



МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

11 КЛАСС. Вариант 1



1. [3 балла] Найдите все тройки натуральных чисел $(A; B; C)$ такие, что:
- A — четырёхзначное число, составленное из одинаковых цифр,
 - B — трёхзначное число, хотя бы одна из цифр которого равна 2,
 - C — двузначное число, хотя бы одна из цифр которого равна 3,
 - произведение $A \cdot B \cdot C$ является квадратом некоторого натурального числа.
2. [3 балла] Положительные числа x и y таковы, что значение выражения $K = \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{2}{xy}$ не изменяется, если x уменьшить на 1, а y — увеличить на 1. Найдите все возможные значения выражения $M = x^3 - y^3 - 3xy$.
3. [5 баллов] а) Найдите все пары действительных чисел $(x; y)$ такие, что $(\sin \pi x + \sin \pi y) \sin \pi x = (\cos \pi x + \cos \pi y) \cos \pi x$.
- б) Сколько пар целых чисел (x, y) удовлетворяют одновременно этому уравнению и неравенству

$$\arcsin \frac{x}{5} + \arccos \frac{y}{4} < \frac{3\pi}{2}?$$

4. [4 балла] В начале месяца было выделено 4 билета на праздничный концерт, которые планировалось случайным образом распределить между одиннадцатиклассниками. В конце месяца выяснилось, что будет выделено больше 4 билетов. Одиннадцатиклассники Петя и Вася выяснили, что вероятность им обоим вместе попасть на концерт в начале месяца была в 2,5 раза меньше, чем оказалась в конце месяца. Сколько всего было выделено билетов на концерт в конце месяца, если количество одиннадцатиклассников не изменилось?
5. [5 баллов] Точка O — центр окружности ω_1 , описанной около остроугольного треугольника ABC . Окружность ω_2 , описанная около треугольника BOC , пересекает отрезок AB в точке P . Найдите площадь треугольника ABC , если $AP = \frac{15}{2}$, $BP = 5$, $AC = 9$.
6. [6 баллов] На координатной плоскости изображена фигура $\Phi(\alpha)$, состоящая из всех точек, координаты $(x; y)$ которых удовлетворяют системе неравенств

$$\begin{cases} (x - 3\sqrt{2} \sin \alpha)(y - 3\sqrt{2} \cos \alpha) \leq 0, \\ x^2 + y^2 \leq 25. \end{cases}$$

Найдите максимальное значение M периметра (длины границы) фигуры $\Phi(\alpha)$ и укажите все значения α , при которых оно достигается.

7. [6 баллов] Шар Ω касается всех рёбер правильной усечённой пирамиды, а шар ω касается всех её граней. Пусть сторона верхнего основания меньше, чем сторона нижнего. Найдите отношение площади боковой поверхности пирамиды к площади её нижнего основания.



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1



2



3



4



5



6



7



СТРАНИЦА

1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Из условия следует, что $A = 1111 \cdot k$, где $k \in \mathbb{N}$, $k \leq 9$,
 $1111 = 11 \cdot 101$, и 11, и 101 являются простыми числами,
а значит $A \cdot B \cdot C$ - квадрат натурального числа,
 $A : 1111$ и при этом не может $A : 11^2$, $A : 101^2$, тогда
 $B \cdot C : 1111$. Так как 101 простое число, а C - двухзнач-
ное, то $B : 101$ и представимо в виде $101 \cdot n$, $n \in \mathbb{N}$, $n \leq 9$,
 n не более 9, так как B трехзначное, значит $B : 11$, из
чего следует, что $C : 11$ и представимо в виде $11 \cdot m$,
 $m \in \mathbb{N}$, $m \leq 9$, m не более 9, так как C - двухзначное.

Так как $B = 101 \cdot n$, а так же B содержит цифру 2, то
 $B = 202$, аналогично C содержит цифру 3, $C = 11 \cdot m \Rightarrow C = 33$

$A \cdot B \cdot C$ - квадрат натурального числа, пусть это $l \in \mathbb{N}$

$$1111 \cdot k \cdot 101 \cdot 2 \cdot 11 \cdot 3 = l^2$$

$1111^2 \cdot 6 \cdot k = l^2$, из этого следует, что $k = 6$, $A = 6666$

Ответ: (6666; 202; 33)



