

МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

11 КЛАСС. Вариант 3



- 1. [3 балла] Найдите все тройки натуральных чисел $(A; B; C)$ такие, что:
 - A — четырёхзначное число, составленное из одинаковых цифр,
 - B — трёхзначное число, хотя бы одна из цифр которого равна 6,
 - C — двузначное число, хотя бы одна из цифр которого равна 3,
 - произведение $A \cdot B \cdot C$ является квадратом некоторого натурального числа.
- 2. [3 балла] Положительные числа x и y таковы, что значение выражения $K = \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{5}{xy}$ не изменяется, если x уменьшить на 2, а y — увеличить на 2. Найдите все возможные значения выражения $M = x^3 - y^3 - 6xy$.
- 3. [5 баллов] а) Найдите все пары действительных чисел $(x; y)$ такие, что $(\sin \pi x + \sin \pi y) \sin \pi x = (\cos \pi x - \cos \pi y) \cos \pi x$.
б) Сколько пар целых чисел (x, y) удовлетворяют одновременно этому уравнению и неравенству

$$\arcsin \frac{x}{6} + \arcsin \frac{y}{2} < \pi?$$

- 4. [4 балла] В начале месяца было выделено 4 билета на праздничный концерт, которые планировалось случайным образом распределить между одиннадцатиклассниками. В конце месяца выяснилось, что будет выделено больше 4 билетов. Одиннадцатиклассники Петя и Вася вычислили, что вероятность им обоим вместе попасть на концерт в начале месяца была в 6 раз меньше, чем оказалась в конце месяца. Сколько всего было выделено билетов на концерт в конце месяца, если количество одиннадцатиклассников не изменилось?
- 5. [5 баллов] Точка O — центр окружности ω_1 , описанной около остроугольного треугольника ABC . Окружность ω_2 , описанная около треугольника BOC , пересекает отрезок AB в точке P . Найдите площадь треугольника ABC , если $AP = 25$, $BP = 5$, $AC = 35$.
- 6. [6 баллов] На координатной плоскости изображена фигура $\Phi(\alpha)$, состоящая из всех точек, координаты $(x; y)$ которых удовлетворяют системе неравенств

$$\begin{cases} (x + 5\sqrt{2} \cos \alpha)(y + 5\sqrt{2} \sin \alpha) \leq 0, \\ x^2 + y^2 \leq 169. \end{cases}$$

Найдите максимальное значение M периметра (длины границы) фигуры $\Phi(\alpha)$ и укажите все значения α , при которых оно достигается.

- 7. [6 баллов] Шар Ω касается всех рёбер правильной усечённой пирамиды, а шар ω касается всех её граней. Пусть сторона верхнего основания меньше, чем сторона нижнего. Найдите отношение площади верхнего основания пирамиды к площади её боковой поверхности.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.



1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

П.к. A - четырехзначное число, составленное из одинаковых цифр, то $A = 1111 \cdot a$, где $a = \overline{1,9}$

Значит, $A \cdot B \cdot C = x^2$, то $x^2 : 1111$, $x^2 : 11 \cdot 101 \Rightarrow x^2 : 11^2 \cdot 101^2$, т.к. 11 и 101 простые числа

Заметим, что A не может делиться на 11^2 и на 101^2 , т.к. иначе $A \geq 11 \cdot 1111 > 9999$ (максимального четырехзначного числа $(101 \cdot 1111)$)

Тогда либо B делится на 101, либо $C : 101$, но т.к. C - двузначное, то на 101 делится B . У B есть цифра 6, а единственное трехзначное число кратное 101 и имеющее цифру 6 - это 606. $\Rightarrow B = 606$

$B = 606$, значит $C : 11$, хотя бы 1 цифра C равна 3 $\Rightarrow C = 33$, т.к. это единственное двузначное число кратное 11 и имеющее цифру 3.

Получаем: $33 \cdot 606 \cdot a \cdot 1011 = x^2$, $3^2 \cdot 11^2 \cdot 101^2 \cdot 2 \cdot a = x^2$
Значит $2a$ это квадрат натур. числа, $a = \overline{1,9} \Rightarrow a = 2$, либо $a = 8$

Значит возможны следующие тройки: $(2222; 606; 33)$
 $(8888; 606; 33)$

Ответ: $(2222; 606; 33); (8888; 606; 33)$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА

1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{5}{xy} = \frac{1}{x-2} + \frac{1}{y+2} + \frac{5}{(x-2)(y+2)}$$

$$\frac{x+y+5}{xy} = \frac{y+2+x-2+5}{(x-2)(y+2)}$$

$$\frac{x+y+5}{xy} = \frac{x+y+5}{(x-2)(y+2)} \quad x, y > 0 \Rightarrow x+y+5 > 0$$

$$xy = (x-2)(y+2)$$

$$xy = xy - 2y + 2x - 4$$

$$0 = x - 2$$

$$M = x^3 - y^3 - 6xy = x^3 - (x-2)^3 - 6(x-2)x =$$
$$= x^3 - (x^3 - 6x^2 + 12x - 8) - 6x^2 + 12x = 6x^2 - 12x + 8 - 6x^2 + 12x =$$
$$= 8$$

Ответ: $M = 8$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
1 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\begin{aligned} \text{a) } \sin \pi x (\sin \pi x + \sin \pi y) &= (\cos \pi x - \cos \pi y) \cos \pi x \\ \sin^2 \pi x + \sin \pi x \sin \pi y &= \cos^2 \pi x - \cos \pi y \cos \pi x \\ (\sin \pi x \sin \pi y) + \cos \pi x \cos \pi y &= (\cos^2 \pi x - \sin^2 \pi x) = 0 \\ \cos(\pi x - \pi y) - \cos 2\pi x &= 0 \\ -2 \sin \frac{\pi x - \pi y + 2\pi x}{2} \sin \frac{\pi x - \pi y - 2\pi x}{2} &= 0 \\ \sin \frac{3\pi x - \pi y}{2} \sin \frac{\pi x + \pi y}{2} &= 0 \end{aligned}$$

$$\begin{cases} \sin \frac{3\pi x - \pi y}{2} = 0 \\ \sin \frac{3\pi x + \pi y}{2} = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 3\pi x - \pi y = 2\pi k \\ \pi x + \pi y = 2\pi n; \quad k, n \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

$$\begin{cases} 3x - y = 2k; \\ x + y = 2n; \quad k, n \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

$$\begin{cases} y = 3x - 2k \\ y = 2n - x \end{cases} \quad k, n \in \mathbb{Z}$$

Для любого $x \in \mathbb{R}$ и любых целых k и n .

