \sin\alpha &= -0,5 \quad \alpha = -30^\circ \\ \cos 30^\circ &= \frac{\sqrt{3}}{2} \quad y - 4 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \\ &= y - 2\sqrt{3} \end{aligned}$$



$$(x+4(\cos 90^\circ - 1))(y-4\cos\alpha) \leq 0$$

1.

$$\alpha \in \left[-\frac{\pi}{2} + 2\pi k; \frac{\pi}{2} + 2\pi k\right]$$

$$\cos(90^\circ - \alpha) = -\cos(90^\circ + \alpha)$$

$$(x-4\cos(90^\circ + \alpha))(y-4\cos\alpha) \leq 0$$

$$\begin{cases} y-4\cos\alpha \geq 0 \\ x-4\cos(90^\circ + \alpha) < 0 \\ y-4\cos\alpha < 0 \\ x-4\cos(90^\circ + \alpha) \geq 0 \end{cases}$$

$$12 + \frac{\sqrt{20} \cdot 2 \sqrt{4} \cdot \sqrt{28}}{8} = 24$$

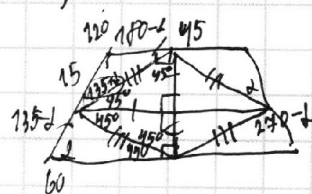
$$6 + \sqrt{20} \cdot \sqrt{2} \cdot \sqrt{28} = 24$$

$$6 + 2\sqrt{5} \cdot \sqrt{4} \cdot \sqrt{7} = 24$$

$$3 + \sqrt{5} \cdot 2\sqrt{7} = 24$$

$$5,5 \sqrt{4} = 11$$

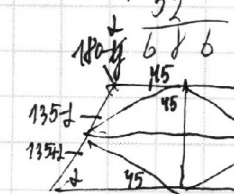
$$3 + 2,2 \sqrt{4} = 11$$



$$\begin{aligned} & \times 22 \\ & 22 \\ & \times 22 \\ & 22 \\ & \times 22 \\ & 22 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \times 2,4 \\ & 2,4 \\ & \times 2,4 \\ & 2,4 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \times 2,6 \\ & 2,6 \\ & \times 2,6 \\ & 2,6 \end{aligned}$$



$$\begin{aligned} & 23 \\ & \times 265 \\ & 265 \\ & \times 265 \\ & 265 \end{aligned}$$





На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$(\sin \pi y - \sin \pi x) \cdot \sin \pi y = (\cos \pi y + \cos \pi x) \cdot \cos \pi y$$

$$\pi y = \alpha, \pi x = \beta$$

$$\cos(\alpha - \beta) = \cos \alpha \cos \beta + \sin \alpha \sin \beta$$

$$(\sin \alpha - \sin \beta) \cdot \sin \alpha = (\cos \alpha + \cos \beta) \cdot \cos \alpha$$

$$x = 3y - 1 - 2h, \quad x = 4 - 2h - y$$

$$x = 11 - 2h, \quad x = -3 + 2h$$

$$\sin^2 \alpha - \sin \alpha \sin \beta = \cos^2 \alpha + \cos \alpha \cos \beta$$

$$\sin^2 \alpha - \cos^2 \alpha = \sin \alpha \sin \beta + \cos \alpha \cos \beta$$

$$-\cos 2\alpha = \cos(\alpha - \beta)$$

$$\cos \alpha = \cos(\alpha - \beta)$$

$$\cos \alpha = -\cos(180 - \alpha)$$

$$\cos(60 - 30) = \cos 30 = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\sin 60 \cdot \sin 30 + \cos 60 \cdot \cos 30 = \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\cos 30 = \cos 30$$

$$\cos 30 = -\cos 150$$

$$\cos 210 = -\cos 30$$

$$\cos 210 = \cos 150$$

$$180 - \beta + \alpha + 2\pi R = 2\beta$$

$$3\beta = \pi + \alpha + 2\pi R$$

$$3y = 1 + x + 2h$$

$$x = 3y - 1 - 2h$$

$$x = 3y - 1 - 2h$$

$$x = 4 + 2h - y$$

$$h = 1$$

$$y = 1, h = 1, x = 0, x = 2$$

$$y = \frac{1}{6} (\sin 30 - \sin \pi) \cdot \sin 30 = (\cos 30 + \cos \pi) \cdot \cos 30$$

