МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

11 КЛАСС. Вариант 4

1. [3 балла] Найдите все тройки натуральных чисел $(A; B; C)$ такие, что:
   - A — четырёхзначное число, составленное из одинаковых цифр,
   - B — трёхзначное число, хотя бы одна из цифр которого равна 7,
   - C — двузначное число, хотя бы одна из цифр которого равна 1,
   - произведение $A \cdot B \cdot C$ является квадратом некоторого натурального числа.

2. [3 балла] Положительные числа x и y таковы, что значение выражения $K = \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{3}{xy}$ не изменяется, если x уменьшить на 4, а y — увеличить на 4. Найдите все возможные значения выражения $M = x^3 - y^3 - 12xy$.

3. [5 баллов] а) Найдите все пары действительных чисел $(x; y)$ такие, что $(\sin \pi y - \sin \pi x) \sin \pi y = (\cos \pi y + \cos \pi x) \cos \pi y$.

   б) Сколько пар целых чисел (x, y) удовлетворяют одновременно этому уравнению и неравенству
$$\arccos \frac{x}{7} - \arcsin \frac{y}{4} > -\frac{\pi}{2}?$$

4. [4 балла] В начале месяца было выделено 4 билета на праздничный концерт, которые планировалось случайным образом распределить между одиннадцатиклассниками. В конце месяца выяснилось, что будет выделено больше 4 билетов. Одиннадцатиклассники Петя и Вася вычислили, что вероятность им обоим вместе попасть на концерт в начале месяца была в 11 раз меньше, чем оказалась в конце месяца. Сколько всего было выделено билетов на концерт в конце месяца, если количество одиннадцатиклассников не изменилось?

5. [5 баллов] Точка O — центр окружности ω_1, описанной около остроугольного треугольника ABC. Окружность ω_2, описанная около треугольника BOC, пересекает отрезок AB в точке P. Найдите площадь треугольника ABC, если $AP = 16$, $BP = 8$, $AC = 22$.

6. [6 баллов] На координатной плоскости изображена фигура $\Phi(\alpha)$, состоящая из всех точек, координаты $(x; y)$ которых удовлетворяют системе неравенств
$$\begin{cases} (x + 4\sin\alpha)(y - 4\cos\alpha) \leqslant 0, \\ x^2 + y^2 \leqslant 36. \end{cases}$$
   Найдите максимальное значение M периметра (длины границы) фигуры $\Phi(\alpha)$ и укажите все значения α, при которых оно достигается.

7. [6 баллов] Шар Ω касается всех рёбер правильной усечённой пирамиды, а шар ω касается всех её граней. Найдите угол наклона боковой грани пирамиды к плоскости её основания.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

1 [X] 2 [ ] 3 [ ] 4 [ ] 5 [ ] 6 [ ] 7 [ ]

СТРАНИЦА 1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. **Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно.** Порча QR-кода недопустима!

1. $A, B, C \in N$
2. A может быть 1 из чисел: 1111, 2222, 3333, 4444, 5555, 6666, 7777, 8888, 9999. Заметим, что каждое из этих чисел делится на 11 и на 101 по 1 разу.
3. $A \cdot B \cdot C = R^2$, $R \in N$, т.е. 101 и 11 в разложении на простые множители произведения должны встречаться чётное число раз (101 и 11 - простые числа, 11 - известно, что простое, докажем это и для 101)

4. $101:1=101$, $101:2=50{,}5$, $101:3=33\frac{2}{3}$; $101:4=25\frac{1}{4}$; $101:5=20\frac{1}{5}$; $101:6=$ $=16\frac{5}{6}$; $101:7=14\frac{3}{7}$; $101:8=12\frac{5}{8}$; $101:9=11\frac{2}{9}$; $101:10=10\frac{1}{10}$, дальнейшее рассмотрение не требуется, т.к. при делении 101 на q, где $q>10$, $q \in N$ натуральный делитель полученный должен быть меньше ~~10~~ 11, а таких нет.

5. Т.к. 101 - простое, C - двузначное, а в A входит 1 раз, то $B \vdots 101$, при этом степень вхождения может равн~~ятся~~ яться только 1.
6. Из условия в B есть цифра 7 т.е. $B=707$ - единственное трёхзначное число кратное 101, в котором присутствует цифра 7.

7. Т.к. $B \not\vdots 11$, A делится на 11 1 раз, то $C \vdots 11$ единственное двузначное число, в разложении на простые множетели которого есть 11 и при этом содержащее цифру 1 - это 11.
8. $B=707=7\cdot101$, $C=11$, $A\cdot B\cdot C = 11^2\cdot101^2\cdot7\cdot m$, где $m\in N$, $1\leq m\leq \cancel{10}\ 9$, $m\cdot101\cdot11=A$; $R^2=11^2\cdot101^2\cdot7\cdot m$, $11^2\cdot101^2=Z^2$, $Z\in N$, значит $7\cdot m$ - квадрат натурального числа, значит $m=7$ - единственный вариант; $A=7777$, $B=707$, $C=11$

Ответ: 1 тройка: $A=7777$, $B=707$, $C=11$.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

1 ☐ 2 ☒ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА 1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. **Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно.** Порча QR-кода недопустима!