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

1	2	3	4	5	6	7
☐	☒	☐	☐	☐	☐	☐

СТРАНИЦА

1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{2}{xy} = \frac{1}{x-1} + \frac{1}{y+1} + \frac{2}{xy-y+x-1} = K$$

$$\frac{x+y+2}{xy} = \frac{x+y+2}{(x-1)(y+1)}$$

Поскольку числители ^{уравнения дробей} равны, то равны и знаменатели

$$xy = (x-1)(y+1), \quad x \neq 0, y \neq 0, x-1 \neq 0, y+1 \neq 0$$

$$x - y - 1 = 0$$

$x = y + 1$ - подставим в выражение $M = x^3 - y^3 - 3xy$

$$\begin{aligned} M &= (y+1)^3 - y^3 - 3(y+1)y = y^3 + 3y^2 + 3y + 1 - y^3 - 3y^2 - 3y = \\ &= \cancel{-6y^2} + \cancel{6y} + 1 \end{aligned}$$

Получается, что есть ~~все~~ M всегда равно 1

$$\text{Ответ: } \{1\}$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7
☐ ☐ ☒ ☐ ☐ ☐ ☐

СТРАНИЦА
 1 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$a) (\sin(\pi x) + \sin(\pi y)) \sin(\pi x) = (\cos(\pi x) + \cos(\pi y)) \cos(\pi x)$$

$$2 \sin\left(\frac{\pi}{2}(x+y)\right) \cos\left(\frac{\pi}{2}(x-y)\right) \sin(\pi x) = 2 \cos\left(\frac{\pi}{2}(x+y)\right) \cos\left(\frac{\pi}{2}(x-y)\right) \cos(\pi x)$$

$$\left[\cos\left(\frac{\pi}{2}(x-y)\right) = 0; \right.$$

$$\left[\sin\left(\frac{\pi}{2}(x+y)\right) \sin(\pi x) = \cos\left(\frac{\pi}{2}(x+y)\right) \cos(\pi x); \right.$$

$$\cos\left(\frac{\pi}{2}(x+y)\right) \cos(\pi x) - \sin\left(\frac{\pi}{2}(x+y)\right) \sin(\pi x) = 0$$

$$\cos\left(\frac{3\pi}{2}x + \frac{\pi}{2}y\right) = 0$$

$$\left[\cos\left(\frac{\pi}{2}x - \frac{\pi}{2}y\right) = 0; \right.$$

$$\left[\cos\left(\frac{3\pi}{2}x + \frac{\pi}{2}y\right) = 0; \right.$$

$$\frac{\pi}{2}x - \frac{\pi}{2}y = \frac{\pi}{2} + \pi k, k \in \mathbb{Z}$$

$$\frac{3\pi}{2}x + \frac{\pi}{2}y = \frac{\pi}{2} + \pi n, n \in \mathbb{Z}$$

$$x - y = 1 + 2k, k \in \mathbb{Z}$$

$$3x + y = 1 + 2n, n \in \mathbb{Z}$$

$$y = x - 2k - 1, k \in \mathbb{Z}$$

$$y = -3x + 2n + 1, n \in \mathbb{Z}$$

$$\left[y = x - 2k - 1, k \in \mathbb{Z}; \right.$$

$$\left[y = -3x + 2n + 1, n \in \mathbb{Z}; \right.$$

$$\delta) \arcsin \frac{x}{5} \text{ принимает значения на промежутке } \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$$

$$\arccos \frac{y}{4} \text{ принимает значения на промежутке } [0; \pi]$$

$$\text{тогда } -\frac{\pi}{2} \leq \arcsin \frac{x}{5} + \arccos \frac{y}{4} \leq \frac{3\pi}{2}, \text{ при этом значение}$$

$$\frac{3\pi}{2} \text{ сумма принимает при } x = 5, y = -4, \text{ на координатной}$$

$$\text{график } x \text{ и отметим } y \text{ соответствующие точки, кресте } (5; -4), \text{ при}$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

1
☐

2
☐

3
☒

4
☐

5
☐

6
☐

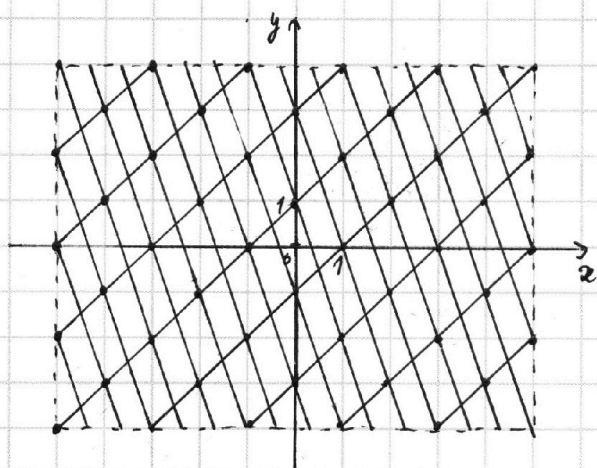
7
☐

СТРАНИЦА
2 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

этом учитывал, что $|\frac{x}{5}| \leq 1 \Rightarrow -5 \leq x \leq 5$

$$|\frac{y}{4}| \leq 1 \Rightarrow -4 \leq y \leq 4$$



Было отмечено 49 точек

Ответ: 49



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1
☐

2
☐

3
☐

4
☒

5
☐

6
☐

7
☐

СТРАНИЦА
1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Изначальная вероятность, пусть n - кол-во одинадизитных классиков:

