



МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

11 КЛАСС. Вариант 1



1. [3 балла] Найдите все тройки натуральных чисел $(A; B; C)$ такие, что:
- A — четырёхзначное число, составленное из одинаковых цифр,
 - B — трёхзначное число, хотя бы одна из цифр которого равна 2,
 - C — двузначное число, хотя бы одна из цифр которого равна 3,
 - произведение $A \cdot B \cdot C$ является квадратом некоторого натурального числа.
2. [3 балла] Положительные числа x и y таковы, что значение выражения $K = \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{2}{xy}$ не изменяется, если x уменьшить на 1, а y — увеличить на 1. Найдите все возможные значения выражения $M = x^3 - y^3 - 3xy$.
3. [5 баллов] а) Найдите все пары действительных чисел $(x; y)$ такие, что $(\sin \pi x + \sin \pi y) \sin \pi x = (\cos \pi x + \cos \pi y) \cos \pi x$.
- б) Сколько пар целых чисел (x, y) удовлетворяют одновременно этому уравнению и неравенству

$$\arcsin \frac{x}{5} + \arccos \frac{y}{4} < \frac{3\pi}{2}?$$

4. [4 балла] В начале месяца было выделено 4 билета на праздничный концерт, которые планировалось случайным образом распределить между одиннадцатиклассниками. В конце месяца выяснилось, что будет выделено больше 4 билетов. Одиннадцатиклассники Петя и Вася выяснили, что вероятность им обоим вместе попасть на концерт в начале месяца была в 2,5 раза меньше, чем оказалась в конце месяца. Сколько всего было выделено билетов на концерт в конце месяца, если количество одиннадцатиклассников не изменилось?
5. [5 баллов] Точка O — центр окружности ω_1 , описанной около остроугольного треугольника ABC . Окружность ω_2 , описанная около треугольника BOC , пересекает отрезок AB в точке P . Найдите площадь треугольника ABC , если $AP = \frac{15}{2}$, $BP = 5$, $AC = 9$.
6. [6 баллов] На координатной плоскости изображена фигура $\Phi(\alpha)$, состоящая из всех точек, координаты $(x; y)$ которых удовлетворяют системе неравенств

$$\begin{cases} (x - 3\sqrt{2} \sin \alpha)(y - 3\sqrt{2} \cos \alpha) \leq 0, \\ x^2 + y^2 \leq 25. \end{cases}$$

Найдите максимальное значение M периметра (длины границы) фигуры $\Phi(\alpha)$ и укажите все значения α , при которых оно достигается.

7. [6 баллов] Шар Ω касается всех рёбер правильной усечённой пирамиды, а шар ω касается всех её граней. Пусть сторона верхнего основания меньше, чем сторона нижнего. Найдите отношение площади боковой поверхности пирамиды к площади её нижнего основания.



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1	2	3	4	5	6	7
☒	☐	☐	☐	☐	☐	☐

СТРАНИЦА
1 из 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Пусть $A \cdot B \cdot C = n^2$. Заметим, что $A:1111$ ($1111 = 11 \cdot 101$) $\Rightarrow n:1111$

$n = 1111 \cdot k, k \in \mathbb{N}, A = 1111 \cdot a, a \in [1; 9], a \in \mathbb{Z}$

$$\underbrace{A \cdot B \cdot C}_{:1111} = 1111 \cdot k^2 \Rightarrow \underbrace{A \cdot B \cdot C}_{:1111} : 11$$

a не может делиться ни на 11, ни на 101 $11 \in P, 101 \in P$ простые

B не может делиться на 101

1) $C:11 \Rightarrow C=33$

$B:101 \Rightarrow B=202$

$a \cdot 6 = k^2$

$a=6 \Rightarrow \begin{matrix} A=6666 \\ B=202 \\ C=33 \end{matrix}$ - решения

$n=6666$

$C=33$

Ответ: $(6666; 202; 33)$

2) $B:1111$ - невозможно



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

1
☐

2
☒

3
☐

4
☐

5
☐

6
☐

7
☐

СТРАНИЦА
1 из 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{2}{xy} = \frac{1}{x-1} + \frac{1}{y+1} + \frac{2}{(x-1)(y+1)}, \quad x, y > 0 \quad x \neq 1$$

$$\frac{x+y+2}{xy} = \frac{y+1+x-1+2}{(x-1)(y+1)}$$

$$x+y+2 \neq 0 \quad (x, y > 0) \Rightarrow (x-1)(y+1) = xy$$

$$xy - y + x - 1 = xy$$

$$y = x - 1$$

$$M = x^3 - (x-1)^3 - 3x(x-1) = \underline{x^3} - \underline{x^3} + \underline{3x^2} - \underline{3x} + \underline{1} - \underline{3x^2} + \underline{3x} = 1$$

