



МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

11 КЛАСС. Вариант 1



- [3 балла] Найдите все тройки натуральных чисел $(A; B; C)$ такие, что:
 - A — четырёхзначное число, составленное из одинаковых цифр,
 - B — трёхзначное число, хотя бы одна из цифр которого равна 2,
 - C — двухзначное число, хотя бы одна из цифр которого равна 3,
 - произведение $A \cdot B \cdot C$ является квадратом некоторого натурального числа.
- [3 балла] Положительные числа x и y таковы, что значение выражения $K = \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{2}{xy}$ не изменяется, если x уменьшить на 1, а y — увеличить на 1. Найдите все возможные значения выражения $M = x^3 - y^3 - 3xy$.
- [5 баллов] а) Найдите все пары действительных чисел $(x; y)$ такие, что $(\sin \pi x + \sin \pi y) \sin \pi x = (\cos \pi x + \cos \pi y) \cos \pi x$.
б) Сколько пар целых чисел (x, y) удовлетворяют одновременно этому уравнению и неравенству

$$\arcsin \frac{x}{5} + \arccos \frac{y}{4} < \frac{3\pi}{2}?$$

- [4 балла] В начале месяца было выделено 4 билета на праздничный концерт, которые планировалось случайным образом распределить между одиннадцатиклассниками. В конце месяца выяснилось, что будет выделено больше 4 билетов. Одиннадцатиклассники Петя и Вася вычислили, что вероятность им обоим вместе попасть на концерт в начале месяца была в 2,5 раза меньше, чем оказалась в конце месяца. Сколько всего было выделено билетов на концерт в конце месяца, если количество одиннадцатиклассников не изменилось?
- [5 баллов] Точка O — центр окружности ω_1 , описанной около остроугольного треугольника ABC . Окружность ω_2 , описанная около треугольника BOC , пересекает отрезок AB в точке P . Найдите площадь треугольника ABC , если $AP = \frac{15}{2}$, $BP = 5$, $AC = 9$.
- [6 баллов] На координатной плоскости изображена фигура $\Phi(\alpha)$, состоящая из всех точек, координаты $(x; y)$ которых удовлетворяют системе неравенств

$$\begin{cases} (x - 3\sqrt{2} \sin \alpha)(y - 3\sqrt{2} \cos \alpha) \leq 0, \\ x^2 + y^2 \leq 25. \end{cases}$$

Найдите максимальное значение M периметра (длины границы) фигуры $\Phi(\alpha)$ и укажите все значения α , при которых оно достигается.

- [6 баллов] Шар Ω касается всех рёбер правильной усечённой пирамиды, а шар ω касается всех её граней. Пусть сторона верхнего основания меньше, чем сторона нижнего. Найдите отношение площади боковой поверхности пирамиды к площади её нижнего основания.



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

- | | | | | | | |
|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

СТРАНИЦА
1 из 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач **нумеруются отдельно**. Порча QR-кода недопустима!

Пусть $A \cdot B \cdot C = n^2$. Значит, что $a \mid 1111$ ($1111 = 11 \cdot 101$) $\Rightarrow n \mid 1111$

$n = 1111 \cdot k$, $k \in \mathbb{N}$, $A = 1111 \cdot a$, $a \in [1; 9]$, $a \in \mathbb{Z}$

$$\underbrace{A \cdot B \cdot C}_{\vdots 1111} = 1111 \cdot k^2 \Rightarrow A \cdot B \cdot C \vdash 11$$

$$A \cdot B \cdot C \vdash 101$$

a не делится на 11 , ибо на $101 \quad 11 \in P_c$ простое

B не делится на $101 \quad 101 \in P_c$ простое

$$1) C \vdash 11 \Rightarrow C = 33$$

$$2) B \vdash 1111 - \text{невозможно}$$

$$B \vdash 101 \Rightarrow B = 202$$

$$9 \cdot 6 = k^2$$

$$a = 6$$

$$n = 6666$$

$$A = 6666$$

$$B = 202$$

- решение

$$C = 33$$

Ответ: $(6666; 202; 33)$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи **отдельно**.

1

2

3

4

5

6

7

СТРАНИЦА
1 из 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач **нумеруются отдельно**. Порча QR-кода недопустима!

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{x+2}{xy} = \frac{1}{x-1} + \frac{1}{y+1} + \frac{2}{(x-1)(y+1)}, \quad x, y > 0 \quad x \neq 1$$
$$\frac{x+y+2}{xy} = \frac{y+1+x-1+2}{(x-1)(y+1)}$$
$$x+y+2 \neq 0 \quad (x, y > 0) \Rightarrow (x-1)(y+1) = xy$$
$$xy - y + x - 1 = xy$$
$$y = x - 1$$
$$M = x^3 - (x-1)^3 - 3x(x-1) = \underline{\underline{x^3}} - \underline{\underline{x^3}} + \underline{\underline{3x^2}} - 3x + (-3x^2 + 3x) = 1$$

Ответ: 1

L



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1

2

3

4

5

6

7

СТРАНИЦА
1 из 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\begin{aligned}
 a) & (\sin \pi x + \sin \pi y) \sin \pi x = (\cos \pi x + \cos \pi y) \cos \pi x \\
 0 = & (\cos^2 \pi x - \sin^2 \pi x) + (\cos \pi x \cos \pi y - \sin \pi x \sin \pi y) \\
 \cos 2\pi x + \cos(\pi x + \pi y) = & 0 \\
 \cos 2\pi x = & \cos(\pi x + \pi y + \pi) \\
 \left[\begin{array}{l} 2\pi x = \pi x + \pi y + \pi + 2\pi k \\ 2\pi x = -\pi x - \pi y - \pi + 2\pi n \end{array} \right. , k, n \in \mathbb{Z}
 \end{aligned}$$

$$\left[\begin{array}{l} y = x - 1 + 2k \\ y = -3x - 1 + 2n \end{array} \right.$$

$$\delta) \text{ Условие: } x \in [-5, 5] \\
 y \in [-4, 4]$$

$$\left. \begin{array}{l} \arcsin \frac{x}{5} \leq \frac{\pi}{2} \\ \arccos \frac{y}{4} \leq \pi \end{array} \right\} \arcsin \frac{x}{5} + \arccos \frac{y}{4} \leq \frac{3\pi}{2} \quad \text{всегда}$$