$$P_1 = \frac{C_{n-2}^2}{C_n^4} = \frac{\frac{n!}{(n-2)! \cdot 2}}{\frac{n!}{(n-4)! \cdot 4!}} = \frac{(n-4)! \cdot 24}{(n-2)! \cdot 2} = \frac{12}{(n-2)(n-3)} = \frac{12}{n(n-1)}$$

Пусть k - кол-во билетов, которое было выдано в конце месяца, тогда вероятность в конце месяца

$$P_2 = \frac{C_{n-2}^{k-2}}{C_n^k} = \frac{\frac{(n-2)!}{(n-k)! \cdot (k-2)!}}{\frac{n!}{(n-k)! \cdot k!}} = \frac{(n-2)! \cdot k!}{n! \cdot (k-2)!} = \frac{k(k-1)}{n(n-1)}$$

По условию

$$2,5 P_1 = P_2$$

$$\frac{30}{n(n-1)} = \frac{k(k-1)}{n(n-1)}$$

Знаменатели равных дробей равны, значит числители тоже,

$$\begin{cases} k > 4; \\ k(k-1) = 30; \end{cases}$$

$$\begin{aligned} & k^2 - k - 30 = 0, \text{ по теореме Виета } k_1, k_2 = -30, k_1 + k_2 = 1 \Rightarrow \\ & \Rightarrow \begin{cases} k_1 = 6 \\ k_2 = -5 \end{cases} - \text{не удовлетворяет условию } k > 4 \\ & k = 6 \end{aligned}$$

Ответ: 6 билетов



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1
☐

2
☐

3
☐

4
☐

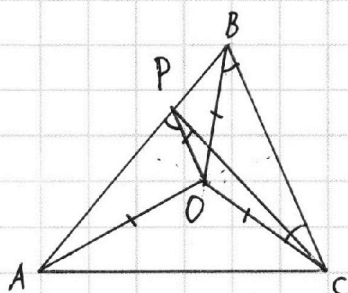
5
☒

6
☐

7
☐

СТРАНИЦА
1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



$\angle CBO = \angle BCO$, так как $OB = OC = R$

$\angle CPO = \angle CBO$, так как $PBCO$ - вписанный четырехугольник

$\angle OPA = \angle BCO$, так как это внешний

угол ~~четырёх~~ вписанного четырёхугольника $PBCO \Rightarrow$

$\Rightarrow PO$ биссектриса APC

Поскольку $AO = OC$, то $AP = PC$



1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☒ 7 ☐

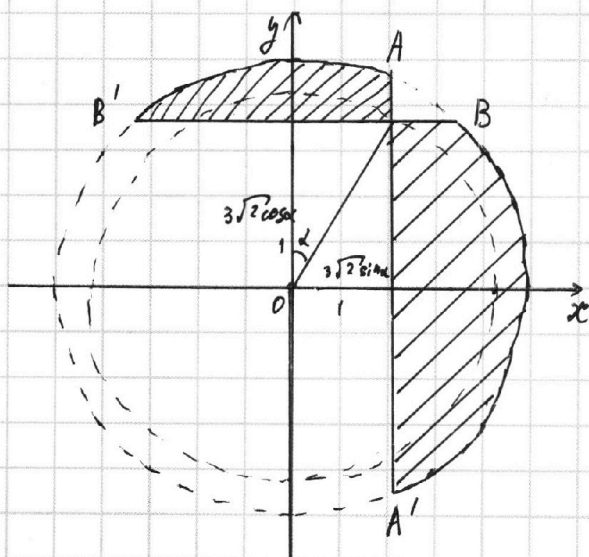
СТРАНИЦА
1 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\begin{cases} (x - 3\sqrt{2}\sin\alpha)(y - 3\sqrt{2}\cos\alpha) \leq 0; \\ x^2 + y^2 \leq 25; \end{cases}$$

$x^2 + y^2 = 25$ - формула окружности радиуса 5 с центром $(0; 0)$

$(3\sqrt{2}\sin\alpha; 3\sqrt{2}\cos\alpha)$ - точка на окружности радиуса $3\sqrt{2}$ с центром $(0; 0)$, но α отсчитывается от Oy по часовой