1. $k=\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{3}{xy}=\frac{1}{x-4}+\frac{1}{y+4}+\frac{3}{(x-4)(y+4)}$, $x>0, y>0, x\neq 4$

$\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{3}{xy}=\frac{1}{x-4}+\frac{1}{y+4}+\frac{3}{(x-4)(y+4)}$

$\frac{y}{xy}+\frac{x}{xy}+\frac{3}{xy}=\frac{y+4}{(x-4)(y+4)}+\frac{x-4}{(x-4)(y+4)}+\frac{3}{(x-4)(y+4)}$

$\frac{y+x+3}{xy}=\frac{x+y+3}{(x-4)(y+4)}$ из того, что $x>0$ и $y>0$: $xy>0$, $x+y+3>0$, значит $(x-4)(y+4)>0$, $x>4$.

2. $\frac{(y+x+3)}{xy}=\frac{(x+y+3)}{(x-4)(y+4)}$ | т.к. $xy>0$, $(x-4)(y+4)>0$, то домножим обе части на xy и на $(x-4)(y+4)$.

$(y+x+3)\cdot(x-4)(y+4)=xy(x+y+3)$ | $x+y+3>0$, т.е. домножим на $\frac{1}{x+y+3}$ обе части

$(x-4)(y+4)=xy$, $xy-4y+4x-16=xy$, $4x=4y+16$, $x=y+4$.

3. $x^3-y^3-12xy=(y+4)^3-y^3-12\cancel{x}(y+4)\cdot y=y^3+12y^2+48y+64-y^3-$ $-12y^2-48y=64$.

Ответ: $M=x^3-y^3-12xy=64$.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☒ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. **Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно.** Порча QR-кода недопустима!

при ~~этом~~ $\pi \geq \arccos\frac{x}{7} \geq 0$; $\frac{\pi}{2} \geq \arcsin\frac{y}{4} \geq -\frac{\pi}{2}$

7. $4 \geq y \geq -4$; $7 \geq x \geq -7$; $\arccos\frac{x}{7} - \arcsin\frac{y}{4} \geq -\frac{\pi}{2}$ ~~при всех x и y~~ при всех x и y удовлетворяющих неравенствам и при $\arccos\frac{x}{7} \neq 0$ если $\arcsin\frac{y}{4} = \frac{\pi}{2}$
~~удовлетворяющих неравенствам и $\arccos\frac{x}{7} \neq 0$ при $\arcsin\frac{y}{4} = -\frac{\pi}{2}$.~~

8. $x \in Z$, $y \in Z$, всего пар целых чисел x и y, таких что $4 \geq y \geq -4$, $7 \geq x \geq -7$:

$8 \cdot 40 + 28 = 68$ (при x-нет, y-ч, при этом для каждого y-ч x может принимать все нечётные значения удовлетворяющие неравенству: $7 \geq x \geq -7$, аналогично при x-ч, y-нет, получается $5 \cdot 8 + 7 \cdot 4 = 68$).

~~9. Если $\arcsin\frac{y}{4}$~~ ~~9. $\arccos\frac{x}{7} \geq -\frac{\pi}{2} + \arcsin\frac{y}{4}$~~

9. Если $\arcsin\frac{y}{4} = \frac{\pi}{2}$, т.е. $\frac{y}{4} = 1$ при $y \in Z$, то $y = 4$, тогда $\arccos\frac{x}{7} \neq 0$, ~~т.е. $\frac{x}{7} \neq 1$~~ что принимает значение равное 0 только при единственном значении x, а именно при $\frac{x}{7} = 1$, т.е. при $x = 7$.

10. $68 - 1 = 67$ – вариантов пар чисел x, y, которые целые и удовлетворяют одновременно ~~двум неравенствам~~ уравнению и неравенству.

Ответ: 1) $x = 3y - 1 - 2k$, $x = 1 + 2k - y$ при $k \in Z$; 2) 67.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☒ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА 1 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. **Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно.** Порча QR-кода недопустима!

1. Пусть $\pi x=\alpha$, $\pi y=\beta$;
$(\sin\beta-\sin\alpha)\cdot\sin\beta=(\cos\beta+\cos\alpha)\cdot\cos\beta$
$\sin^2\beta-\cos^2\beta=\sin\beta\sin\alpha+\cos\beta\cos\alpha$
$\sin^2\beta-\cos^2\beta=\cancel{-2\cos}-\cos2\beta$; $\sin\beta\sin\alpha+\cos\beta\cos\alpha=\cos(\alpha-\beta)=\cos(\beta-\alpha)$

$-\cos2\beta=\cos(\beta-\alpha)=\cos(\alpha-\beta)$

2. $\cos\varphi=\cancel{-180}-\cos(180-\varphi)$
$\cos2\beta=\cos(180+\beta-\alpha)$
$2\beta=180+\beta-\alpha+2\pi k$, $k\in Z$
$\beta+\alpha=180+2\pi k=\pi+2\pi k$
$\pi(x+y)=\pi+2\pi k$
$x+y=1+2k$, $x=1+2k-y$; при этом $\cos2\beta=\cos(180-\beta+\alpha)\Rightarrow 3\beta-\alpha=\pi+2\pi k$,

$3y-x=1+2k$; $\cancel{k\in Z}$.