Неравенство неравно членами в сущности $\left\{ \begin{array}{l} x=5 \\ y=-1 \end{array} \right.$ (равенство)

x	y (первое членство)	y (второе)	
5	4, 2, 0, -2, -4	④	-4, -2, 0, 2, 4 !
4	3, 1, -1, -3	⑤	-3, -1, 1, 3
3	2, 4, 0, -2, -4	⑤	
2	1, 3, -1, -3	④	
1	0, 2, 4, -2, -4	⑤	
0	-1, 1, 3, -3	④	(Всего $5 \cdot 5 + 4 \cdot 5 + 4 = 75 + 20 + 4 = 100$ решений)
-1	-2, 0, 2, 4, -4	⑤	
-2	-3, -1, 1, 3	④	
-3	-4, -2, 0, 2, 4	⑤	
-4	-3, -1, 1, 3	④	
-5	-4, -2, 0, 2, 4	⑤	

Действительно, при $x \in \mathbb{Z}$ членства $y = x - 1 + 2k$
 $y = -3x - 1 + 2n$

задачам одни и те же значения $(x-1) \cup (-3x-1)$ имеют одно и то же значение

"49 решений"

Ответ: a) $(x; x-1+2k), x \in \mathbb{R}, k \in \mathbb{Z};$
 $(x; -3x-1+2n), x \in \mathbb{R}, n \in \mathbb{Z};$

б) 49



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1

2

3

4

5

6

7

СТРАНИЦА
1 из 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

1) Вероятность того, что оба попадут к концу при n школьниках гемирик билетов:

$$P_1 = \frac{C_{n-2}^2}{C_n^4} \quad (\text{из } n \text{ школьников выбирать } 4)$$

$$P_1 = \frac{(n-1)! \cdot (n-4)! \cdot 4!}{n! \cdot (n-4)! \cdot 2!} = \frac{3 \cdot 4}{n(n-1)}$$

2) Аналогично для k билетов:

$$P_2 = \frac{C_{(n-2)}^{k-2}}{C_n^k} = \frac{(n-2)! (n-k)! k!}{n! (n-k)! (k-2)!} = \frac{k(k-1)}{n(n-1)} = 2,5 P_1$$

$$k(k-1) = 12 \cdot 2,5$$

$$k^2 - k - 30 = 0$$

$$\boxed{k_1 = 6}$$

$k_2 = -5$ - невозможно

Ответ: 6 билетов.



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

- | | | | | | | |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|---------------------------------------|----------------------------|----------------------------|
| <input type="checkbox"/> 1 | <input type="checkbox"/> 2 | <input type="checkbox"/> 3 | <input type="checkbox"/> 4 | <input checked="" type="checkbox"/> 5 | <input type="checkbox"/> 6 | <input type="checkbox"/> 7 |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|---------------------------------------|----------------------------|----------------------------|

СТРАНИЦА
1 из 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$AP = \frac{15}{2}$$

$$\alpha = \angle BAC$$

$$BP = 5$$

$$\bullet \angle BAC = \frac{1}{2} \angle BOC \text{ как вписаный}$$

$$AC = 9$$

$$\angle BOC = \frac{1}{2} \angle BAC = 2\alpha$$

$$S_{\triangle ABC} \rightarrow$$

$$\triangle BOC \text{ равнобедренный } (OB = OC)$$

$$S_{\triangle ABC} \cdot$$

$$\angle OCB = 180^\circ - \angle BOC = 90^\circ - \alpha$$

$$\text{угол при основании}$$

$$\frac{1}{2}$$

$$\text{Четырёхугольник } PBCO \text{ вписан в } \omega_2; A$$

$$\angle BPO = 180^\circ - \angle BCO = 90^\circ + \alpha$$

$$\angle APO = 180^\circ - \angle BPO = 90^\circ - \alpha \text{ как смежный}$$

$$\text{Пусть } PO \cap AC = X$$

$$\angle AXP = 180^\circ - \alpha - (90^\circ - \alpha) = 90^\circ \Rightarrow PX \perp AC,$$

$$\bullet \text{Пусть } BH - \text{ высота } \triangle ABC \Rightarrow \angle AHB = 90^\circ$$

$$\triangle ABH \sim \triangle APX \text{ по двум углам } (\angle A \text{ общий}, \angle AXP = \angle AHB = 90^\circ)$$

$$\frac{AB}{AP} = \frac{BH}{PX} \Rightarrow BH = PX \cdot \frac{\frac{15}{2} + 5}{\frac{15}{2}} = PX \cdot \frac{25}{15} = \frac{5}{3} PX$$

$$\bullet OX - \text{ высота } \omega_2 \text{ в равнобедренном } \triangle AOC (AO = OC)$$

$$\text{Следовательно, } AX = \frac{AC}{2} = \frac{9}{2}$$

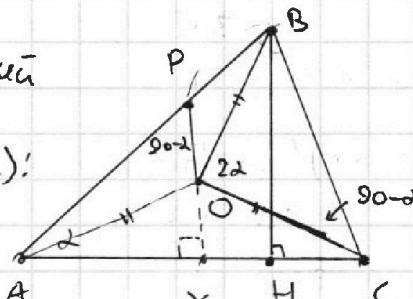
$$\text{теорема Пифагора для } \triangle APX:$$

$$PX = \sqrt{AP^2 - AX^2} = \sqrt{\frac{225}{4} - \frac{81}{4}} = \frac{1}{2} \sqrt{144} = \frac{12}{2} = 6$$

$$\bullet BH = \frac{5}{3} PX = \frac{5}{3} \cdot 6 = 10$$

$$S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} BH \cdot AC = \frac{1}{2} \cdot 10 \cdot 9 = 45$$

Ответ: 45.