Штриховкой отмечена фигура $\Phi(\alpha)$

Две перпендикулярные хорды стягивают противоположные дуги, которые входят в периметр фигуры и суммарно всегда равны 180° , а значит в периметр они дадут 5π

Заметим, что $3\sqrt{2}\sin\alpha = 5\cos\angle AOx$, а $2 \cdot 5 \cdot |\sin\angle AOx| = AA'$
 $3\sqrt{2}\cos\alpha = 5\sin\angle BOx$, а $2 \cdot 5 \cdot |\cos\angle BOx| = BB'$

$$P = AA' + BB' + 5\pi$$

Максимум будет достигаться при максимуме $AA' + BB'$, так как 5π - константа

$$|\sin\angle AOx| = \sqrt{1 - \cos^2\angle AOx} = \sqrt{1 - \frac{18}{25}\sin^2\alpha}$$

$$|\cos\angle BOx| = \sqrt{1 - \sin^2\angle BOx} = \sqrt{1 - \frac{18}{25}\cos^2\alpha}$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☒	☐

СТРАНИЦА

1 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$AA' + BB' = \sqrt{100 - 72\sin^2\alpha} + \sqrt{100 - 72\cos^2\alpha}$$

Заметим, что так как $AA' \geq 0$ и $BB' \geq 0$, то максимум $AA' + BB'$ достигается, когда максимально значение $(AA' + BB')^2$

$$\begin{aligned}(AA' + BB')^2 &= (100 - 72\sin^2\alpha) + (100 - 72\cos^2\alpha) + 2\sqrt{(100 - 72\sin^2\alpha)(100 - 72\cos^2\alpha)} = \\ &= 128 + 2\sqrt{(100 - 72\sin^2\alpha)(28 + 72\sin^2\alpha)} = 128 + 2\sqrt{64^2 - (36 - 72\sin^2\alpha)^2}\end{aligned}$$

Максимум этого выражения достигается при $(36 - 72\sin^2\alpha)^2 = 0$,

$$\text{тогда } 36 = 72\sin^2\alpha \Rightarrow \sin^2\alpha = \frac{1}{2} \Rightarrow \begin{cases} \sin\alpha = \frac{\sqrt{2}}{2}; \\ \sin\alpha = -\frac{\sqrt{2}}{2}; \end{cases} \Rightarrow \alpha = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi k}{2},$$

$$k \in \mathbb{Z}, \text{ тогда } (AA' + BB')^2 = 128 + 128 = 256 = 16^2$$

$$AA' + BB' = 16$$

$$P = 16 + 5\pi$$

Ответ: максимальное значение периметра фигуры $M = 16 + 5\pi$, достигается при $\alpha = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi k}{2}, k \in \mathbb{Z}$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$(\sin(\pi x) + \sin(\pi y)) \sin \pi x = (\cos \pi x + \cos \pi y) \cos \pi x$$

$$\frac{(n-2)!}{(n-4)! \cdot 2} = \frac{12(n-2)!}{n!}$$

$$\frac{n!}{(n-4)! \cdot 24} = \frac{12}{(n-1)(n-3)}$$

$$\sqrt{2} \sin$$

$$2 \sin \frac{\pi}{2}(x+y) \cos \frac{\pi}{2}(x-y) \sin \pi x = 2 \cos \frac{\pi}{2}(x+y) \cos \frac{\pi}{2}(x-y) \cos \pi x$$

$$\cos \frac{\pi}{2}(x+y) = 0$$

$$\frac{30}{(n-2)(n-3)} = \frac{k(k-1)}{(n-k+2)(n-k+1)}$$

$$2 \sin \frac{\pi}{2}(x+y) \sin \frac{\pi}{2} \pi x = \cos \frac{\pi}{2}(x+y) \cos \frac{\pi}{2} \pi x$$

$$(n^2 - 5n + 6)(k^2 - k) = 30(n^2 - nk + n - nk + k^2 - k)$$

$$\tan \frac{\pi}{2}(x+y) = \cot \pi x$$

$$\cos \left(\frac{\pi x}{2} + \frac{\pi y}{2} + \pi x \right) = 0$$

$$\frac{\pi}{2} x + \frac{\pi}{2} y + \pi x = \frac{\pi}{2} + \pi k, k \in \mathbb{Z}$$