$$x = -0,5 - 2h$$

$$x = \frac{5}{6} + 2h$$

$$\left(\frac{1}{2} + 1\right) \cdot \frac{1}{2} = \left(\frac{\sqrt{3}}{2} + 0\right) \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \quad \frac{3}{4} = \frac{3}{4} \quad \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2} = \left(\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$$

$$(\sin \pi y - \sin \pi x) \cdot \sin \pi y = (\cos \pi y + \cos \pi x) \cdot \cos \pi y$$

$$(\sin 0 - \sin 180) \cdot \sin 0 = (\cos 0 + \cos 180) \cdot \cos 0$$

$$h = 0, y = 0, x = 1$$

$$y = 1, h = 1, x = 2$$

$$h = 0, y = 0,5, x =$$

$$(\sin \pi - \sin 2\pi) \cdot \sin \pi = (\cos \pi + \cos 2\pi) \cdot \cos \pi$$

$$(0 - 0) \cdot 0 = (-1 + 1) \cdot \cos$$

$$(\sin x - \sin x) \cdot \sin x = (\cos x + \cos x) \cdot \cos x$$

$$2\cos^2 x = 0$$

$$(\sin 0 + \sin 3\pi) \cdot \sin 0 = (\cos 0 + \cos 3\pi) \cdot \cos 0$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Всего: $\frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{4 \cdot 3 \cdot 2}$

для гл. 2: $\frac{(n-2)(n-3)}{2}$

$\frac{4 \cdot 3}{n(n-1)}$

$\frac{7}{n(n-1)}$

$\frac{7}{n(n-1)} = \frac{1}{11}$ $\frac{77}{n(n-1)} = 1, n \in \mathbb{N}$

$n(n-1) = 77 = 7 \cdot 11$

стало всего: $\frac{n(n-1) \cdot \dots \cdot (n-m+1)}{4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot m \cdot (m-1) \cdot \dots \cdot 2}$

стало для 2: $\frac{n-2(n-3) \cdot \dots \cdot (n-m+1)}{(m-2) \cdot (m-3) \cdot \dots \cdot 2}$

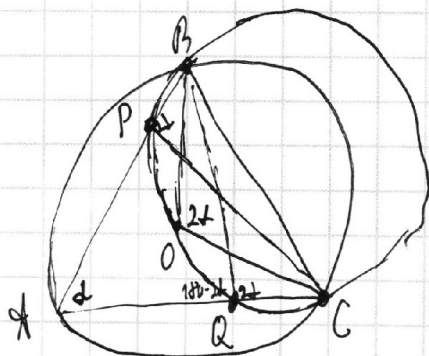
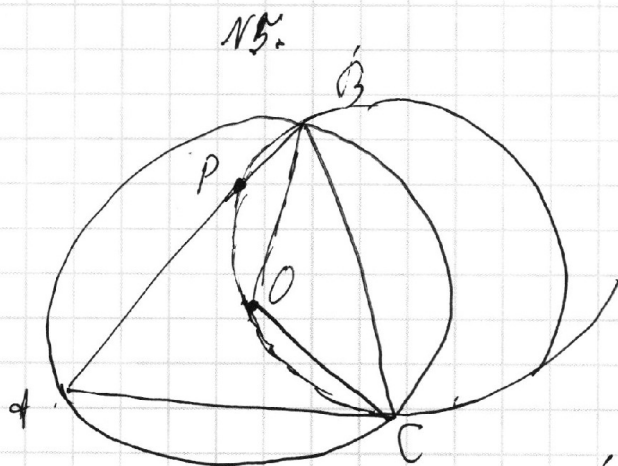
$(m-2) \cdot \frac{m(m-1)}{n(n-1)} = \frac{11 \cdot 12}{11 \cdot 11}$