~~8)~~

$$\text{8) } \arcsin \frac{x}{6} + \arcsin \frac{y}{2} < \pi$$

$$\left| \frac{x}{6} \right| \leq 1; \quad \left| \frac{y}{2} \right| \leq 1 \Rightarrow -6 \leq x \leq 6, \quad -2 \leq y \leq 2$$

$$\begin{aligned} \text{1) } & \begin{cases} 3x - y = 2k \\ y = -1 \\ 3x = 2k + 1 \\ x = \frac{2k + 1}{3} \in \mathbb{Z} \end{cases} \quad y \in \mathbb{Z}; \quad -1 \leq y \leq 1 \\ & \begin{cases} -6 \leq \frac{2k + 1}{3} \leq 6 \end{cases} \end{aligned}$$

$$\arcsin t \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$$

Значит, чтобы $\arcsin \frac{x}{6} + \arcsin \frac{y}{2} < \pi$, то хотя бы одно из слагаемых должно быть меньше $\frac{\pi}{2}$

$$\begin{cases} \arcsin \frac{x}{6} < \frac{\pi}{2} \\ \arcsin \frac{y}{2} < \frac{\pi}{2} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \left| \frac{x}{6} \right| < 1; \left| \frac{y}{2} \right| < 1 \\ \frac{x}{6} \neq 1 \\ \left| \frac{y}{2} \right| < 1; \left| \frac{x}{6} \right| < 1 \\ \frac{y}{2} \neq 1 \end{cases}$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
2 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

1) $x+y=2n$ сумма двух целых чисел четна.

Это значит, что x и y одной четности.

$$|\frac{x}{6}| \leq 1; |\frac{y}{6}| \leq 1 \quad -6 \leq x \leq 6; -2 \leq y \leq 2$$

$x \in [-6; 6]$, среди них в этом промежутке

7 четных и 6 нечетных

$y \in [-2; 2]$, в этом промежутке 3 четных и 2 нечетных

Значит всего пар, сумма которых четна!

$$7 \cdot 3 + 6 \cdot 2 = 12 + 21 = 33.$$

Но заметим, что среди них есть варианты которые не подходят. Это когда $\frac{x}{6} = 1$ и $\frac{y}{6} = 1 \Rightarrow x=6$ и $y=2$ - 1 вариант.

Значит всего подходящих: $33 - 1 = 32$

2). $3x-y=2k$ разность двух целых чисел четна

Значит: $3x \equiv y$; $3x \equiv x \Rightarrow x \equiv y$, а значит x и y одна четность, а это случай 1)

Ответ: ~~33~~. 32.



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

m - кол-во ординардуатиклассников.
 b - кол-во билетов в конце месяца.

Вероятность, что Васе и Пете достанется билет!
(в начале месяца)
 $\frac{4}{m} \cdot \frac{3}{m-1}$

Вероятность, что Васе и Пете достанется билет
в конце месяца:
 $\frac{b}{m} \cdot \frac{b-1}{m-1}$

Получаем: $b \cdot \frac{12}{m(m-1)} = \frac{b(b-1)}{m(m-1)}$

$$72 = b(b-1) \quad b^2 - b - 72 = 0 \quad (b-9)(b+8) = 0$$

$$b > 0 \Rightarrow b = 9$$

Ответ: 9 билетов

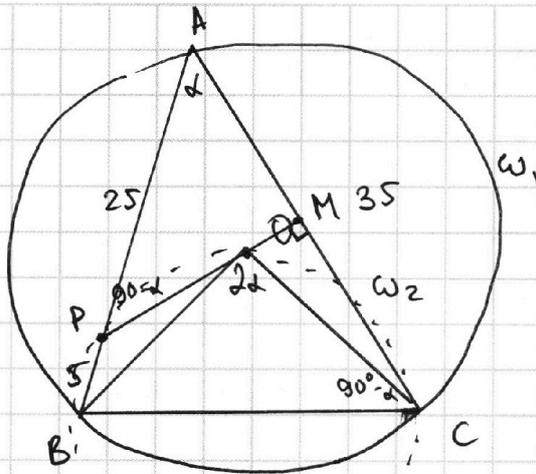


На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



$\angle BAC = \alpha \Rightarrow \angle BOC = 2\alpha$
т.к. это ^{вписанной} центральная, ^и опирающаяся на одну дугу.

$OC = OB$ (радиусы ω_1)
Значит $\angle OCB = \frac{180 - 2\alpha}{2} = 90^\circ - \alpha$

$\angle BOC$ - вписанной \Rightarrow
 $\angle BPO = 180^\circ - \angle BCO = 90^\circ + \alpha$
 $\angle OPA = 180^\circ - \angle BPO = 90^\circ - \alpha$

Продлим PO до пересечения с AC . $\angle ACM = M$

Заметим, что $\angle PMA = 180^\circ - \angle OPM - \angle OAM = 180^\circ - 90^\circ + \alpha - \alpha = 90^\circ$

III.к. $OM \perp AC \Rightarrow M$ - это середина AC , т.к. O - центр.

$\triangle ABC$. Значит $AM = \frac{1}{2} AC = \frac{35}{2}$

Значит $\cos \angle PAM = \frac{AP}{AM} = \frac{5}{\frac{35}{2}} = \frac{2 \cdot 5}{35} = \frac{2}{7}$

$\sin \angle PAM = \sqrt{1 - \cos^2 \angle PAM} = \sqrt{1 - \frac{4}{49}} = \frac{\sqrt{45}}{7} = \frac{3\sqrt{5}}{7}$

$$S_{ABC} = \frac{1}{2} AB \cdot AC \cdot \sin \angle BAC = \frac{1}{2} (AP + PB) \cdot AC \cdot \sin \angle PAM =$$

$$= \frac{1}{2} (25 + 5) \cdot 35 \cdot \frac{\sqrt{5}}{7} = \frac{30 \cdot 35 \sqrt{5}}{2 \cdot 7} = \frac{105\sqrt{5}}{2}$$

Ответ: $\frac{105\sqrt{5}}{2}$

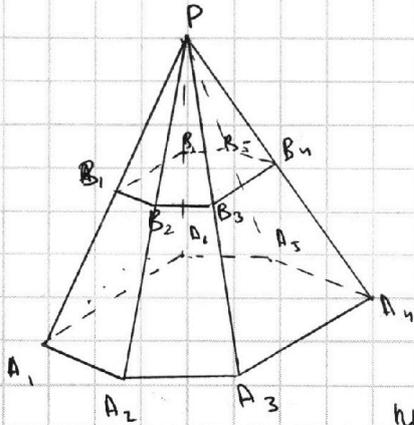


На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



A_i - вершина нижнего основания
 B_i - вершина верхнего основания.
 n - кол-во вершин многоугольника основания.