Ответ: 1



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

☐ ☐ ☒ ☐ ☐ ☐ ☐

СТРАНИЦА

1 из 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\begin{aligned}
 & a) (\sin \pi x + \sin \pi y) \sin \pi x = (\cos \pi x + \cos \pi y) \cos \pi x \\
 & 0 = (\cos^2 \pi x - \sin^2 \pi x) + (\cos \pi x \cos \pi y - \sin \pi x \sin \pi y) \\
 & \cos 2\pi x + \cos(\pi x + \pi y) = 0 \\
 & \cos 2\pi x = \cos(\pi x + \pi y + \pi) \\
 & \begin{cases} 2\pi x = \pi x + \pi y + \pi + 2\pi k \\ 2\pi x = -\pi x - \pi y - \pi + 2\pi n \end{cases}, k, n \in \mathbb{Z}
 \end{aligned}$$

$$\begin{cases} y = x - 1 + 2k \\ y = -3x - 1 + 2n \end{cases}$$

$$\begin{aligned}
 & b) \text{Условия: } x \in [-5; 5] \\
 & \quad y \in [-4; 4]
 \end{aligned}$$

$$\left. \begin{aligned} \arcsin \frac{x}{5} &\leq \frac{\pi}{2} \\ \arccos \frac{y}{4} &\leq \pi \end{aligned} \right\} \arcsin \frac{x}{5} + \arccos \frac{y}{4} \leq \frac{3\pi}{2} \text{ всегда}$$

Неравенство верно только в случае $\begin{cases} x=5 \\ y=-4 \end{cases}$ (равенство)

x	y (первое уравнение)	y (второе)	
5	4, 2, 0, -2, -4 (4)	-4, -2, 0, 2, 4	! Действительно, при $x \in \mathbb{Z}$ существуют $y = x - 1 + 2k$ $y = -3x - 1 + 2n$ задан один и тот же элемент $(x-1)$ и $(-3x-1)$ имеют одну четность
4	3, 1, -1, -3 (4)	-3, -1, 1, 3	
3	2, 4, 0, -2, -4 (5)		
2	1, 3, -1, -3 (4)		
1	0, 2, 4, -2, -4 (5)		
0	-1, 1, 3, -3 (4)		Всего $5 \cdot 5 + 4 \cdot 5 + 4 = 25 + 20 + 4 = 49$ решений
-1	-2, 0, 2, 4, -4 (5)		
-2	-3, -1, 1, 3 (4)		
-3	-4, -2, 0, 2, 4 (5)		
-4	-3, -1, 1, 3 (4)		
-5	-4, -2, 0, 2, 4 (5)		

Ответ: $a) (x; x-1+2k), x \in \mathbb{R}, k \in \mathbb{Z};$
 $(x; -3x-1+2n), x \in \mathbb{R}, n \in \mathbb{Z};$
 $b) 49$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☒	☐	☐	☐

СТРАНИЦА
1 из 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

- 1) Вероятность того, что оба попадут на концерт при наличии четырёх билетов; n - кол-во школьников.

$$P_1 = \frac{C_{n-2}^2}{C_n^4} \text{ (из } n \text{ школьников выбирают 4)}$$

$$P_1 = \frac{(n-2)! \cdot (n-4)! \cdot 4!}{n! \cdot (n-4)! \cdot 2!} = \frac{3 \cdot 4}{n(n-1)}$$

- 2) Аналогично для k билетов:

$$P_2 = \frac{C_{n-2}^{k-2}}{C_n^k} = \frac{(n-2)! \cdot (n-k)! \cdot k!}{n! \cdot (n-k)! \cdot (k-2)!} = \frac{k(k-1)}{n(n-1)} = 2,5 P_1$$

$$k(k-1) = 12 \cdot 2,5$$

$$k^2 - k - 30 = 0$$

$$k_1 = 6$$

$$k_2 = -5 - \text{невозможно}$$

Ответ: 6 билетов.