3. При $x=1+2k-y$: $\cos\pi y+\cos\pi x$ будет равен 0, т.к. ~~$x=1-y$~~ $\cos((1-y)\cdot\pi)=$

$=\cos((1-y+2k)\cdot\pi)$ при $k\in Z$; $\cos\pi y+\cos(\pi-\pi y)=\cos\pi y-\cos\pi y=0$;
$\sin\pi y-\sin\pi x=0$, т.к. $\sin\pi x=\sin((1-y)\cdot\pi)=\sin((1-y+2k)\cdot\pi)$;
$\sin\pi y=\sin(\pi-\pi y)\Rightarrow\sin\pi y-\sin(\pi-\pi y)=0$; $0=0$ – верно

4. При $x=3y-1-2k$ – будет также верно при любом y и любом $k\in Z$, т.к.

$\cos(2\pi y)=\cos(180-\beta+\alpha)=\cos(-\pi y+\pi x+180)=\cos(180-\pi y+\pi(3y-1))=\cos(180-$

$-\pi y+\pi(3y-1-2k))=\cos(-\pi y+3\pi y)=\cos2\pi y$.

5. Т.е. подходят все x,y удовлетворяющие любому из 2 равенств:

$x=3y-1-2k$; $x=1+2k-y$; при $k\in Z$.

6. $\arccos\frac{x}{7}-\arcsin\frac{y}{7}\geq-\frac{\pi}{2}$; $1\geq\frac{y}{7}\geq-1$; $1\geq\frac{x}{7}\geq-1$; ~~при этом $\arccos(\frac{x}{7})$ и $\arcsin\frac{y}{7}$ больше или равны $-\frac{\pi}{2}$, и меньше или равны $\frac{\pi}{2}$.~~

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☒ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА 1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. **Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно.** Порча QR-кода недопустима!

1. Рассмотрим, ~~какая~~ какая вероятность попасть на концерт была у одиннадцатиклассников раньше: пусть всего 11-ти классников n, тогда число всех вариантов выбрать 4 школьника: $\frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{4\cdot3\cdot2\cdot1}$, если идут Петя и Вася, то $\frac{(n-2)(n-3)}{2}$, т.е. вероятность нужного по условию исхода равна $\frac{4\cdot3}{n\cdot(n-1)}$.

2. Пусть билетов стало m, $m>4$, если $m\geq n$, то вероятность пойти на концерт у мальчиков -1, тогда $\frac{12}{n(n-1)}=\frac{1}{11}$, т.е. $n(n-1)=12\cdot11$, $n=12$, $m\geq12$, т.к. по условию $m>n$ не могло быть, то $m=12$

3. Если $m<n$, тогда выбрать m человек из n можно: $\frac{n(n-1)(n-2)\cdot\ldots\cdot(n-m+1)}{m(m-1)\cdot\ldots\cdot2}$, если Петя и Вася получат билет, то число таких исходов: $\frac{(n-2)\cdot(n-3)\cdot\ldots\cdot(n-m+1)}{(m-2)\cdot(m-3)\cdot\ldots\cdot2}$, тогда вероятность пойти на концерт обоим мальчикам: $\frac{m(m-1)}{n(n-1)}$

4. $\frac{m(m-1)}{n(n-1)}=\frac{4\cdot3\cdot11}{n(n-1)}$, $n(n-1)>0$, тогда $\frac{m(m-1)}{1}=\frac{12\cdot11}{1}$, $m^2-m-12\cdot11=0$

$D=1+48\cdot11=529=(23)^2$, $m>0$, значит $m=\frac{1+23}{2}=12$.

Ответ: 12 билетов.

$24^2 = 2\cdot 24\cdot \frac{192}{11}\cdot \cos\alpha$

$\cos\alpha = \frac{24\cdot \cancel{2}\cdot 11}{192\cdot 2} = \frac{6\cdot 11}{96} = \frac{11}{16}$

$\sin\alpha = \sqrt{1-\frac{121}{256}} = \sqrt{\frac{135}{256}} = \frac{1}{16}\cdot\sqrt{5\cdot 3^3} = \frac{3\cdot\sqrt{15}}{16}$

8. $S_{\Delta ABC} = \overset{3}{\cancel{24}}\cdot\overset{11}{\cancel{22}}\cdot\frac{3\sqrt{15}}{\underset{2\,1}{\cancel{16}}} = 33\cdot 3\sqrt{15} = 99\sqrt{15}$

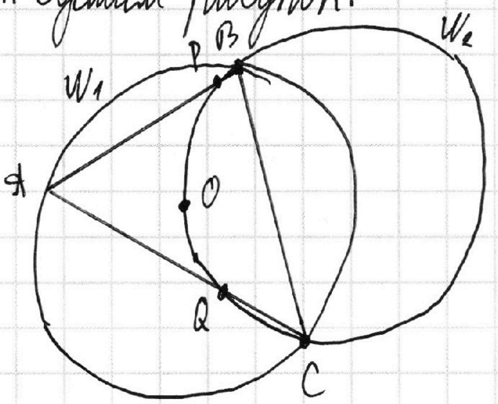
Ответ: $S_{\Delta ABC} = 99\sqrt{15}$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☒ 6 ☐ 7 ☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. **Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно.** Порча QR-кода недопустима!

1. Сделаем рисунок.



$AB=AP+PB=16+8=24$

св-ву = свойству

2. Пусть $AC \cap w_2=Q$, это так, так как если AC — касательная, то по св-ву окружности $AP\cdot AB=AC^2$, но $24\cdot16\neq22^2$, значит AC — не касательная.