Продлим $A_1 B_1, A_2 B_2, \dots, A_n B_n$ до пересечения.

$\angle A_1 B_1 \cap A_2 B_2 \cap \dots \cap A_n B_n = P$

П.к. усеченная пирамида правильная, то $PB_1 = PB_2 = \dots = PB_n$
 $PA_1 = PA_2 = \dots = PA_n$

Рассмотрим сферу касящуюся всех ребер усеченной пирамиды. Заметим, что $A_1 A_2 B_1 B_2, A_2 A_3 B_2 B_3, \dots, A_{n-1} A_n B_{n-1} B_n, A_n A_1 B_n B_1$ - вписанные тропеции, тогда $B_1 B_2 + A_1 A_2 = A_1 B_1 + A_2 B_2; \dots, A_i B_i + A_{i+1} A_{i+1} = A_i A_{i+1} + B_i B_{i+1}$

$$A_1 B_1 = A_2 B_2 = \dots = A_n B_n \Rightarrow B_1 B_2 + A_2 A_1 = A_2 A_3 + B_2 B_3 = \dots = A_n A_1 + B_n B_1$$

$$\frac{PB_1}{PA_1} = \frac{B_1 B_2}{A_1 A_2} = \frac{PB_i}{PA_i} = \frac{B_i B_{i+1}}{A_i A_{i+1}}; \quad B_1 B_2 = \frac{PB_1}{PA_1} \cdot A_1 A_2$$

$$B_1 B_2 + A_1 A_2 = A_1 A_2 \left(1 + \frac{PB_1}{PA_1} \right)$$

$$\frac{B_i B_{i+1}}{A_i A_{i+1}} = \frac{PB_1}{PA_1} \quad B_i B_{i+1} = \frac{PB_1}{PA_1} \cdot A_i A_{i+1} \Rightarrow A_1 A_2 = A_2 A_3 = \dots = A_n A_1$$

$$B_i B_{i+1} \neq A_i A_{i+1} = A_i A_{i+1} \left(\frac{PB_1}{PA_1} + 1 \right) \Rightarrow$$

Значит $A_1 \dots A_n; B_1 \dots B_n$ - правильные многоугольники

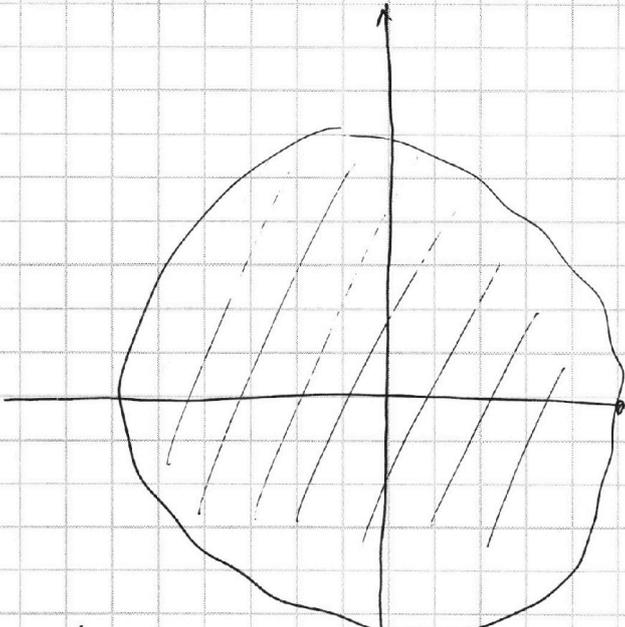
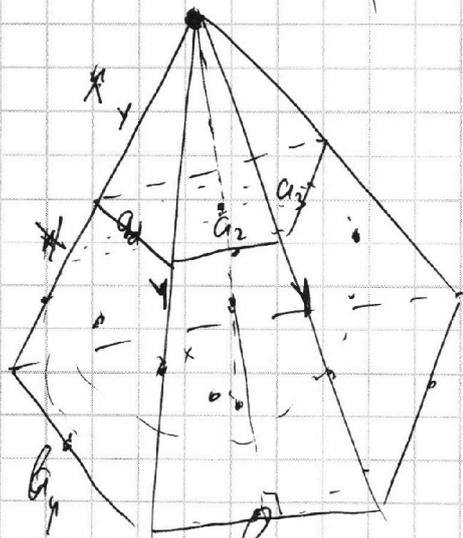


На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$x + \sqrt{2} \cos \alpha$
 $\varphi(\alpha)$

$\frac{H-h}{H} = \frac{h}{x+y}$
 $\frac{H}{x+y} = \frac{h}{H} = \frac{y}{x+y}$
 $h = \frac{y}{x+y} H$

$a_1 + b_1 = a_2 + b_2 = \dots = a_n + b_n$
 $h_2 = H \frac{x+y-y}{x+y} = H \frac{x}{x+y}$

Правильной $\frac{x}{x+y} H$
 многоугольник.