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи** отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☒ 6 ☐ 7 ☐

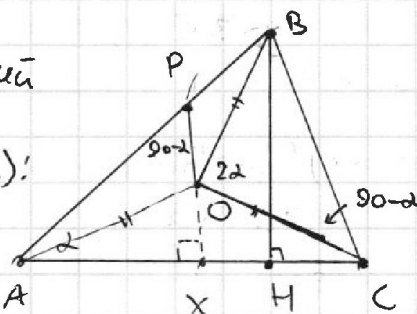
СТРАНИЦА
1 из 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\begin{aligned} AP &= \frac{15}{2} \quad \triangle ABC \quad \alpha = \angle BAC \\ BP &= 5 \quad \angle BAC = \frac{1}{2} \angle BOC \text{ как вписанный} \\ AC &= 9 \quad \angle BOC = \frac{1}{2} \angle BAC = 2\alpha \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} S_{\triangle ABC} &\rightarrow \triangle BOC \text{ равнобедренный (OB=OC):} \\ \angle OCB &= 180^\circ - \angle BOC = 90^\circ - \alpha \end{aligned}$$

угол при основании 2



• Углы вписанные $\angle BPO = 180^\circ - \angle BCO = 90^\circ + \alpha$

$$\angle APO = 180^\circ - \angle BPO = 90^\circ - \alpha \text{ как смежный}$$

$$\angle APO = 180^\circ - \angle BPO = 90^\circ - \alpha \text{ как смежный}$$

Пусть $PO \cap AC = X$

$$\angle AXP = 180^\circ - \alpha - (90^\circ - \alpha) = 90^\circ \Rightarrow PX \perp AC$$

• Пусть BH - высота $\triangle ABC \Rightarrow \angle AHB = 90^\circ$

$\triangle ABH \sim \triangle APX$ по двум углам (ср. углы, $\angle AXP = \angle AHB = 90^\circ$)

$$\frac{AB}{AP} = \frac{BH}{PX} \Rightarrow BH = PX \cdot \frac{15+5}{15} = PX \cdot \frac{25}{15} = \frac{5}{3} PX$$

• OX - высота в равнобедренном $\triangle AOC$ ($AO=OC$)

$$\text{Следовательно, } AX = \frac{AC}{2} = \frac{9}{2}$$

теорема Пифагора для $\triangle APX$:

$$PX = \sqrt{AP^2 - AX^2} = \sqrt{\frac{225}{4} - \frac{81}{4}} = \frac{1}{2} \sqrt{144} = \frac{12}{2} = 6$$

$$BH = \frac{5}{3} PX = \frac{5}{3} \cdot 6 = 10$$

$$S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} BH \cdot AC = \frac{1}{2} \cdot 10 \cdot 9 = 45$$

Ответ: 45.



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☒ 7 ☐

СТРАНИЦА

1 из 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\begin{cases} (x - 3\sqrt{2}\sin\alpha)(y - 3\sqrt{2}\cos\alpha) \leq 0 \\ x^2 + y^2 \leq 25 - \text{круг с центром } (0;0) \text{ и радиусом } 5 \end{cases}$$

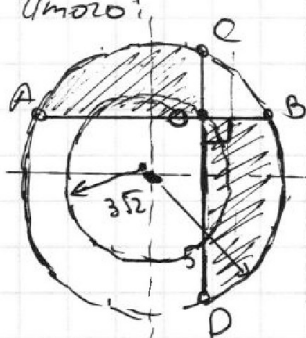
$$(x - 3\sqrt{2}\sin\alpha)(y - 3\sqrt{2}\cos\alpha) \leq 0$$

Прямые $x = 3\sqrt{2}\sin\alpha$ и $y = 3\sqrt{2}\cos\alpha$ разбивают плоскость на 4 части  - выбираются II и IV четверти

Точка O при этом имеет координаты $(3\sqrt{2}\sin\alpha; 3\sqrt{2}\cos\alpha) =$

$\Rightarrow$ лежит на окружности радиусом $3\sqrt{2}$ с центром в $(0;0)$

Итого:



Искомый периметр равен:

$$P = AB + CD + 5 \cdot \overset{\text{дуги}}{AC} + 5 \cdot \overset{\text{дуги}}{BD} \quad (\text{по ошибке замечено на P})$$