На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

- | | | | | | | |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|---------------------------------------|----------------------------|
| <input type="checkbox"/> 1 | <input type="checkbox"/> 2 | <input type="checkbox"/> 3 | <input type="checkbox"/> 4 | <input type="checkbox"/> 5 | <input checked="" type="checkbox"/> 6 | <input type="checkbox"/> 7 |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|---------------------------------------|----------------------------|

СТРАНИЦА
1 из 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\begin{cases} (x - 3\sqrt{2} \sin \alpha)^2 + (y - 3\sqrt{2} \cos \alpha)^2 \leq 0 \\ x^2 + y^2 \leq 25 \end{cases}$$

$x^2 + y^2 \leq 25$ — круг с центром $(0,0)$ и радиусом 5

$$(x - 3\sqrt{2} \sin \alpha)^2 + (y - 3\sqrt{2} \cos \alpha)^2 \leq 0$$

Примечание $x = 3\sqrt{2} \sin \alpha$ и $y = 3\sqrt{2} \cos \alpha$ разбивают плоскость на 4

частей

Точка O при этом имеет координаты $(3\sqrt{2} \sin \alpha; 3\sqrt{2} \cos \alpha) =$

\Rightarrow окружности радиусом $3\sqrt{2}$ с центром в $(0,0)$

Учтите:

Искомый периметр равен: $P = AB + CD + 5 \cdot AC + 5 \cdot BD$ (это ошибочно)

заметка на P)

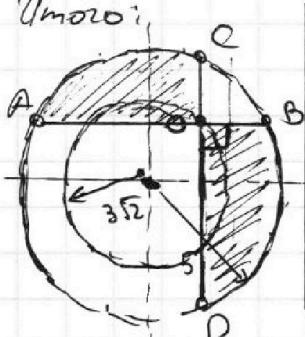
шаги дуг в радикалах.

Заметим, что $\angle(AB, CD) = \frac{1}{2}(AC + BD) = \frac{\pi}{2}$

$$AC + BD = \pi$$

$$5AC + 5BD = 5\pi = \text{const} \text{ для всех } \alpha!$$

P_{\max} тогда, когда $\max(AB + CD)$



$$AB = 2x_B, \text{ при этом } y_B = 3\sqrt{2} \sin \alpha \Rightarrow x_B = \sqrt{25 - 18 \sin^2 \alpha}$$

$$CD = 2y_C, \text{ при этом } x_C = 3\sqrt{2} \cos \alpha \Rightarrow y_C = \sqrt{25 - 18 \cos^2 \alpha}$$

$$P = 2\sqrt{25 - 18 \sin^2 \alpha} + 2\sqrt{25 - 18 \cos^2 \alpha} + 5\pi$$

$$P'(\alpha) = \frac{2(-18 \sin \alpha \cos \alpha)}{2\sqrt{25 - 18 \sin^2 \alpha}} + \frac{2(+18 \cdot 2 \cos^2 \alpha)}{2\sqrt{25 - 18 \cos^2 \alpha}}$$

$$P'(\alpha) = 3.18 \sin 2\alpha \cdot \frac{1}{\sqrt{25 - 18 \sin^2 \alpha} \sqrt{25 - 18 \cos^2 \alpha}} \cdot (\sqrt{25 - 18 \sin^2 \alpha} - \sqrt{25 - 18 \cos^2 \alpha})$$

$\bullet P(\alpha) = 0$ при

$$\sin 2\alpha = 0$$

$$\alpha = \frac{\pi n}{2}, n \in \mathbb{Z}$$

$$P(\alpha) = 2\sqrt{25 + 2\sqrt{7} + 5\pi} \text{ при } \sin 2\alpha = 0 \quad (2) \quad 25 - 18 \sin^2 \alpha = 75 - 18 \cos^2 \alpha$$

$$P(\alpha) = 2\sqrt{7} + 2\sqrt{25 + 5\pi} \text{ при } \cos 2\alpha = 0 \quad \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha = 0 \quad \sin^2 \alpha = \frac{1}{2} \quad \cos^2 \alpha = \frac{1}{2}$$

$$(P(\alpha) = 2\sqrt{7} + 10 + 5\pi \text{ при } \alpha = \frac{\pi n}{2}) \quad P(\alpha) = 2\sqrt{16} + 2\sqrt{16} + 5\pi$$

$$P_1 = 2\sqrt{7} + 10 + 5\pi$$

$$P(\alpha) = 16 + 5\pi$$

$$P_2 > P_1 \Rightarrow P_2 - \text{наибольшее}$$

$$P_2 = 16 + 5\pi$$

значение $P(\alpha) \Rightarrow M = 16 + 5\pi$ при $\alpha = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi k}{2}, k \in \mathbb{Z}$

$$\alpha = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi k}{2}, k \in \mathbb{Z} - \text{номи максимума}$$

Ответ: $M = 16 + 5\pi$ при $\alpha = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi k}{2}, k \in \mathbb{Z}$.

На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.



СТРАНИЦА
1 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Пусть a - сторона нижнего основания, b - сторона верхнего

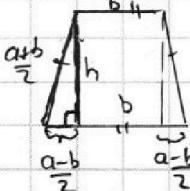
- Грань пирамиды - равнобедренные трапеции.