$\frac{a_1}{b_1} = \frac{y}{x+y}$
 $\frac{a_2}{b_2} =$
 $a_1 + b_1 =$
 $a_1 \left(\frac{x+2y}{x+y} \right)$

$\frac{a_i}{b_i} = \frac{y}{x+y}$
 $a_i = \frac{y}{x+y} b_i$
 $\left(1 + \frac{y}{x+y} \right) b_i =$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

1

2

3

4

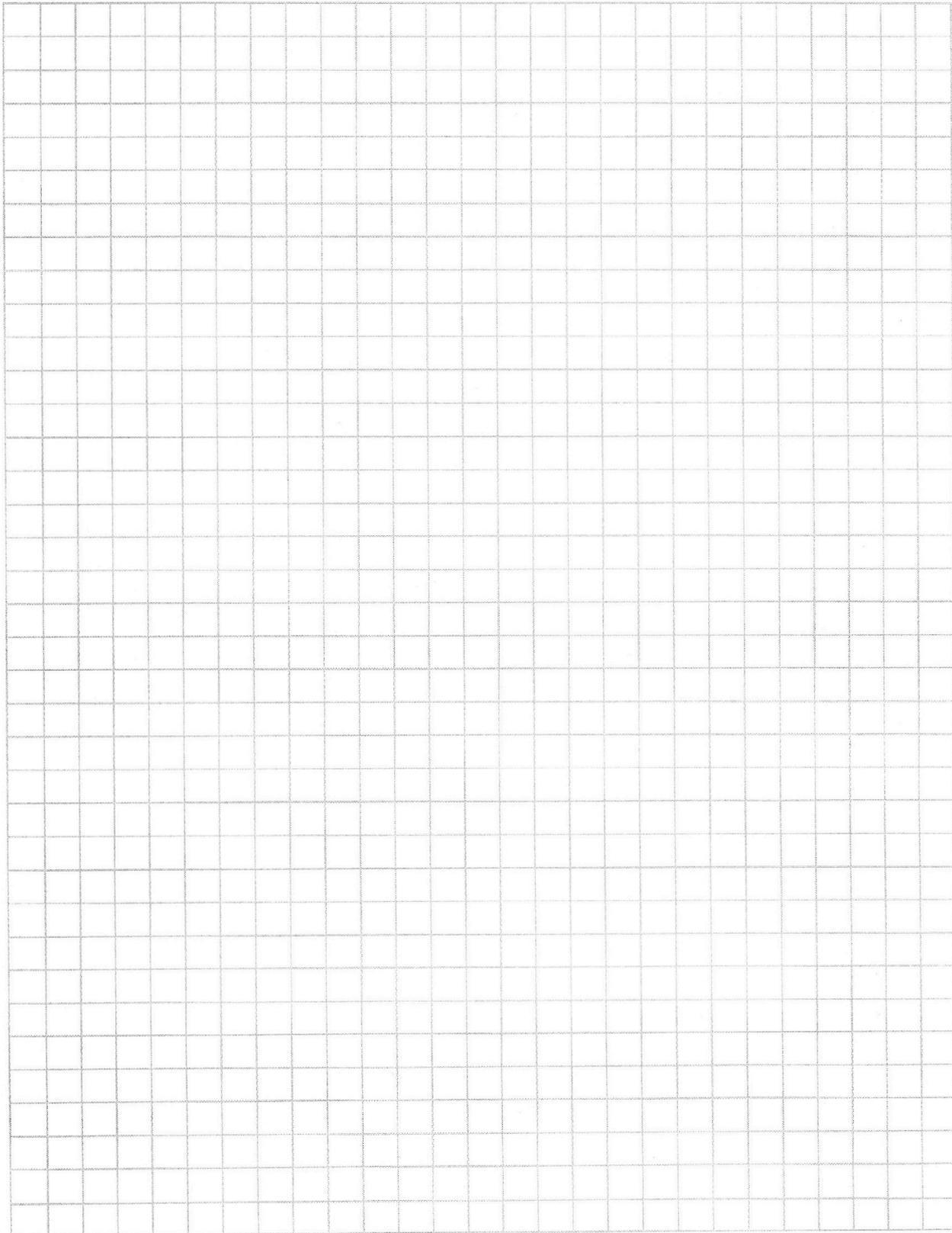
5

6

7

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. **Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно.** Порча QR-кода недопустима!



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.



1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
2 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

1) $x+y=2n$, сумма двух ~~четных~~^{целых} чисел четна.

Это значит, что x и y одной четности.

$$\left| \frac{x}{6} \right| \leq 1 \quad \left| \frac{y}{2} \right| \leq 1 \quad -6 \leq x \leq 6; -2 \leq y \leq 2$$

Четных x - 7 вариантов; нечетных - 6

Четных y - 3 варианта; нечетных - 2.

Значит всего: $7 \cdot 3 + 6 \cdot 2 = 12 + 21 = 33$

Но нам не подходят варианты когда ~~оба~~ и $x=6$, ~~и~~ $y=2$

Когда ~~$x=6$~~ нам не подходит 3 варианта

Когда ~~$y=2$~~ нам не подходит 7 вариантов

Когда $x=6, y=2$ - 1 вариант.

Всего подходящих: ~~$33 + 3 + 7 = 43$~~ $33 - 1 = 32$

2) $3x - y = 2k$; $\begin{cases} -6 \leq x \leq 6 \\ -2 \leq y \leq 2 \\ 3x - y = 2k \end{cases}$ $\begin{cases} -18 \leq 3x \leq 18 \\ -2 \leq -y \leq 2 \\ 3x - y = 2k \end{cases}$ $\begin{cases} -20 \leq 3x - y \leq 20 \\ -2 \leq -y \leq 2 \\ 3x - y = 2k \end{cases}$

$$\begin{cases} -10 \leq k \leq 10 \\ -2 \leq -y \leq 2 \\ 3x - y = 2k \end{cases}$$

Рассмотрим подходящие пары $(x; y)$

одной четности. (одинаковой или рассмотрим в 1) случае)

1. $k=10; 3x=20+y; -20+y=0; y=0; x=6$ $(y=-1 \rightarrow (-7; -1)$ - не подходит $x \leq 6$
2. $k=9; 3x=18+y; y=0; x=6$ $(-6; 2)$ - не подходит одной четности
3. $k=8; 3x=16+y; -16+y=0; y=0; x=5$
4. $k=7; 3x=14+y; -14+y=0; y=0; x=4$
5. $k=6; 3x=12+y; -12+y=0; y=0; x=4$
6. $k=5; 3x=10+y; -10+y=0; y=0; x=3$
7. $k=4; 3x=8+y; -8+y=0; y=0; x=2$
8. $k=3; 3x=6+y; -6+y=0; y=0; x=2$
9. $k=2; 3x=4+y; -4+y=0; y=0; x=1$
10. $k=1; 3x=2+y; -2+y=0; y=0; x=1$
11. $k=0; 3x=0+y; 0+y=0; y=0; x=0$
12. $k=1; 3x=2+y; 2+y=0; y=-2; x=0$
13. $k=2; 3x=4+y; 4+y=0; y=-4; x=0$
14. $k=3; 3x=6+y; 6+y=0; y=-6; x=0$
15. $k=4; 3x=8+y; 8+y=0; y=-8; x=0$
16. $k=5; 3x=10+y; 10+y=0; y=-10; x=0$
17. $k=6; 3x=12+y; 12+y=0; y=-12; x=0$

$3x - y$ равно четному числу; значит x и y одной четности, а это 1) случай.