Заметим, что $\angle(AB, CD) = \frac{1}{2}(\overset{\text{дуги}}{AC} + \overset{\text{дуги}}{BD}) = \frac{\pi}{2}$

$$\overset{\text{дуги}}{AC} + \overset{\text{дуги}}{BD} = \pi$$

$$5 \overset{\text{дуги}}{AC} + 5 \overset{\text{дуги}}{BD} = 5\pi = \text{const где все } \alpha!$$

$$P \text{ max тогда, когда max}(AB + CD)$$

$$AB = 2x_B, \text{ при этом } y_B = 3\sqrt{2}\sin\alpha \Rightarrow x_B = +\sqrt{25 - 18\sin^2\alpha}$$

$$CD = 2y_C, \text{ при этом } x_C = 3\sqrt{2}\cos\alpha \Rightarrow y_C = +\sqrt{25 - 18\cos^2\alpha}$$

$$P(\alpha) = 2\sqrt{25 - 18\sin^2\alpha} + 2\sqrt{25 - 18\cos^2\alpha} + 5\pi$$

$$P'(\alpha) = \frac{2 \cdot (-18\sin\alpha\cos\alpha)}{2\sqrt{25 - 18\sin^2\alpha}} + \frac{2 \cdot (+18\cos\alpha\sin\alpha)}{2\sqrt{25 - 18\cos^2\alpha}}$$

$$P'(\alpha) = 3 \cdot 18 \sin\alpha \cos\alpha \cdot \frac{1}{\sqrt{25 - 18\sin^2\alpha} \sqrt{25 - 18\cos^2\alpha}} \cdot (\sqrt{25 - 18\sin^2\alpha} - \sqrt{25 - 18\cos^2\alpha})$$

$$P(\alpha) = 0 \text{ при}$$

$$\textcircled{1} \sin 2\alpha = 0$$

$$\alpha = \frac{\pi n}{2}, n \in \mathbb{Z}$$

$$\textcircled{2} 25 - 18\sin^2\alpha = 25 - 18\cos^2\alpha$$

$$\cos^2\alpha - \sin^2\alpha = 0 \quad \sin^2\alpha = \frac{1}{2}$$

$$\cos^2\alpha = \frac{1}{2}$$

$$P(\alpha) = 2\sqrt{25} + 2\sqrt{7} + 5\pi \text{ при } \alpha = \frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}, \frac{7\pi}{4}$$

$$P(\alpha) = 2\sqrt{7} + 2\sqrt{25} + 5\pi \text{ при } \alpha = \frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}, \frac{7\pi}{4}$$

$$P(\alpha) = 2\sqrt{7} + 10 + 5\pi \text{ при } \alpha = \frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}, \frac{7\pi}{4}$$

$$P_1 = 2\sqrt{7} + 10 + 5\pi$$

$$P(\alpha) = 2\sqrt{16} + 2\sqrt{16} + 5\pi$$

$$P(\alpha) = 16 + 5\pi$$

$$P_2 > P_1 \Rightarrow P_2 - \text{наибольшее}$$

$$P_2 = 16 + 5\pi$$

$$\text{значения } P(\alpha) \Rightarrow M = 16 + 5\pi$$

$$\alpha = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi k}{2}, k \in \mathbb{Z} - \text{точки максимума}$$

Ответ: $M = 16 + 5\pi$ при $\alpha = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi k}{2}, k \in \mathbb{Z}$.



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☒

СТРАНИЦА

1 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Пусть a - сторона нижнего основания, b - сторона верхнего

• Грань пирамиды - равнобедренная трапеция.

Она шар Ω касается всех её сторон $\Rightarrow$ трапеция описанная

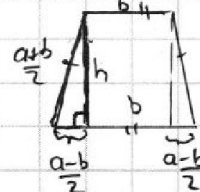
Её боковые стороны равны $a+b$

Высота h трапеции находится из теоремы

Пифагора:

$$h^2 = (a+b)^2 - (a-b)^2 = \frac{4ab}{4} = ab$$

$$h = \sqrt{ab}$$



• Шар Ω касается оснований $\Rightarrow$ его центр лежит на середине высоты пирамиды

Из симметрии, эта высота соединяет центры оснований O_A и O_B

Пусть A и B - середины сторон оснований, лежащих в одной боковой

$O_A A \perp O_B B \perp$ этим сторонам.