Чтобы Ω касалась всех её сторон \Rightarrow трапеции описаны.
Её боковые стороны равны $a+b$

Высота h трапеции находится из теоремы Пифагора:

$$h^2 = (a+b)^2 - (a-b)^2 = \frac{4ab}{4} = ab$$

ω



- Чтобы Ω касалась оснований \Rightarrow его центр лежит на середине высоты пирамиды

$\frac{1}{3}$ симметрии, эта высота соединяет центры оснований O_A и O_B

Пусть A и B - середины сторон оснований, лежащих в одной грани

$O_A A \perp O_B B$ \perp эти же стороны.

AB - ось симметрии боковой грани $\Rightarrow AB$ - высота трапеции.

Пусть H - основание перпендикуляра, опущенного из O на AB .

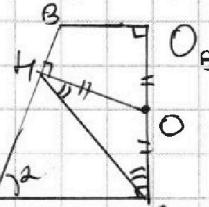
$OH \perp AB$

$$\left. \begin{array}{l} l \perp O_A A \\ l \perp AB \end{array} \right\} l \perp (AO_B O_B) \Rightarrow OH \perp l$$

$\left. \begin{array}{l} OH \perp l \\ OH \perp AB \end{array} \right\} OH \perp$ боковой грани

радиус ω , проведённый в точку касания.

$OH = OO_A < OO_A = R$



$\triangle OO_A$ равнобедренный

$$\angle O_O_A = \angle O_O_B$$

$$\angle AHO_A = 90^\circ - \angle O_O_A$$

$$\angle AO_A H = 90^\circ - \angle O_O_A$$

$$AO_A H = 90^\circ - \angle O_O_A$$

Следовательно, $\angle AHO_A = \angle AO_A H \Rightarrow AH = AO_A$

аналогично $BH = BO_B$

$$h = AB = AO_A + BO_B$$

Чтобы $AO_A = r$ - радиус вписанной в нижнее основание окружности

$$BO_B = \frac{br}{a}$$

из подобия оснований



Тогда

$$\sqrt{ab} = \frac{(a+b)r}{a+b} \Rightarrow r = \frac{\sqrt{ab}}{2}, r = \frac{a}{2} \text{ctg} \frac{180^\circ}{n}, n - \text{число верхних оснований.}$$

$$\operatorname{ctg} \frac{180^\circ}{n} = \frac{\sqrt{ab}}{a+b} < 1 \text{ при } n > 4 \text{ о средних} \Rightarrow \frac{180^\circ}{n} > 45^\circ$$

$$\frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{2\sqrt{ab}}{a+b} \Rightarrow a^2 + b^2 + 2ab = 12ab$$

$(a \neq b)$
тогда.

$$n < 4 \Rightarrow n = 3$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1

2

3

4

5

6

7

СТРАНИЦА

2 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$a^2 - 10ab + b^2 = 0, \text{ пусть } \frac{a}{b} = k, k > 1$$

$$k^2 - 10k + 1 = 0$$

$$k_1 = 5 + \sqrt{24} \Rightarrow k = 5 + \sqrt{24}$$

$$k_2 = 5 - \sqrt{24} < 1$$

$$S_{\text{окн}} = n \cdot \frac{\ell}{2} \sqrt{ab} \cdot (a+b)$$

$$S_{\text{окн}} = \frac{n \cdot a \cdot r}{2} = \frac{n a^2 \sqrt{ab}}{2(a+b)}$$

$$\frac{S_{\text{окн}}}{S_{\text{окн}}} = \frac{(a+b)^2}{a^2} = \left(1 + \frac{1}{k}\right)^2 = \left(1 + \frac{1}{5+\sqrt{24}}\right)^2 = \left(1 + 5 - \sqrt{24}\right)^2 = (6 - \sqrt{24})^2$$

$$\frac{S_{\text{окн}}}{S_{\text{окн}}} = 36 + 24 - 12\sqrt{24} = 60 - 12\sqrt{24} = 60 - 24\sqrt{6}$$

$$\text{Ответ: } 60 - 24\sqrt{6}$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

- | | | | | | | |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| <input type="checkbox"/> |

СТРАНИЦА
_ ИЗ _

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

- | | | | | | | |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|
| <input type="checkbox"/> 1 | <input type="checkbox"/> 2 | <input type="checkbox"/> 3 | <input type="checkbox"/> 4 | <input type="checkbox"/> 5 | <input type="checkbox"/> 6 | <input type="checkbox"/> 7 |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|

СТРАНИЦА
ИЗ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\frac{S_{\text{окн}}}{S_{\text{сна}}}= \frac{\pi(a+b)\sqrt{ab}}{n\pi r_a} = \frac{(a+b)\sqrt{ab} \cdot (a+b)}{a^2\sqrt{ab}} = \frac{(a+b)^2}{a^2} = \left(\frac{k+1}{k}\right)^2 = \left(1 + \frac{1}{k} - \frac{\sqrt{24}}{k}\right)^2$$

$$\sqrt{ab} = r_a + \frac{b r_a}{a}$$

$$r_a = \frac{a+\sqrt{ab}}{\operatorname{ctg} \frac{\alpha}{2}}$$

$$\Rightarrow \operatorname{ctg} \frac{180}{n} = \frac{2\sqrt{ab}}{a+b} < 1$$

$$n=3$$

$$\frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{2\sqrt{ab}}{a+b}$$

$$(a+b)^2 = 12ab$$

$$a^2 - 18ab + b^2 = 0$$

$$k^2 - 10k + 1 = 0$$

$$k = 5 + \sqrt{24}$$

$$\frac{1}{k} = 5 - \sqrt{24}$$

$$\arccos \frac{x}{5} + \arccos \frac{y}{4} < \frac{3\pi}{2}$$

$$\arccos \frac{x}{5} + \arccos \left(\frac{x-1+2k}{4} \right) < \frac{3\pi}{2}$$

всегда

$$x = 5 + 2k$$

$$x = 3 + 2k$$

$$x = 1 + 2k$$

$$x = -1 + 2k$$

$$x = -3 + 2k$$

$$x = -5 + 2k$$

$$x = -7 + 2k$$

$$x = -9 + 2k$$

$$x = -11 + 2k$$

$$x = -13 + 2k$$

$$x = -15 + 2k$$

$$-4 = 5 + 2k$$

$$0 = 8 + 2k$$

$$k = -4$$

$$x \in [-5; 5]$$

$$-4 \leq x - 1 + 2k \leq 4$$

$$-3 \leq x + 2k \leq 5$$

$$-4 \leq x - 1 + 2k \leq 4$$

$$-3 \leq x + 2k \leq 5$$

На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.