3. По свойству $AQ\cdot AC=AP\cdot AB$, тогда $AQ=\frac{16\cdot24}{22}=17\frac{5}{11}$

4. w_1 — описанная окружность ΔABC, $\angle BOC$ — центральный, значит равен значению дуги BC окружности w_1, $\angle BAC$ — вписанный в w_1, т.е. равен половине $\smile BC$, пусть $\angle BAC=\alpha$, тогда $\angle BOC=2\alpha$.

5. $\angle BOC=\angle BQC=\angle BPC=2\alpha$ — вписанные углы в w_2^*, опираются на $\smile BC$.
w_2.

6. $\angle AQB$ и $\angle BQC$ — смежные, значит по свойству $\angle AQB=180^\circ-\angle BQC=180^\circ-2\alpha$, $\angle BAC=\alpha=\angle BAQ$ $(Q\in AC)$, т.е. ΔABQ — р/б, т.к. по св-ву сумма углов треугольника 180°, т.е. $\angle ABQ=180^\circ-180^\circ+2\alpha-\alpha=\alpha=\angle BAQ$, $AQ=QB$ — стороны р/б ΔABQ против равных углов.
р/б — равнобедренный

7. $AQ=QB=17\frac{5}{11}$, $AB=24$, $S_{ABC}=AC\cdot AB\cdot\sin\angle BAC$, AC и AB — известно, найдём $\sin\angle BAC$; в последующих действиях $\sin\alpha$

$\sin\alpha=\sqrt{1-\cos^2\alpha}$ в д. остроугольном ΔABC.
По т. косинусов ΔAQB: $AB^2+AQ^2-2AB\cdot AQ\cdot\cos\alpha=QB^2$, $\cos\alpha>0$, т.к. $\angle BAC$ — острый

$24^2+\left(\frac{192}{11}\right)^2-2\cdot24\cdot\frac{192}{11}\cdot\cos\alpha=\left(\frac{192}{11}\right)^2$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно.**

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☒ 7 ☐

СТРАНИЦА 2 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. **Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно.** Порча QR-кода недопустима!

6. $|x|=|y|$, т.е. $|4\sin\alpha|=|4\cos\alpha|$, $|\sin\alpha|=|\cos\alpha|$ $\alpha=\frac{\pi}{4}+\pi k$, $\alpha=-\frac{\pi}{4}+\pi k$.

7. $|x|=|y|=|2\sqrt{2}|$, т.к. случаи симметричны по P, то пусть $x=2\sqrt{2}$, $y=2\sqrt{2}$, значение $M=P_{окр}+\sqrt{28}\cdot 4=P_{окр}+8\cdot\sqrt{7}$, $P_{окр}$ всегда равна $\frac{1}{2}\cdot 2\pi r=\pi r$ – при любых α, т.е. $M=6\pi+8\cdot\sqrt{7}\approx$ ~~3,14·6+8√7=~~

$\neq$ Ответ: $M=6\pi+8\sqrt{7}$ при $\alpha=\pm\frac{\pi}{4}+\pi k$.

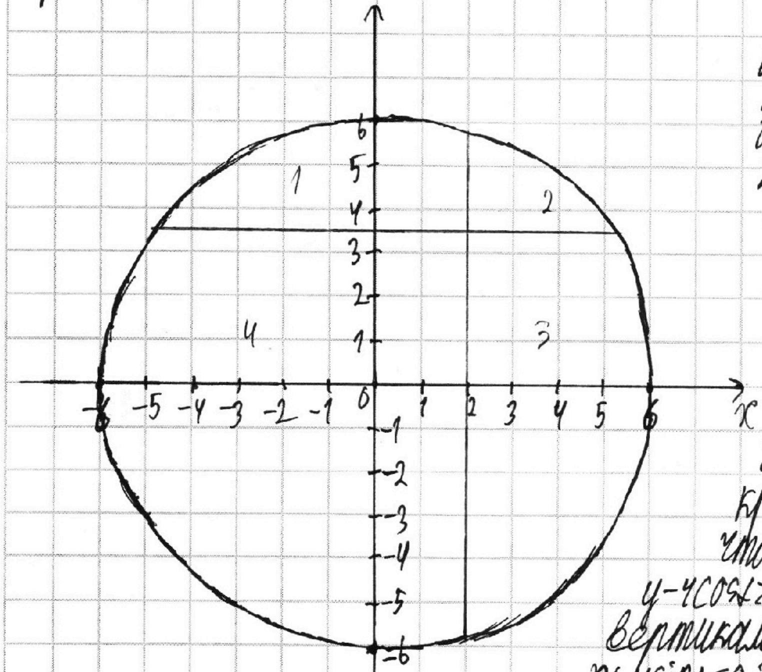
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно.**

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☒ 7 ☐

СТРАНИЦА 1 ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. **Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно.** Порча QR-кода недопустима!

$\begin{cases}(x+4\sin\alpha)(y-4\cos\alpha)\le 0\\ x^2+y^2\le 36\end{cases}$ — формула, задающая все x, y принадлежащие кругу с центром $(0,0)$ и $r=6$.