AB - ось симметрии боковой грани $\Rightarrow AB$ - высота трапеции.

Пусть H - основание перпендикуляра, опущенного из O на AB .

$OH \perp AB$

$\left. \begin{array}{l} \ell \perp O_A A \\ \ell \perp AB \end{array} \right\} \ell \perp (AO_A O_B) \Rightarrow OH \perp \ell$

$\left. \begin{array}{l} OH \perp \text{боковой грани} \\ \text{радиус } \omega, \text{ проведенный в точку касания.} \end{array} \right\}$

$$OH = OO_A = OO_B = R$$

$\triangle HOA$ равнобедренный

$$\angle HOA = \angle OAH$$

$$\angle AHO = 90^\circ - \angle HOA$$

$$\angle AOH = 90^\circ - \angle OAH$$

Следовательно, $\angle AHO = \angle AOH \Rightarrow AH = AO_A$

Аналогично $BH = BO_B$

$$h = AB = AO_A + BO_B$$

$AO_A = r$ - радиус вписанной в нижнее основание окружности

$BO_B = \frac{br}{a}$ из подобия оснований

Тогда

$$\sqrt{ab} = (a+b)r \Rightarrow r = \frac{a\sqrt{ab}}{a+b}, r = \frac{a}{2} \cot \frac{120^\circ}{n}, n - \text{число вершин основания.}$$

$$\cot \frac{120^\circ}{n} = \frac{\sqrt{ab}}{a+b} < 1$$

$$\frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{2\sqrt{ab}}{a+b}$$

$$\Rightarrow a^2 + b^2 + 2ab = 12ab$$

($a \neq b$)
по усл.

$$\frac{120^\circ}{n} > 45^\circ$$

$$h < 4 \Rightarrow h = 3$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☒

СТРАНИЦА

2 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$a^2 - 10ab + b^2 = 0, \text{ пусть } \frac{a}{b} = k, k > 1$$

$$k^2 - 10k + 1 = 0$$

$$(k_1 = 5 + \sqrt{24}) \Rightarrow k = 5 + \sqrt{24}$$

$$k_2 = 5 - \sqrt{24} < 1$$

$$S_{\text{бок}} = n \cdot \frac{1}{2} \sqrt{ab} \cdot (a+b)$$

$$S_{\text{осн}} = \frac{n \cdot ar}{2} = \frac{n a^2 \sqrt{ab}}{2(a+b)}$$

$$\frac{S_{\text{бок}}}{S_{\text{осн}}} = \frac{(a+b)^2}{a^2} = \left(1 + \frac{1}{k}\right)^2 = \left(1 + \frac{1}{5 + \sqrt{24}}\right)^2 = (6 - \sqrt{24})^2$$

$$\frac{S_{\text{бок}}}{S_{\text{осн}}} = 36 + 24 - 12\sqrt{24} = 60 - 12\sqrt{24} = 60 - 24\sqrt{6}$$