- 1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
ИЗ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\textcircled{1} \quad A = \overline{aaaa} = a \cdot 1111$$

$$B = \overline{bcd} = b \cdot 111$$

$$C = \overline{ef} = e \cdot 11$$

$$a(1+e) + a \cdot 111 \\ 11 = 11 \cdot 101$$

$$A \cdot B \cdot C = 1111 \cdot k^2$$

$$C : 11 \Rightarrow C = 33$$

$$B : 101 \Rightarrow B = 202$$

$$A \cdot B \cdot C = b^2$$

$$A \cdot B \cdot C = 1111 \cdot k^2$$

$$1111 \\ 9 \\ 992 \\ 992$$

$$1111 \\ 9 \\ 992$$

$$1111 \\ 9 \\ 992$$

$$1111 \\ 9 \\ 992$$

$$1111 \\ 9 \\ 992$$

$$1111 \\ 9 \\ 992$$

$$1111 \\ 9 \\ 992$$

$$1111 \\ 9 \\ 992$$

$$1111 \\ 9 \\ 992$$

$$1111 \\ 9 \\ 992$$

$$1111 \\ 9 \\ 992$$

$$1111 \\ 9 \\ 992$$

$$1111 \\ 9 \\ 992$$

$$1111 \\ 9 \\ 992$$

$$1111 \\ 9 \\ 992$$

$$1111 \\ 9 \\ 992$$

$$1111 \\ 9 \\ 992$$

$$1111 \\ 9 \\ 992$$

$$1111 \\ 9 \\ 992$$

$$1111 \\ 9 \\ 992$$

$$1111 \\ 9 \\ 992$$

$$1111 \\ 9 \\ 992$$

$$1111 \\ 9 \\ 992$$

$$1111 \\ 9 \\ 992$$

$$1111 \\ 9 \\ 992$$

$$1111 \\ 9 \\ 992$$

$$1111 \\ 9 \\ 992$$

$$1111 \\ 9 \\ 992$$

$$1111 \\ 9 \\ 992$$

$$1111 \\ 9 \\ 992$$

$$1111 \\ 9 \\ 992$$

$$1111 \\ 9 \\ 992$$

$$1111 \\ 9 \\ 992$$

$$1111 \\ 9 \\ 992$$

$$1111 \\ 9 \\ 992$$

$$1111 \\ 9 \\ 992$$

$$1111 \\ 9 \\ 992$$

$$1111 \\ 9 \\ 992$$

$$1111 \\ 9 \\ 992$$

$$1111 \\ 9 \\ 992$$

$$1111 \\ 9 \\ 992$$

$$1111 \\ 9 \\ 992$$

$$1111 \\ 9 \\ 992$$

$$1111 \\ 9 \\ 992$$

$$1111 \\ 9 \\ 992$$

$$1111 \\ 9 \\ 992$$

$$1111 \\ 9 \\ 992$$

$$1111 \\ 9 \\ 992$$

$$1111 \\ 9 \\ 992$$

$$1111 \\ 9 \\ 992$$

$$1111 \\ 9 \\ 992$$

$$1111 \\ 9 \\ 992$$

$$1111 \\ 9 \\ 992$$

$$1111 \\ 9 \\ 992$$

$$1111 \\ 9 \\ 992$$

$$1111 \\ 9 \\ 992$$

$$1111 \\ 9 \\ 992$$

$$1111 \\ 9 \\ 992$$

$$1111 \\ 9 \\ 992$$

$$1111 \\ 9 \\ 992$$

$$1111 \\ 9 \\ 992$$

$$1111 \\ 9 \\ 992$$

$$1111 \\ 9 \\ 992$$

$$1111 \\ 9 \\ 992$$

$$1111 \\ 9 \\ 992$$

$$1111 \\ 9 \\ 992$$

$$1111 \\ 9 \\ 992$$

$$1111 \\ 9 \\ 992$$

$$1111 \\ 9 \\ 992$$

$$1111 \\ 9 \\ 992$$

$$1111 \\ 9 \\ 992$$

$$1111 \\ 9 \\ 992$$

$$1111 \\ 9 \\ 992$$

$$1111 \\ 9 \\ 992$$

$$1111 \\ 9 \\ 992$$

$$1111 \\ 9 \\ 992$$

$$1111 \\ 9 \\ 992$$

$$1111 \\ 9 \\ 992$$

$$1111 \\ 9 \\ 992$$

$$1111 \\ 9 \\ 992$$

$$1111 \\ 9 \\ 992$$

$$1111 \\ 9 \\ 992$$

$$1111 \\ 9 \\ 992$$

$$1111 \\ 9 \\ 992$$

$$1111 \\ 9 \\ 992$$

$$1111 \\ 9 \\ 992$$

$$1111 \\ 9 \\ 992$$

$$1111 \\ 9 \\ 992$$

$$1111 \\ 9 \\ 992$$

$$1111 \\ 9 \\ 992$$

$$1111 \\ 9 \\ 992$$

$$1111 \\ 9 \\ 992$$

$$1111 \\ 9 \\ 992$$

$$1111 \\ 9 \\ 992$$

$$1111 \\ 9 \\ 992$$

$$1111 \\ 9 \\ 992$$