1. $-4\le 4\sin\alpha\le 4$, $-4\le 4\cos\alpha\le 4$, $6\ge x\ge -6$ и $6\ge y\ge -6$, т.е. при любом значении α найдётся такое значение x и такое значение y, что $x=-4\sin\alpha$, $y=4\cos\alpha$, графики данных функций соответственно горизонтальная и вертикальная прямые которые пересекутся где-то в круге.

2. Эти две прямые разделят круг на 4 сектора, таких что выше горизонтальной прямой $y-4\cos\alpha>0$, ниже $y-4\cos\alpha<0$; правее вертикальной прямой $x+4\sin\alpha>0$, левее $x+4\sin\alpha<0$. Пронумеруем сектора начиная с левого верхнего по часовой стрелке, получим, что при x и y из секторов 1 и 3 $(x+4\sin\alpha)(y-4\cos\alpha)<0$, в секторах 2 и 4 $(x+4\sin\alpha)(y-4\cos\alpha)>0$.

3. Заметим что при $|x|>4$; $|y|>4$ одновременно $(x+4\sin\alpha)(y-4\cos\alpha)\le 0$ не зависит от значения α, при $x>4$, $y>4$ $(x+4\sin\alpha)(y-4\cos\alpha)>0$; при $x>4$, $y<4$ $(x+4\sin\alpha)(y-4\cos\alpha)<0$; при $x<4$, $y>4$ меньше 0, при $x<4$, $y<4$ больше 0.

4. Заметим, что при вертикальной прямой $x=0$ $y=-4$ либо $y=4$, тогда S_1+S_3 будут иметь ~~один~~ одно и то же значение; при этом при смещении вертикальной прямой влево или вправо горизонтальная будет стремиться к оси OX, при всех $x\in[-4;4]$ — x значение $y=4\cos\alpha$ симметрично относительно OX, при $x=-4$, $x=4$ $y=0$

5. Понятно, что при $S_{общ.}=const$ наибольшее S_4+S_2 будет достигнуто при ~~наименьшем~~ наибольшем S_1+S_3, а именно при $|x|=|y|$.

6. B_0-центр A_zA_z'; B_i-центр A_pA_p'.

7. O_2-центр высоты B_0B_i, тогда $B_0O_2=B_iO_2=B_qO_2=B_q'O_2$, при этом B_q-центр A_pA_z, B_q'-центр $A_p'A_z'$; O_2-центр высоты равнобедренной трапеции, т.е. B_qB_q' и O_2-лежат на одной прямой, B_qB_q'-средняя линия трапеции $A_pA_zA_z'A_p'$.

8. B_qB_q'-средняя линия B_0B_i-высота, т.е. $B_0B_i \perp B_qB_q'$, тогда $\triangle B_qO_2B_0=\triangle B_0B_q'O_2=\triangle B_iO_2B_q'=\triangle B_qO_2B_i$, $B_qB_0=B_0B_q'=B_iB_q'=B_iB_q$,

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно.**

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☒

СТРАНИЦА 1 ИЗ __

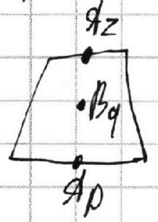
Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. **Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно.** Порча QR-кода недопустима!

1. Обозначим точки касания шара Ω как $A_1, A_2, \ldots, A_m$; а точки касания шара ω как $B_1, B_2, \ldots, B_n$.

2. Т.к. $A_1, A_2, \ldots A_n$ — точки касания, то они равноудалены от центра шара Ω на r, аналогично $B_1, B_2, \ldots, B_n$ равноудалены на R от центра шара ω.

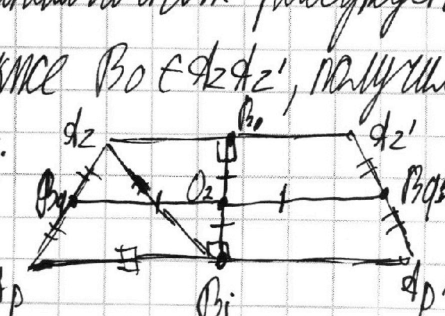
3. Т.к. усечённая пирамида — правильная, то центры ~~обоих ох~~ обоих шаров лежат на центральной оси правильной усечённой пирамиды.

4. Из пункта 3 следует, что точки на 1 грани и на противоположной грани, ~~в вертикальной~~ такие что



A_z, B_q, A_p и A_z', B_q', A_p' — лежат в 1 плоскости, при этом A_z — центр ребра, A_p центр ребра, боковая грань правильной усечённой пирамиды — ~~правильная~~ равнобедренная трапеция, т.е. A_zA_p — высота, $B_q \in A_zA_p$; также т.к. в основании правильный многоугольник, то A_pA_p' — высота к обоим рёбрам, содержащим эту точку, т.е. $\angle A_zA_pA_p'$ — искомый.

5. Из аналогичных рассуждений есть точка $B_i \in A_pA_p'$; ~~получим~~ а также $B_0 \in A_zA_z'$, получим задачу с равнобедренной трапецией:



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. **Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно.** Порча QR-кода недопустима!