$m^2 - m - 132 = 0$

$D = 1 + 528 = 529$

$m = \frac{1+23}{2} = 12$

$\begin{array}{r} \times 23 \\ 23 \\ + 69 \\ \hline 529 \end{array}$



$AP = PC = 16$

$16^2 + 22^2 - 2 \cos \angle C \cdot 16 \cdot 22 = 16^2$

$22 = \cos \angle C \cdot 32$ $\cos \angle C = \frac{22}{32} = \frac{11}{16}$

$S_{ABC} = ?$

$AP = 16, BP = 8, AC = 22.$

$16 \cdot 24 = 22^2 - ?$

$24 \cdot 2^3 \cdot 3 = 11^2 \cdot 2^2$ - неверно

$P \cdot 24 = 192$

$14 \cdot 11 = 154 + 17 = 171$

$\angle BOC = 2 \angle A$

$AQ \cdot AC = AP \cdot AB$

$22 \cdot AQ = 24 \cdot 16$

$AQ = \frac{P \cdot 24}{11} = \frac{192}{11} = 17 \frac{5}{11}$

$AQ = QB = 17 \cdot \frac{5}{11}$

24

$\begin{array}{r} \times 16 \\ 16 \\ + 96 \\ \hline 256 \end{array}$

$\begin{array}{r} 135 \ 15 \\ - 10 \ 127 \\ \hline 35 \ 127 \\ - 35 \ 0 \\ \hline 5 \cdot 3^3 \end{array}$

$\begin{array}{r} 256 \\ - 211 \\ \hline 45 \end{array}$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

☐ ☐ ☐ ☐ ☐ ☐ ☐

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$A, B, C \in \mathbb{N}$$

$$A = a_1 a_2 a_3 a_4$$

B = трехзначное, одна из цифр точно 7.

C = двузначное, одна из цифр 1

$$A \cdot B \cdot C = R^2, R \in \mathbb{N}$$

$$A = 1111, 2222, 3333, 4444, 5555, 6666, 7777, 8888, 9999$$

и

$$101 \quad 202 \quad 303 \quad 404 \quad 505 \quad 606 \quad 707 \quad 808 \quad 909$$

$$101 \quad 101.2 \quad 101.3 \quad 101.4 \quad 101.5 \quad 101.6 \quad 101.7 \quad 101.8 \quad 101.9 \quad 101\text{-простое}$$

$$B = 101 \cdot m, m \in \mathbb{N}, 19m \in \mathbb{N}; \leq 9$$

$$B = 707 \cdot k$$

$$C = 11.$$

$$K = \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{3}{xy}, x > 0, y > 0$$

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{3}{xy} = \frac{1}{x-4} + \frac{1}{y+4} + \frac{3}{(x-4)(y+4)}$$

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{3}{xy} = \frac{1}{x-4} + \frac{1}{y+4} + \frac{3}{xy-4y+4x-16}$$

$$\frac{y+x+3}{xy} = \frac{y+4+x-4+3}{(x-4)(y+4)} = \frac{y+x+3}{(x-4)(y+4)}$$

$$(y+x+3) \cdot (x-4)(y+4) = (y+x+3) \cdot (xy)$$

и m делится:

$$\frac{n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \dots \cdot (n-m+1)}{m \cdot (m-1) \cdot \dots \cdot 2}$$

$$\frac{m \cdot (m-1)}{(n-m+1)(n-m+2)} = \frac{11 \cdot 4 \cdot 3}{(n-2)(n-3)}$$

$$\frac{n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \dots \cdot (n-m+3)}{(m-2) \cdot (m-3) \cdot \dots \cdot 2}$$

$$(m^2 - m) \cdot (n^2 - 6n + 5m + 6) = 132 \cdot (n^2 - nm + 2n - nm + m^2 - 2m + n - m + 2) = 132 \cdot (n^2 + m^2 - 2nm + 3n - 3m + 2)$$

$$m^2 n^2 - m n^2 - 5 m^2 n - 5 m n + 6 m^2 - 6 m = 132 n^2 + 132 m^2 - 264 m n + 396 n - 396 m + 264$$

n-однозначный, цифр 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9.

$$\text{Всего вариантов: } \frac{n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot (n-3)}{4 \cdot 3 \cdot 2} = \frac{n \cdot (n-1)}{2} \cdot \frac{4 \cdot 3}{(n-2)(n-3)}$$

$$\frac{1}{y+4} + \frac{1}{y} + \frac{3}{xy} = \frac{1}{y} + \frac{1}{y+4} + \frac{3}{xy}$$

$$x^3 - y^3 - 12xy$$

$$(y^2 + 8y + 16)(y+4) =$$

$$= y^3 + 4y^2 + 8y^2 + 32y + 16y + 64 =$$

$$= y^3 + 12y^2 + 48y + 64$$

$$x^3 - y^3 - 12xy =$$

$$= 12y^2 + 48y + 64 - 12 \cdot y \cdot (y+4) =$$

$$= 12y^2 + 48y + 64 - 12y^2 - 48y = 64$$