$$1111 \\ 9 \\ 992$$

$$1111 \\ 9 \\ 992$$

$$1111 \\ 9 \\ 992$$

$$1111 \\ 9 \\ 992$$

$$1111 \\ 9 \\ 992$$

$$1111 \\ 9 \\ 992$$

$$1111 \\ 9 \\ 992$$

$$1111 \\ 9 \\ 992$$

$$1111 \\ 9 \\ 992$$

$$1111 \\ 9 \\ 992$$

$$1111 \\ 9 \\ 992$$

$$1111 \\ 9 \\ 992$$

$$1111 \\ 9 \\ 992$$

$$1111 \\ 9 \\ 992$$

$$1111 \\ 9 \\ 992$$

$$1111 \\ 9 \\ 992$$

$$1111 \\ 9 \\ 992$$

$$1111 \\ 9 \\ 992$$

$$1111 \\ 9 \\ 992$$

$$1111 \\ 9 \\ 992$$

$$1111 \\ 9 \\ 992$$

$$1111 \\ 9 \\ 992$$

$$1111 \\ 9 \\ 992$$

$$1111 \\ 9 \\ 992$$

$$1111 \\ 9 \\ 992$$

$$1111 \\ 9 \\ 992$$

$$1111 \\ 9 \\ 992$$

$$1111 \\ 9 \\ 992$$

$$1111 \\ 9 \\ 992$$

$$1111 \\ 9 \\ 992$$

$$1111 \\ 9 \\ 992$$

$$1111 \\ 9 \\ 992$$

$$1111 \\ 9 \\ 992$$

$$1111 \\ 9 \\ 992$$

$$1111 \\ 9 \\ 992$$

$$1111 \\ 9 \\ 992$$

$$1111 \\ 9 \\ 992$$

$$1111 \\ 9 \\ 992$$

$$1111 \\ 9 \\ 992$$

$$1111 \\ 9 \\ 992$$

$$1111 \\ 9 \\ 992$$

$$1111 \\ 9 \\ 992$$

$$1111 \\ 9 \\ 992$$

$$1111 \\ 9 \\ 992$$

$$1111 \\ 9 \\ 992$$

$$1111 \\ 9 \\ 992$$

$$1111 \\ 9 \\ 992$$

$$1111 \\ 9 \\ 992$$

$$1111 \\ 9 \\ 992$$

$$1111 \\ 9 \\ 992$$

$$1111 \\ 9 \\ 992$$

$$1111 \\ 9 \\ 992$$

$$1111 \\ 9 \\ 992$$

$$1111 \\ 9 \\ 992$$

$$1111 \\ 9 \\ 992$$

$$1111 \\ 9 \\ 992$$

$$1111 \\ 9 \\ 992$$

$$1111 \\ 9 \\ 992$$

$$1111 \\ 9 \\ 992$$

$$1111 \\ 9 \\ 992$$

$$1111 \\ 9 \\ 992$$

$$1111 \\ 9 \\ 992$$

$$1111 \\ 9 \\ 992$$

$$1111 \\ 9 \\ 992$$

$$1111 \\ 9 \\ 992$$

$$1111 \\ 9 \\ 992$$

$$1111 \\ 9 \\ 992$$

$$1111 \\ 9 \\ 992$$

$$1111 \\ 9 \\ 992$$

$$1111 \\ 9 \\ 992$$

$$1111 \\ 9 \\ 992$$

$$1111 \\ 9 \\ 992$$

$$1111 \\ 9 \\ 992$$

$$1111 \\ 9 \\ 992$$

$$1111 \\ 9 \\ 992$$

$$1111 \\ 9 \\ 992$$

$$1111 \\ 9 \\ 992$$

$$1111 \\ 9 \\ 992$$

$$1111 \\ 9 \\ 992$$

$$1111 \\ 9 \\ 992$$

$$1111 \\ 9 \\ 992$$

$$1111 \\ 9 \\ 992$$

$$1111 \\ 9 \\ 992$$

$$1111 \\ 9 \\ 992$$

$$1111 \\ 9 \\ 992$$

$$1111 \\ 9 \\ 992$$

$$1111 \\ 9 \\ 992$$

$$1111 \\ 9 \\ 992$$

$$1111 \\ 9 \\ 992$$

$$1111 \\ 9 \\ 992$$

$$1111 \\ 9 \\ 992$$

$$1111 \\ 9 \\ 992$$

$$1111 \\ 9 \\ 992$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

- | | | | | | | |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|
| <input type="checkbox"/> 1 | <input type="checkbox"/> 2 | <input type="checkbox"/> 3 | <input type="checkbox"/> 4 | <input type="checkbox"/> 5 | <input type="checkbox"/> 6 | <input type="checkbox"/> 7 |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|

СТРАНИЦА
ИЗ

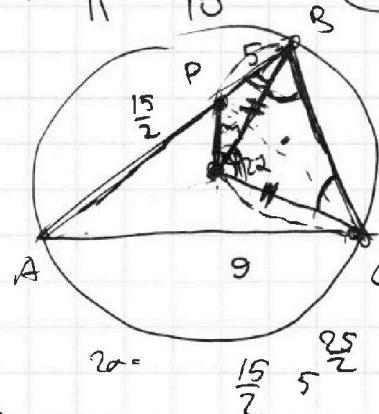
Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\textcircled{4} \quad P_k = 2,5 P_h$$