Значит всего вариантов: 32

Ответ: 32

$$\frac{x}{6} = 1 +$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

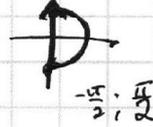
$$\begin{cases} x+y=2n \\ 3x-y=2k \end{cases}$$

$$\arcsin \frac{x}{6} + \arcsin \frac{y}{2} < \pi$$

$$\arcsin \frac{x}{6} + \arcsin \frac{2n-x}{2} < \pi$$

Если хотя бы 1 значение
меньше $\frac{\pi}{2}$

$$\arcsin \frac{x}{6} < \frac{\pi}{2}$$



$$\begin{aligned} \arcsin a &= \alpha \\ \sin \alpha &= a \end{aligned}$$

$$\left| \frac{x}{6} \right| \leq 1$$

$$\left| \frac{y}{2} \right| \leq 1$$

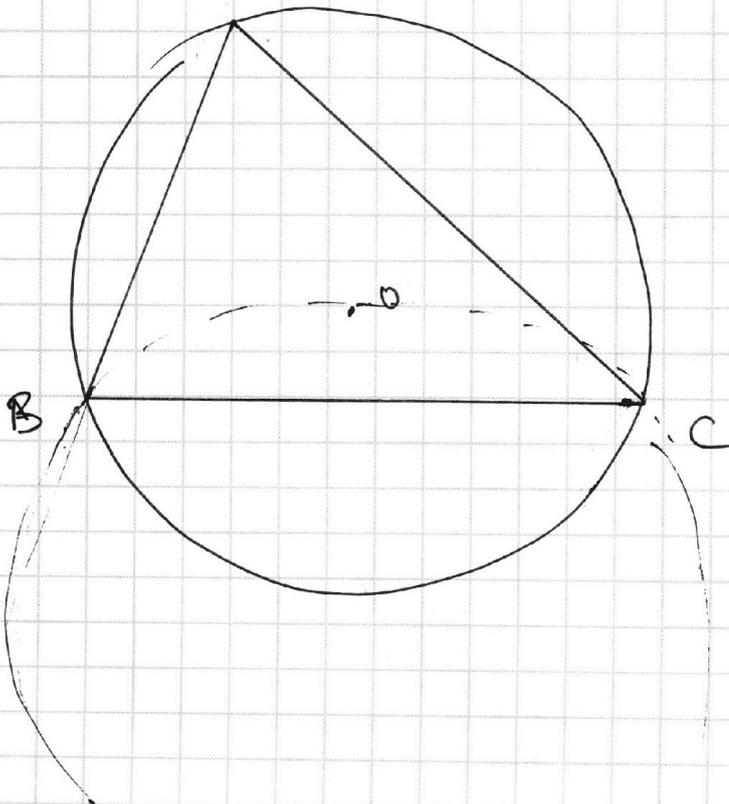
$$\frac{\pi}{2} < \alpha < \frac{\pi}{2}$$

[arcsin

$$\ast \leftarrow \frac{\pi}{2} \rightarrow \frac{\pi}{2}$$

$$\begin{aligned} -6 &\leq x \leq 6 \\ -2 &\leq y \leq 2 \\ &A \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x+y &= 2n \\ y &= \end{aligned}$$





На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

- 1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА ИЗ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются **отдельно**. Порча QR-кода недопустима!

$\cos \alpha = \frac{35/2}{25} = \frac{7}{10}$

$\frac{35}{50} = \frac{7}{10}$

$\sqrt{\frac{100-49}{10}} = \frac{\sqrt{51}}{10}$

~~1275~~

$\frac{625 \times 4}{4}$

$S_{ABC} = ?$

$$\begin{array}{r} 1250 \\ 2500 \\ \hline 1225 \\ \hline 1275 \end{array}$$

$r = 625$

$$\begin{array}{r} 1250 \\ 1225 \\ \hline 25 \\ 2 \end{array}$$

$\frac{625}{\sqrt{51}}$

$625 - \frac{51}{12}$

$\frac{35}{2}$

$\frac{35}{2}$

$\frac{175}{105}$

$$\begin{array}{r} 1275 \\ 1225 \\ \hline 50 \end{array}$$

$\frac{1275}{125} = \frac{25}{51}$

$50 \quad 35$

~~28~~ ~~28~~ ~~28~~

$\frac{576}{625} + \frac{49}{51} = \frac{625}{51}$

$28 \quad 625 - \frac{1225}{2}$

$$\frac{1250 - 1225}{2} = \frac{25}{2}$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

A - ~~четырех~~ ^{двух} ~~аааа~~

B - ~~трех~~ ^{хотим бы} ~~на~~ ^{одна цифра} ~~б~~.

C - ~~двух~~ ^{хотим бы} ~~на~~ ^{1 и 2 цифр} ~~3~~

A·B·C - ~~кварра~~

$$\begin{array}{r} 1111 \overline{) 11} \\ \underline{11} \\ 011 \end{array}$$

$$a \cdot 1111 = 101 \cdot 11 \cdot a$$

$$B \cdot C : 101 \cdot 11$$

$$B \overline{) 1111} \\ \underline{11} \\ 0111 \\ \underline{011} \\ 0011 \\ \underline{0011} \\ 0000$$

B - ~~трех~~ ^{двух} ~~на~~ ^{одна цифра} ~~б~~.