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

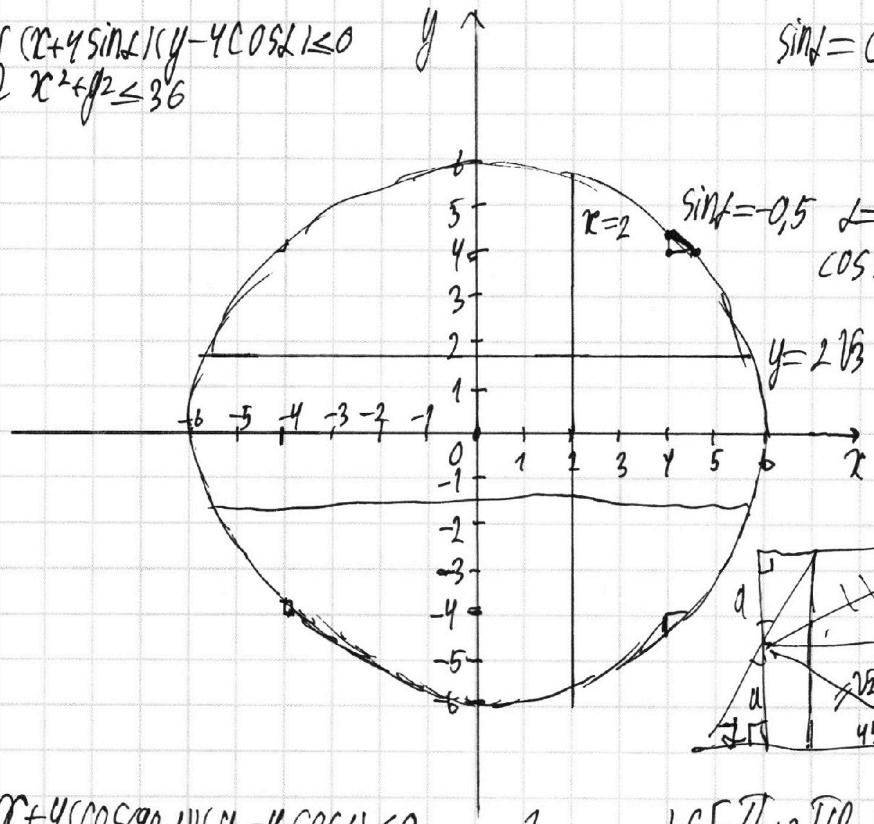
1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА __ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. **Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно.** Порча QR-кода недопустима!

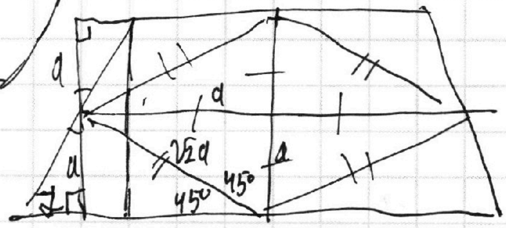
$\begin{cases}(x+4\sin\alpha)(y-4\cos\alpha)\le 0\\ x^2+y^2\le 36\end{cases}$

$\sin\alpha=\cos(90-\alpha)$



$\sin\alpha=-0{,}5$ $\alpha=-30°$

$\cos 30°=\frac{\sqrt3}{2}$ $y-4\cdot\frac{\sqrt3}{2}=$
$=y-2\sqrt3$



$(x+4(\cos(90-\alpha))(y-4\cos\alpha)\le 0$

1. $\alpha\in[-\frac{\pi}{2}+2\pi k;\ \frac{\pi}{2}+2\pi k]$

$\cos(90-\alpha)=-\cos(90+\alpha)$

$(x-4\cos(90+\alpha))(y-4\cos\alpha)\le 0$

$\left[\begin{array}{l}\begin{cases}y-4\cos\alpha>0\\ x-4\cos(90+\alpha)<0\end{cases}\\ \begin{cases}y-4\cos\alpha<0\\ x-4\cos(90+\alpha)>0\end{cases}\end{array}\right.$

$12+\sqrt{20}\cdot 2\ \vee\ 4\cdot\sqrt{28}$

$6+\sqrt{20}\ \vee\ 2\cdot\sqrt{28}$

$6+2\sqrt5\ \vee\ 4\sqrt7$

$3+\sqrt5\ \vee\ 2\sqrt7$

~~5,5 V~~

$3+2{,}3\ \vee$

$22\times 22 = 484$

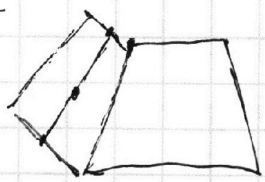
$28\times 28 = 784$

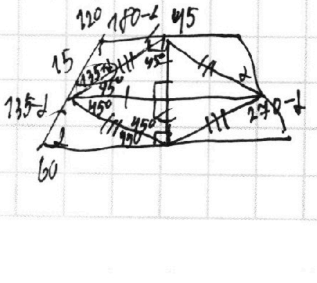
$2{,}4$ $2{,}6$

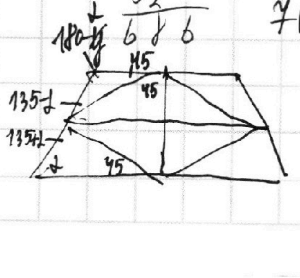
$26\times 26 = 676$

23

$265\times 265 = 70225$







На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА __ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. **Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно.** Порча QR-кода недопустима!