$$P_h = 2 \cdot \frac{4}{11} \cdot \frac{3}{10}$$

$$P_k = 2 \cdot \frac{k}{11} \cdot \frac{(k-1)}{10}$$

\textcircled{5}



$$k(k-1) = 12 \cdot 2,5$$

$$k(k-1) = 30$$

$$k=6$$

$$180^\circ - \beta - 2\alpha$$

$$\omega = 360 - 2\beta - 2\alpha$$

$$PB = 2R \sin(\beta + \omega) = 2R \sin(-\beta - 2\alpha) =$$

$$= -2R \sin(\beta + 2\alpha) =$$

$$= 2R \cos 2\alpha + 2R \sin 2\alpha \cos \beta \quad 3496$$

$$\sin \beta = \frac{9}{2R} \quad \cos \beta = \frac{\sqrt{4R^2 - 81}}{2R}$$

$$5 = 2R \cos 2\alpha + \sqrt{4R^2 - 81} \sin 2\alpha$$

$$\frac{625}{2500}$$

PB

$$-5 = 2R \sin \beta \cos 2\alpha + 2R \cos \beta \sin 2\alpha$$

$$-5 = 9 \cdot \left(1 - 2 \cdot \left(\frac{25}{4R} \right)^2 \right) + 2R \cdot \frac{\sqrt{4R^2 - 81}}{2R} \cdot 2 \cdot \frac{25}{4R} \cdot \frac{\sqrt{16R^2 - 625}}{4R} \quad - \frac{625}{4296}$$

$$-5 = 9 - \frac{9 \cdot 625}{8R^2} + \frac{25}{8R} \sqrt{(4R^2 - 81)(16R^2 - 625)} \quad - 625 - 196$$

$$9 \cdot 625 - 14 \cdot 8 \cdot R^2 = 25 \sqrt{(4R^2 - 81)(16R^2 - 625)}$$

$$(9 \cdot 625)^2 + (4 \cdot 8)^2 R^4 - 2 \cdot 9 \cdot 625 \cdot 14 \cdot 8 R^2 = 625 \cdot 64 R^4 - 25 \cdot R^2 (4 \cdot 625 + 81 \cdot 16) + 25 \cdot 81 \cdot 625$$

$$64 \cdot 429 R^4 - R^2 (25 \cdot 3796 - 18 \cdot 8 \cdot 14 \cdot 625) + 25 \cdot 81 \cdot 625 - 81 \cdot 625^2 = 0$$

$$64 \cdot 429 R^4 + 1165100 R^2$$

$$3 \cdot 143 = 31113$$

$$\begin{array}{r} 144 \\ 32 \\ \hline 8750 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 12 \\ 14 \\ \hline 15600 \\ 625 \\ \hline 8750 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 32 \\ 8750 \\ \hline 1144 \\ 3500 \\ \hline 875 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 3500 \\ 875 \\ \hline 1260000 \end{array}$$

$$-1260000$$

$$\begin{array}{r} 94900 \\ 11651000 \end{array}$$

$$81 \cdot 625 -$$

$$25 \cdot 81 \cdot 625$$

$$1250000$$

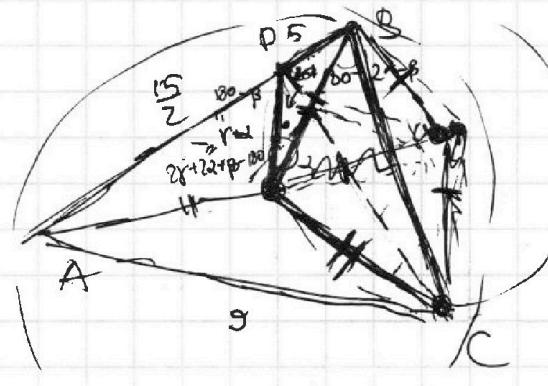


На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

- | | | | | | | |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|
| <input type="checkbox"/> 1 | <input type="checkbox"/> 2 | <input type="checkbox"/> 3 | <input type="checkbox"/> 4 | <input type="checkbox"/> 5 | <input type="checkbox"/> 6 | <input type="checkbox"/> 7 |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|

СТРАНИЦА
ИЗ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



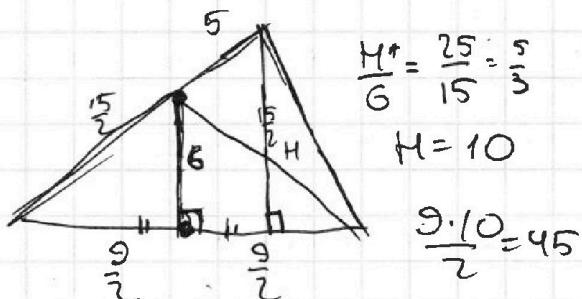
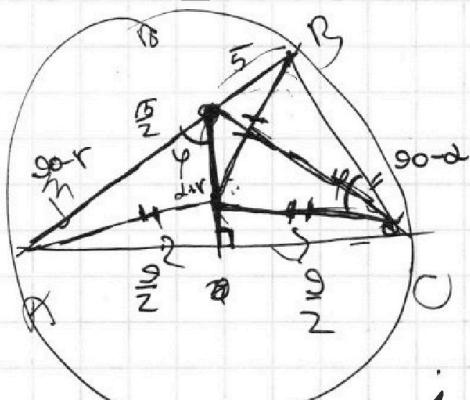
$$\frac{\sin \beta}{\sin(2\alpha + \beta)} = \frac{3}{2}$$

$$2 \sin \beta = 3 \sin(2\alpha + \beta)$$

$$2 \sin \beta = 3 \sin 2\alpha + 3 \sin \beta$$

$$3R + OP \cdot \alpha = R \cdot CD$$

$$225 - 8\alpha = 144$$



$$i \cdot \frac{C_9^2}{C_{11}^4} = \frac{9!}{2! \cdot 7!} \cdot \frac{11!}{11! \cdot 9!} = \frac{4 \cdot 3}{11 \cdot 10}$$

$$\frac{H}{G} = \frac{25}{15} = \frac{5}{3}$$

$$H = 10$$

$$\frac{9 \cdot 10}{2} = 45$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

- | | | | | | | |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|
| <input type="checkbox"/> 1 | <input type="checkbox"/> 2 | <input type="checkbox"/> 3 | <input type="checkbox"/> 4 | <input type="checkbox"/> 5 | <input type="checkbox"/> 6 | <input type="checkbox"/> 7 |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|