$$C \overline{) 101} \quad C : 11 \Rightarrow C = 3 \cdot 11$$

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{5}{xy}$$

$$B : 101 \Rightarrow$$

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{5}{xy} = \frac{1}{x+2} + \frac{1}{y+2} + \frac{5}{(x-2)(y+2)} \quad 606 = 6 \cdot 101$$

$$3 \cdot 11 \cdot 6 \cdot 101 \cdot 11 \cdot 101 \cdot a$$

$$\frac{x+y+5}{xy} = \frac{y+2+x-2+5}{(x-2)(y+2)}$$

$$3^2 \cdot 11^2 \cdot 101^2 \cdot 2a = x^2$$

$$M = x^3 - y^3 - 6xy - ?$$

$$\frac{x+y+5}{xy} = \frac{x+y+5}{(x-2)(y+2)}$$

$$\begin{cases} x+y+5 \neq 0 \\ xy = (x-2)(y+2) \end{cases}$$

$$\cancel{xy} = \cancel{xy} - 2y + 2x - 4$$

$$\cancel{x} = \cancel{2y} - 5$$

$$y = x - 2$$

$$y = -x - 5$$

$$x^3 - (x^3 - 6x^2 + 12x - 8) - 6(x-2)x$$

$$6x^2 - 12x + 8 - 6x^2 + 12x \quad (x-2)(x^2 + 2x + 4) - 6x(x-2)$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$(\sin \pi x + \sin \pi y) \sin \pi x = (\cos \pi x - \cos \pi y) \cos \pi x$$

$$2 \sin \frac{\pi(x+y)}{2} \sin \frac{\pi x - \pi y}{2} \sin \pi x$$

$$\sin^2 \pi x + \sin \pi y \sin \pi x = \cos^2 \pi x - \cos \pi y \cos \pi x$$

$$\cos(\pi(x-y)) = \cos^2 \pi x$$

$$\cos(\pi(x-y)) - \cos(2\pi x) = 0$$

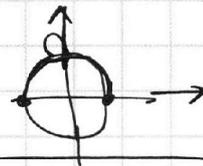
$$-2 \sin \frac{\pi x - \pi y + 2\pi x}{2} \sin \frac{\pi x - \pi y - 2\pi x}{2} = 0$$

$$\sin \frac{3\pi x - \pi y}{2} \sin \frac{\pi y + \pi x}{2} = 0$$

$$\frac{3\pi x - \pi y}{2} = \pi k$$

$$\frac{\pi y + \pi x}{2} = \pi k$$

$$3x - y = 2k$$



$$\arcsin \frac{x}{6} + \arcsin \frac{y}{2} < \pi$$

$$\arcsin \frac{x}{6} + \arcsin \frac{2\eta - x}{2} < \pi$$

$$\frac{1}{\sqrt{1 - \frac{x^2}{36}}} \cdot \frac{1}{6}$$

$$\sin^2 \pi x + \sin \pi y \cdot \sin \pi x = \cos^2 \pi x - \cos \pi y \cos \pi x$$

$$\cos(\pi x - \pi y) = \cos^2 \pi x - \sin^2 \pi x = \cos 2\pi x$$

$$\cos(\pi x - \pi y) - \cos 2\pi x = 0$$

$$-2 \sin \frac{\pi x - \pi y + 2\pi x}{2} \sin \frac{\pi x - \pi y - 2\pi x}{2} = 0$$

$$\sin \frac{3\pi x - \pi y}{2} \sin \frac{\pi x + \pi y}{2} = 0$$

$$\frac{3\pi x - \pi y}{2} = \pi k$$

$$\frac{3x - y}{2} = k$$

$$x + y = 2n$$

$$k, n \in \mathbb{Z}$$

$$3x - y = 2k$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
2 ИЗ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

1) $3x - y = 2k$. ~~$x = \frac{2k}{3}$~~ ~~$y = -2k$~~

1.1) $\begin{cases} |\frac{x}{6}| \leq 1 \\ |\frac{y}{2}| \leq 1 \\ \frac{x}{6} \neq 1 \end{cases}$ $\begin{cases} -6 \leq x < 6, \\ -2 \leq y \leq 2, \\ \Rightarrow 3x - y = 2k \end{cases}$ $\begin{cases} -6 \leq x \leq 5 \\ -2 \leq y \leq 2 \\ 3x - y = 2k \end{cases}$

$\begin{cases} -18 \leq 3x \leq 15 \\ -2 \leq -y \leq 2 \\ 3x - y = 2k \end{cases}$ $\begin{cases} -20 \leq 3x - y \leq 17 \\ -2 \leq -y \leq 2 \\ 3x - y = 2k \end{cases}$

$\begin{cases} -20 \leq 2k \leq 17 \\ -2 \leq -y \leq 2 \\ 3x - y = 2k \end{cases}$ $\begin{cases} -10 \leq k \leq \frac{17}{2} \\ -2 \leq -y \leq 2 \\ 3x - y = 2k \end{cases}$

$\begin{cases} -10 \leq k \leq 8 \\ -2 \leq -y \leq 2 \\ 3x - y = 2k \end{cases}$ ~~1. $k = -10$~~
~~2. $k = -9$~~
~~3. $k = -8$~~
~~4. $k = -7$~~
~~5. $k = -6$~~
~~6. $k = -5$~~
~~7. $k = -4$~~
~~8. $k = -3$~~
~~9. $k = -2$~~

1. $k = -10$

$3x - y = -20$

1.1) $y = -2$ $3x + 2 = -20$, $3x = -22$ $x = -\frac{22}{3} \notin \mathbb{Z}$

1.2) $y = -1$ $3x + 1 = -20$, $3x = -21$ $x = -7$; $|\frac{x}{6}| \neq 1$

1.3) $y = 0$ $3x = -20$; $x = -\frac{20}{3}$ $x \notin \mathbb{Z}$

1.4) $y = 1$ $3x - 1 = -20$; $x = -\frac{19}{3} \notin \mathbb{Z}$

1.5) $y = 2$ $3x - 2 = -20$; $x = -6$ $\text{нодхогум. } (-6; 2)$

2. $k = -9$

$3x = -18 + y$ $-18 + y : 3 \Rightarrow y : 3 \Rightarrow y = 0$

$3x = 18 \Rightarrow x = 6$, ~~$x = 6$~~ нодхогум.