$$30(n^2 - nk + n - nk + k^2 - k) = 30(n^2 - 2nk + n + k^2 - k)$$

$$\frac{3}{2} x + \frac{1}{2} y = \frac{1}{2} + k, k \in \mathbb{Z}$$

$$D = 4k^2 - 12k + 9 - 4k^2$$

$$3x + y = 1 + 2k, k \in \mathbb{Z}$$

$$+ 12k - 8 = 1$$

$$y = -3x + 2k + 1, k \in \mathbb{Z}$$

$$n = \frac{2k-1}{2} = k-2$$

$$n = \frac{2k-2}{2} = k-1$$

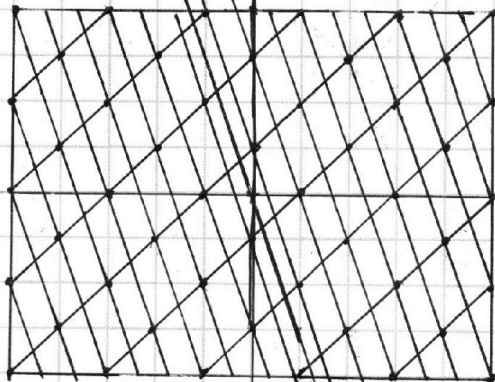
$$y = x + 2k - 1$$

$$\frac{C_n^2}{C_n^4} \cdot 2,5 = \frac{C_n^{k-2}}{C_n^k}$$

$$\frac{n!}{(n-2)! \cdot 2} = \frac{12(n-4)!}{(n-2)!}$$

$$\frac{n!}{(n-k+2)!(k-2)!} = \frac{n!}{(n-k)! k!}$$

$$\frac{(n-k)! k!}{(n-k+2)!(k-2)!} = \frac{k(k-1)}{(n-k+2)(n-k+1)}$$





На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

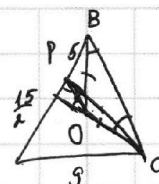
1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

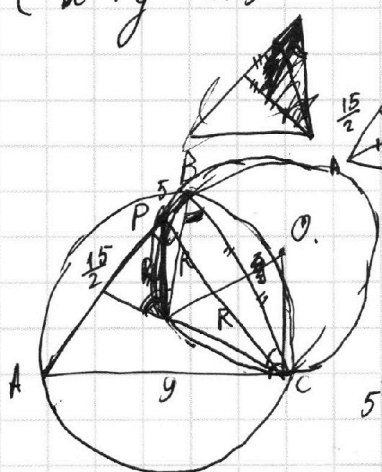
Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\begin{cases} (x - 3\sqrt{2}\sin\alpha)(y - 3\sqrt{2}\cos\alpha) \leq 0 \\ x^2 + y^2 \leq 25 \end{cases}$$

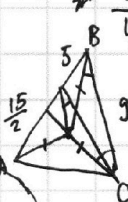
$$\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta} = \frac{c}{\sin\gamma}$$



$$\frac{1}{2}ab\sin\gamma = S$$



$$\frac{abc}{4R}$$



$$5^2 \cdot \frac{3}{2} = AC^2$$

$$AC = \frac{\sqrt{37}}{\sqrt{2}}5$$

$$gb = ra = 25 - 18 = 7$$

$$g + b + r + a = 81 = 2R^2 - 2R^2 \cos 2\alpha$$

$$2f + e = 81 = \frac{5^4}{4} + x^2 - 25x \cos \beta$$

$$\sin \gamma = \frac{\sqrt{64^2 - (36 + 72 \cos^2 \alpha)^2}}{\cos 90 - \alpha = \sin \gamma}$$

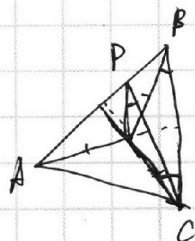
$$(e + f) = 2R^2 - 2R^2 (\cos^2 \alpha - 1) = \frac{625}{4} + x^2 - 25x \cos \beta$$

$$3\sqrt{2}\sin\alpha = 5\sin\gamma$$

$$\cos\gamma = \sqrt{1 - \sin^2\gamma}$$

$$3\sqrt{2}\cos\alpha = 5\cos\beta$$

$$\cos\gamma = 1$$



$$\frac{2\pi r}{4} + 10(8\pi\beta + \cos\gamma) = P$$

$$\cos \angle A O x = \frac{3\sqrt{2}}{5} \sin \alpha$$

$$\frac{\pi r}{2} + 6$$

$$|\sin \angle A O x| = \sqrt{1 - \frac{18}{25} \sin^2 \alpha}$$

$$P = \sqrt{100 - 72 \sin^2 \alpha} + \sqrt{100 - 72 \cos^2 \alpha} + 5\pi$$

$$|\cos \angle B O x| = \sqrt{1 - \frac{18}{25} \cos^2 \alpha}$$

$$P^2 - 10\pi + 25\pi^2 = 128 +$$