СТРАНИЦА
ИЗ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\textcircled{6} \quad (x - 3\sqrt{2} \sin \alpha)(y - 3\sqrt{2} \cos \alpha) \leq 0$$

$$x^2 + y^2 \leq 25$$

$$y_c = 3\sqrt{2} \cos \alpha$$

$$AC = 2x_c$$

$$BD = 2y_B$$

$$x_c + y_B \text{ max}$$

$$\sqrt{25 - 18 \cos^2 \alpha} + \sqrt{25 - 18 \sin^2 \alpha}$$

$$\begin{aligned} &+ 36 \cos \alpha \sin \alpha \\ &- 18 \sin \alpha \cos \alpha \end{aligned}$$

$$= 0 \Rightarrow \alpha = \frac{\pi}{2}$$

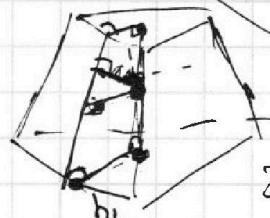
$$\sqrt{25 - B \sin^2 \alpha} - \sqrt{25 - B \cos^2 \alpha} = 0$$

$$25 - B \sin^2 \alpha = 25 - B \cos^2 \alpha$$

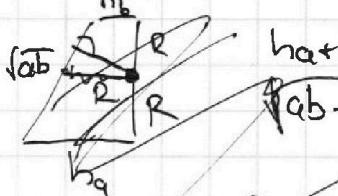
$$\sin^2 \alpha \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha = 0$$

$$\cos^2 \alpha = 0$$

$$\alpha = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi k}{2}$$



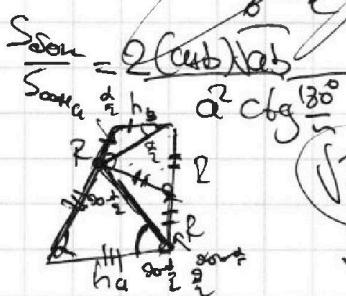
$$2R = h$$



$$h_a + h_b = 2R$$

$$h_{ab} - (h_a - h_b)^2 = 2R$$

$$h_a = \frac{a}{2} \cdot \operatorname{ctg} \frac{130^\circ}{h}$$



$$h_a^2 + h_b^2 = 2R^2$$

$$h_a^2 + h_b^2 + 2h_a h_b = ab - h_a^2 - h_b^2 + 2h_a h_b$$

$$2h_a^2 + 2h_b^2 = ab$$

$$t = \operatorname{tg} \frac{130^\circ}{h}$$

$$(a^2 + b^2) \operatorname{ctg} \frac{130^\circ}{h} = ab$$

$$k^2 + 1 = \frac{4}{h^2} ab$$

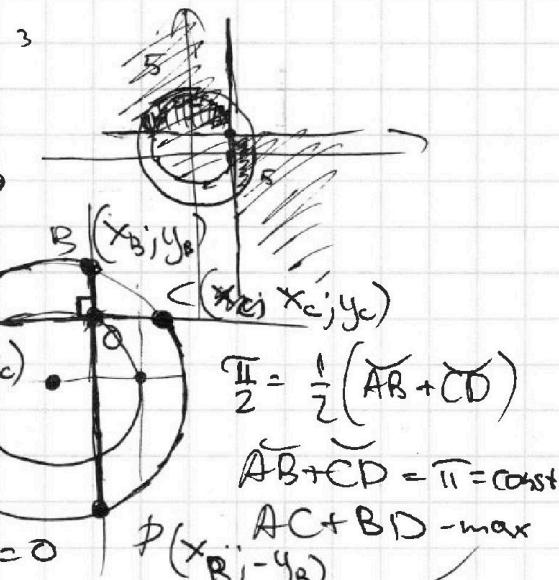
$$k^2 - 2k t + 1 = 0$$

$$k = t \pm \sqrt{t^2 - 1}$$

$$h = 2t^2 - t + \sqrt{}$$

$$4h^2 ab = a^2 + b^2 + 2ab$$

$$k^2 + 2(1 - k^2)k + 1 = 0$$



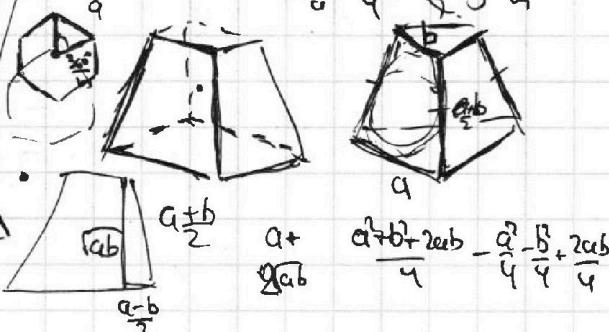
$$\frac{\pi}{2} = \frac{1}{2} (\overline{AB} + \overline{CD})$$

$$\overline{AB} + \overline{CD} = \pi = \text{const}$$

$$AC + BD - \max$$

$$S_{\text{ром}} = \frac{1}{2} (a+b) \cdot s_{\text{ром}}$$

$$S_{\text{ром}} = \frac{a^2}{4} \ln \left(\operatorname{ctg} \frac{130^\circ}{h} \right)$$



$$\frac{a^2 + b^2 + 2ab}{4} - \frac{a^2 - b^2}{4} + \frac{2ab}{4}$$

$$\frac{a^2 + b^2}{2} + ab$$

$$2h_a^2 + 2h_b^2 = ab$$

$$t = \operatorname{tg} \frac{130^\circ}{h}$$

$$(a^2 + b^2) \operatorname{ctg} \frac{130^\circ}{h} = ab$$

$$k^2 + 1 = \frac{4}{h^2} ab$$

$$k^2 - 2k t + 1 = 0$$

$$k = t \pm \sqrt{t^2 - 1}$$

$$h = 2t^2 - t + \sqrt{}$$