3. $k = -8$

$3x = -16 + y$ $-16 + y : 3 \Rightarrow y \equiv 16 \equiv 1 \Rightarrow y = 1$

$3x = -16 + 1 = -15$ $x = -5$ $\text{нодхогум. } (-5; 1)$

$3x = -16 - 2 = -18$ $x = -6$ $\text{нодхогум. } (-6; -2)$

4. $k = -7$

~~$3x = -14 + y$~~ $-14 + y : 3 \Rightarrow y \equiv 14 \equiv -1 \Rightarrow y = -1$

~~$3x = -14 - 1 = -15$~~ ; $x = -5$ $\text{нодхогум. } (-5; -1)$

~~$3x = -14 + 2 = -12$~~ ; $x = -4$ $\text{нодхогум. } (-4; 2)$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

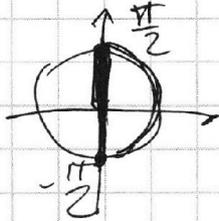
СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\frac{|x|}{6} + 1$$

$$\frac{2x-1}{3} = 6$$

$$3+3+4+5 = 15$$



$$2 \geq y \geq -2$$

$$-2 \leq -y \leq 2$$

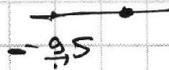
$$7+6+6 = 92+ \quad \&$$

$$\frac{4}{m} \cdot \frac{3}{m-1}$$

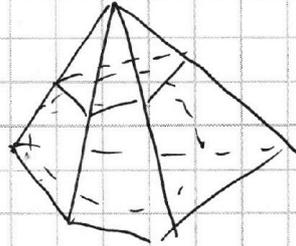
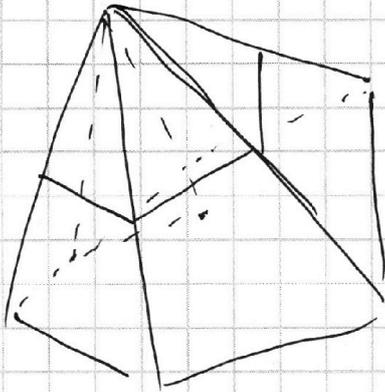
$$6 \cdot \frac{4}{m} \cdot \frac{3}{m-1} = \frac{b}{m} \cdot \frac{b-1}{m-1}$$

$$2 \cdot 72 = b(b-1)$$

$$b^2 - b$$



$$\frac{72}{9 \cdot 8}$$





На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА

2 ИЗ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

5. $k = -6$

$$3x = -12 + y \quad -12 + y \stackrel{3}{=} 0 \Rightarrow -12 = y = 0 \Rightarrow y = 0$$

$$3x = -12 \quad x = -4 \quad (-4; 0) - \text{нодхорум}$$

6. $k = -5$

$$3x = -10 + y; \quad -10 + y \stackrel{3}{=} 0 \quad y = 10 \Rightarrow 1 \quad y = \begin{cases} -2 \\ 1 \end{cases}$$

$$3x = -10 - 2 = -12 \quad x = -4 \quad (-4; -2) \quad \text{нодхорум}$$

$$3x = -10 + 1 = -9 \quad x = -3 \quad (-3; 1) \quad \text{нодхорум}$$

7. $k = -7$

$$3x = -8 + y; \quad -8 + y \stackrel{3}{=} 0 \Rightarrow y = 8 \Rightarrow 2 \Rightarrow y = 2$$

$$3x = -8 - 1 = -9 \quad x = -3 \quad y = -1 \quad (-3; -1) \quad \text{нодхорум}$$

$$3x = -8 + 2 = -6; \quad x = -2 \quad (-2; 2) \quad \text{нодхорум}$$

8. $k = -8$

$$3x = -6 + y; \quad 6 + y \stackrel{3}{=} 0 \Rightarrow y = 0 \Rightarrow y = 0$$

$$3x = -6; \quad x = -2 \Rightarrow y = 0 \quad (-2; 0) - \text{нодхорум}$$

9. $k = -2$

$$3x = -4 + y; \quad -4 + y \stackrel{3}{=} 0 \Rightarrow y = 4 \Rightarrow 1 \Rightarrow y = 1$$

$$3x = -4 - 2 = -6 \quad x = -2 \quad (-2; 1) - \text{нодхорум}$$

$$3x = -4 + 1 = -3 \quad x = -1 \quad (-1; -2) - \text{нодхорум}$$

10. $k = -1$

$$3x = -2 + y; \quad -2 + y \stackrel{3}{=} 0 \quad y = 2 \Rightarrow 2 \Rightarrow y = 2$$

$$3x = -2 - 1 = -3 \quad x = -1 \quad (-1; -1) \quad \text{нодхорум}$$

$$3x = -2 + 2 = 0 \quad x = 0 \quad (0; 2) - \text{нодхорум}$$

11. $k = 0$

$$3x = y; \quad y \stackrel{3}{=} 0 \Rightarrow y = 0$$

$$x = 0 \quad (0; 0) - \text{нодхорум}$$

12. $k = 1$

$$3x = 2 + y; \quad 2 + y \stackrel{3}{=} 0 \Rightarrow y = -2 \Rightarrow y = -2$$

$$3x = 2 - 2 = 0 \quad x = 0; \quad (0; -2) - \text{нодхорум}$$

$$3x = 2 + 1 = 3 \quad x = 1; \quad (1; 1) - \text{нодхорум}$$

13. $k = 2$

$$3x = 4 + y; \quad 4 + y \stackrel{3}{=} 0 \quad y = -4 \Rightarrow -1 \Rightarrow y = -1$$

$$3x = 4 - 1 = 3 \quad x = 1; \quad (1; -1) - \text{нодхорум}$$

$$3x = 4 + 2 = 6 \quad x = 2; \quad (2; 2) - \text{нодхорум}$$

14. $k = 3$

$$3x = 6 + y; \quad 6 + y \stackrel{3}{=} 0 \Rightarrow y = 0 \Rightarrow y = 0$$

$$3x = 6; \quad x = 2; \quad (2; 0) - \text{нодхорум}$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
3 ИЗ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