$(\sin \pi y - \sin \pi x)\cdot \sin \pi y = (\cos \pi y + \cos \pi x)\cdot \cos \pi y.$

$\pi y = \alpha,\ \pi x = \beta$

$\cos(\alpha-\beta) = \cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta$

$(\sin\alpha - \sin\beta)\cdot\sin\alpha = (\cos\alpha + \cos\beta)\cdot\cos\alpha$

$x = 3y-1-2k,\quad x = 1+2k-y$

$x = 11-2k,\quad x = -3+2k$

y: 4, 3, 2, 1, 0, −1, −2, −3, −4

$\sin^2\alpha - \sin\alpha\sin\beta = \cos^2\alpha + \cos\alpha\cos\beta$

$\sin^2\alpha - \cos^2\alpha = \sin\alpha\sin\beta + \cos\alpha\cdot\cos\beta$

$-\cos 2\alpha = \cos(\alpha-\beta)$

5|9 − 7

4|9 − нет.

$\cos\alpha = \cos(-\alpha)$

$\cos\alpha = -\cos(180-\alpha)$

x: −7, −6, −5, −4, −3, −2, −1, 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7

$\cos(60-30) = \cos 30 = \frac{\sqrt3}{2}$

Y: 7|15

Нет: 8|15

$\sin 60\cdot\sin 30 + \cos 60\cdot\cos 30 = \frac12\cdot\frac{\sqrt3}{2} + \frac12\cdot\frac{\sqrt3}{2} = \frac{\sqrt3}{2}$

$\cos(-30) = \cos 30$

$\cos 30 = -\cos 150$

$\cos 210 = -\cos 30$

$\cos 210 = \cos 150$

$(\sin\pi y - \sin\pi x)\sin\pi y = (\cos\pi y + \cos\pi x)\cos\pi y$

$(\underset{0}{\sin 0} - \sin 180)\cdot\sin 0 = (\underset{1}{\cos 0} + \underset{-1}{\cos 180})\cdot\underset{1}{\cos 0}$

$k=0,\ y=0,\ x=1$

$y=1,\ k=1,\ x=2$

$180-\beta+\alpha+2\pi k = 2\beta$

$3\beta = \pi+\alpha+2\pi k$

$3y = 1+x+2k$

$x = 3y-1-2k$

$3y-1-2k = 1+2k-y$

$4y = 2+4k$

$y = 0{,}5+k,\ k\in Z$

$x = y = 0{,}5+k$

$k=0,\ y=0{,}5,\ x=$

$(\sin\pi - \sin 2\pi)\sin\pi = (\cos\pi + \cos 2\pi)\cdot\cos\pi$

$(0-0)\cdot 0 = (-1+1)\cdot\cos$

$x = 3y-1-2k \quad x = 3y-3$

$x = 1+2k-y \quad x = 3-y$

$k=1$

$(\sin x - \sin x)\cdot\sin x = (\cos x + \cos x)\cdot\cos x$

$2\cos^2 x = 0\vee$

$y=0 \quad x=-3,\ x=-3$

$(\sin 0 - \sin 3\pi)\cdot\sin 0 = (\cos 0 + \cos -3\pi)\cdot\cos 0$

0 0 1 1

$y=1,\ k=1 \quad x=0,\ x=2$

$y=\frac16 \quad (\sin 30 - \sin x)\cdot\sin 30 = (\cos 30 + \cos x)\cdot\cos 30$

$x = -0{,}5-2k$

$x = \frac56+2k$

$\left(\frac12+1\right)\cdot\frac12 = \left(\frac{\sqrt3}{2}+0\right)\cdot\frac{\sqrt3}{2} \quad \frac34 = \frac34 \quad \left(\frac12-\frac12\right)\cdot\frac12 = \left(\frac{\sqrt3}{2}-\frac{\sqrt3}{2}\right)$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА __ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. **Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно.** Порча QR-кода недопустима!

всего: $\frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{4\cdot3\cdot2}$

было для 2: $\frac{(n-2)(n-3)}{2}$

$\frac{4\cdot3}{n(n-1)}$

$\frac{7}{n(n-1)}=\frac{1}{11}$ $\frac{77}{n(n-1)}=1, n\in N$

$n(n-1)=77=7\cdot11$

стало всего: $\frac{\cancel{n}\, n(n-1)\cdot\ldots\cdot(n-m+1)}{4\cdot3\cdot2\; m\cdot(m-1)\cdot\ldots\cdot2}$

~~n~~ стало для 2: $\frac{(n-2)(n-3)\cdot\ldots\cdot(n-m+1)}{(m-2)\cdot(m-3)\cdot\ldots\cdot2}$

$\cancel{(m-2)}\ \frac{m(m-1)}{n(n-1)}=\frac{11\cdot12}{n(n-1)}$

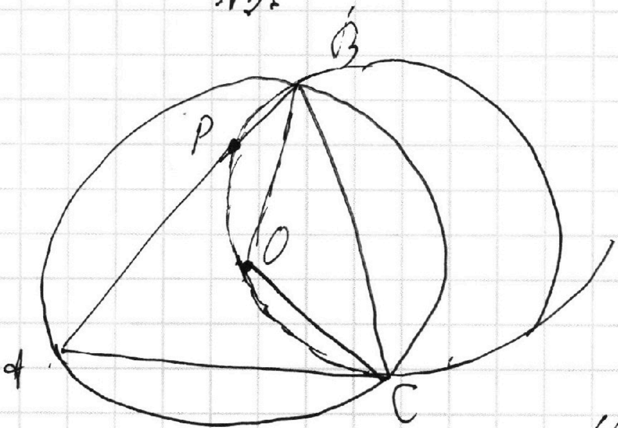
$m^2-m-132=0$

$D=1+528=529$

$m=\frac{1+23}{2}=12$

$\times\,23 \cdot 23$: 69, 46, 529

№5.



$S_{ABC}-?$

$AP=16, BP=8, AC=22.$

$16\cdot24=22^2-?$

$2^4\cdot2^3\cdot3=11^2\cdot2^2$ - неверно

$8\cdot24=192$

$17\cdot11=170+17=187$

$\angle BOC=2\angle A$

$AQ\cdot AC=AP\cdot AB$

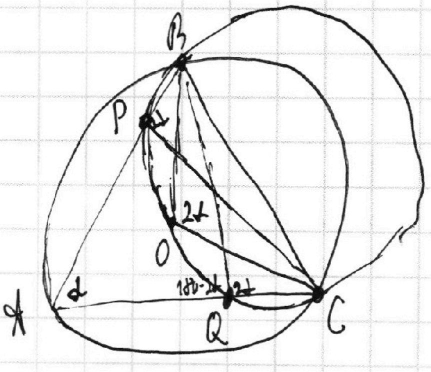
$22\cdot AQ=24\cdot16$

$AQ=\frac{8\cdot24}{11}=\frac{192}{11}=17\frac{5}{11}$

$AQ=QB=17\frac{5}{11}$

$135 : 5 = 27$; -10, 35, -35, 0 $\quad 5\cdot3^3$

$256-121=135$



24

16×16: 96, 16, 256

$AP=PC=16$

$16^2+22^2-2\cos\alpha\cdot16\cdot22=16^2$

$22=\cos\alpha\cdot32$ $\quad \cos\alpha=\frac{22}{32}=\frac{11}{16}$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА __ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. **Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно.** Порча QR-кода недопустима!

$A, B, C \in N$

$A = \overline{a_1 a_1 a_1 a_1}$

B = трёхзначное, одна из цифр точно 7.

C — двузначное, одна из цифр 1

$A \cdot B \cdot C = R^2,\ R \in N$

$A = 1111, 2222, 3333, 4444, 5555, 6666, 7777, 8888, 9999$

$:11$

101 202 303 404 505 606 707 808 909

$101 \quad 101\cdot2 \quad 101\cdot3 \quad 101\cdot4 \quad 101\cdot5 \quad 101\cdot6 \quad 101\cdot7 \quad 101\cdot8 \quad 101\cdot9$ 101 — простое

$B = 101\cdot m,\ m \in N, 1 \leq m \leq 9$

$B = 707$ ✓

$C = 11.$

n — одиннадцатиклассников, 4 билета.

Всего вариантов: $\frac{n\cdot(n-1)\cdot(n-2)\cdot(n-3)}{4\cdot3\cdot2}$

$\frac{n\cdot(n-1)}{2} \quad \frac{4\cdot3}{(n-2)(n-3)}$

$K = \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{3}{xy},\ x>0,\ y>0$

$x \neq 4$

$\cancel{\frac{1}{x+}} \quad \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{3}{xy} = \frac{1}{x-4} + \frac{1}{y+4} + \frac{3}{(x-4)(y+4)}$

$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{3}{xy} = \frac{1}{x-4} + \frac{1}{y+4} + \frac{3}{xy-4y+4x-16}$

$\frac{y+x+3}{xy} = \frac{y+4+x-4+3}{(x-4)(y+4)} = \frac{y+x+3}{(x-4)(y+4)}$

$(y+x+3)\cdot(x-4)(y+4) = (y+x+3)(xy)$

$\frac{1}{y+4} + \frac{1}{y} + \frac{3}{xy} = \frac{1}{y} + \frac{1}{y+4} + \frac{3}{xy}$

$x = y+4$

$x^3 - y^3 - 12xy$

$(y^2+8y+16)(y+4) =$

$= y^3 + 4y^2 + 8y^2 + 32y + 16y + 64 =$

$= y^3 + 12y^2 + 48y + 64$

$x^3 - y^3 - 12xy =$

$= 12y^2 + 48y + 64 - 12\cdot y\cdot(y+4) =$

$= 12y^2 + 48y + 64 - 12y^2 - 48y = 64$

4 + m билета:

$\frac{n\cdot(n-1)\cdot(n-2)\cdot\ldots\cdot(n-m+1)}{m\cdot(m-1)\cdot\ldots\cdot2}$

$\frac{n(n-1)\cdot(n-2)\cdot\ldots\cdot(n-m+3)}{(m-2)\cdot(m-3)\cdot\ldots\cdot2}$

$\frac{m\cdot(m-1)}{(n-m+1)(n-m+2)} = \frac{11\cdot4\cdot3}{(n-2)(n-3)}$

$(m^2-m)(n^2-6n\cdot5n+6) = 132\cdot(n^2 - nm + 2n - nm + m^2 - 2m + n - m + 2) = 132\cdot(n^2 + m^2 - 2nm + 3n - 3m + 2)$

$m^2n^2 - mn^2 - 5m^2n - 5mn + 6m^2 - 6m = 132n^2 + 132m^2 - 264nm + 396n - 396m + 264$