15. $k=4$; $3x=8+y$; $8+y=0$; $y=-8$; $y=1 \Rightarrow \begin{cases} y=1 \\ y=-2 \end{cases}$ $3x=8+1=9$ $x=3$ $(3; 1)$
 $3x=8-2=6$ $x=2$ $(2; -2)$
16. $k=5$; $3x=8+y$; $10+y=0$; $y=-10$; $y=-1 \Rightarrow \begin{cases} y=-1 \\ y=2 \end{cases}$ $3x=8-1=7$ $x=3$ $(3; -1)$
 $3x=8+2=10$ $x=4$ $(4; 2)$
17. $k=6$; $3x=8+y$; $y=0$; $y=0$; $3x=12$; $x=4$ $(4; 0)$
18. $k=7$; $3x=14+y$; $14+y=0$ $y=-14$; $y=1 \Rightarrow \begin{cases} y=1 \\ y=-2 \end{cases}$ $14+1=3x=15$ $x=5$ $(5; 1)$
 $14-2=12=3x$ $x=4$ $(4; -2)$
19. $k=8$; $3x=16+y$; $16+y=0$ $y=-16$; $y=2 \Rightarrow \begin{cases} y=2 \\ y=-1 \end{cases}$ $16+2=3x=18$ $x=6$ - не подходит.
 $16-1=15=3x$ $x=5$ $(5; 2)$

Таким образом всего подходящих решений в этом случае. 29

1.2) $\begin{cases} -6 \leq x \leq 6 \\ -2 \leq y \leq 2 \\ -18 \leq 3x-y \leq 20 \\ -1 \leq -y \leq 2 \\ 3x-y=2k \end{cases}$ $\begin{cases} -18 \leq 3x \leq 18 \\ -2 \leq y \leq 1 \\ 3x-y=2k \\ -18 \leq 2k \leq 20 \\ -1 \leq -y \leq 2 \\ 3x-y=2k \end{cases}$ $\begin{cases} -18 \leq 3x \leq 18 \\ -1 \leq -y \leq 2 \\ 3x-y=2k \\ -\frac{19}{2} \leq k \leq 10 \\ -1 \leq -y \leq 2 \\ 3x-y=2k \end{cases}$ $\begin{cases} -9 \leq k \leq 10 \\ -1 \leq -y \leq 2 \\ 3x-y=2k \end{cases}$

при $k \in [-9; 8]$ всех пар $(x; y)$ не годятся,

т.к. они были рассмотрены в случае 1.1)

$k=9$ $8+y=3x$; $18+y:3 \Rightarrow y=0$, т.к. $y:3$

$x=6$ $(6; 0)$

$k=10$ $20+y=3x$ $20+y:3 \Rightarrow y=1$ $\begin{cases} y=1 \\ y=-2 \end{cases}$

$3x=21$ $x=7$, но $x \leq 6$

$3x=18$ $x=6$, $(6; -2)$

2) $x+y=2n$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

m - одиннадцатиклассников b - билетов.

$$\frac{m!}{(m-b)!}$$

(3x) - (4)

1 билет $\rightarrow m$
2 билет $\rightarrow m-1$
...
 b - билет $\rightarrow m-b+1$

$$\frac{m!}{(m-b)!}$$

13

$$12 \cdot \frac{(m-2)!}{m!} = \frac{12}{m(m-1)}$$

4 билета изначально
 b билетов после.

$$6 \cdot \frac{4 \cdot 3 \cdot \frac{(m-2)!}{(m-4)!}}{\frac{m!}{(m-4)!}} = \frac{b(b-1) \frac{(m-2)!}{(m-b+2)!}}{\frac{m!}{(m-b)!}}$$

$$\frac{12}{72}$$

$$96 \cdot \frac{(m-2)!}{(m-4)!} \cdot \frac{(m-4)!}{m!} = b(b-1) \frac{(m-2)!}{(m-b+2)!} \cdot \frac{(m-b)!}{m!}$$

$$96 = b(b-1) \frac{(m-b)!}{(m-b+2)!}$$

$$b(b-1) \rightarrow \frac{(m-b)!}{m!}$$

$$96(m-b+2)! = b(b-1)(m-b)!$$

$$b = 4 + x$$

$$96(m-b+1)(m-b+2) = b(b-1)$$

$$96 = 3 \cdot 32$$

$$96(m^2 - mb + 2m - bm + b^2) = 96$$

$$72 \cdot \frac{(m-2)!}{(m-4)!} \cdot \frac{(m-4)!}{m!} = b(b-1) \frac{(m-2)!}{(m-b+2)!} \cdot \frac{(m-b)!}{m!}$$

$$72 \frac{(m-2)!}{m!} = b(b-1) \frac{(m-2)!}{m!} \cdot \frac{(m-b)!}{(m-b+2)!}$$

$$72 = b(b-1)(m-b)!$$

$$72(m-b+2)(m-b+1) = b(b-1)$$

$$b = 4 + x$$

$$72(m-4+x+2)(m-4-x+1) = (4+x)$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

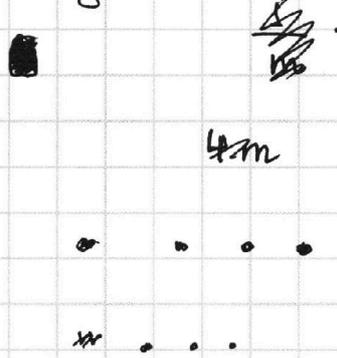
1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

m - одиннадцатиклассников.

4



4m

b:

4 · 3 · 2

1 2

1 2 3 4 5

$$m \cdot (m-2) \cdot (m-2) \cdot (m-3)$$

$\frac{m!}{(m-4)!}$ - всего вариантов распределения.

$$\frac{m!}{(m-4)!}$$

3	24
2	13 25
	14 23
	14 25
	15 23
	15 24

1 2

$$\frac{4 \cdot 3 \cdot (m-2) \cdot (m-3)}{m!}$$

1 2 3 4

$m-2$

$$\frac{4 \cdot 3 \cdot (m-2) \cdot (m-3)}{m!}$$

$$\frac{4 \cdot 3 \cdot (m-2) \cdot (m-1)}{m!}$$

$$\frac{12 \cdot (m-2) \cdot (m-1) \cdot (m-4) \cdot (m-3)}{m! \cdot (m-3)}$$

$$b \cdot (b-1) \cdot (m-2) \cdot (m-3)$$

$$b(b-1) \cdot \frac{(m-2)!}{(m-b)!}$$

$\frac{m!}{(m-b)!}$ m одноклассников

$$\frac{(m-1)! \cdot 12}{m! \cdot (m-3)} = \frac{12}{m(m-3)}$$

значительно

$$72(m-b+1)(m-b+2) = b(b-1)$$

$$72(m^2 - 2mb + b^2 + 2m - 2b + m - b + 2) = b^2 - b$$

$$72m^2 - 144mb + 72b^2 + 144m - 144b + 72m - 72b + 144$$