$$\text{Ответ: } 60 - 24\sqrt{6}$$

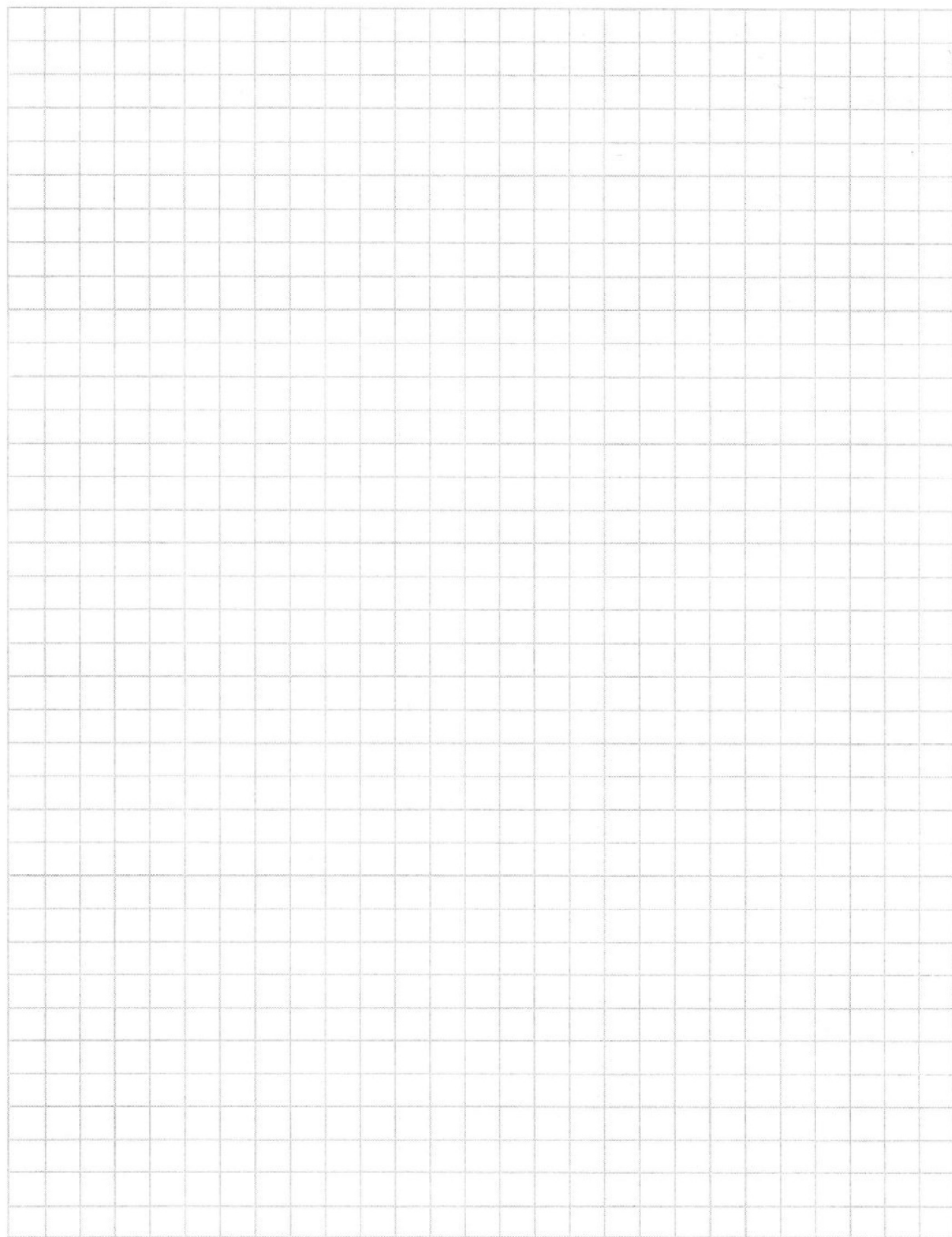


На одной странице можно оформлять **только одну задачу**. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!





На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\frac{S_{\text{пол}}}{S_{\text{сеч}}} = \frac{2(a+b)\sqrt{ab}h}{\pi r_a r_b} = \frac{(a+b)\sqrt{ab} \cdot (a+b)}{a^2 \sqrt{ab}} = \frac{(a+b)^2}{a^2} = \left(\frac{k+1}{k}\right)^2 = \left(1 + \frac{1}{k}\right)^2 = \left(1 + \frac{1}{\sqrt{5}}\right)^2 = \left(\frac{\sqrt{5}+1}{\sqrt{5}}\right)^2 = \frac{(\sqrt{5}+1)^2}{5} = \frac{5+2\sqrt{5}+1}{5} = \frac{6+2\sqrt{5}}{5}$$
$$\sqrt{ab} = r_a + \frac{b r_a}{a}$$
$$r_a = \frac{a+ab}{a+b} \Rightarrow \text{ctg } \frac{180}{n} = \frac{2\sqrt{ab}}{a+b} < 1$$
$$\frac{a}{2} \text{ ctg } \frac{180}{n} = \frac{1}{\sqrt{5}} = \frac{2\sqrt{ab}}{a+b} \Rightarrow (a+b)^2 = 8ab$$
$$\arcsin \frac{x}{5} + \arccos \frac{y}{4} < \frac{3\pi}{2}$$
$$y = x - 1 + 2k \leq \frac{\pi}{2}$$
$$\arcsin \frac{x}{5} + \arccos \frac{x-1+2k}{4} < \frac{3\pi}{2}$$
$$\begin{matrix} 5 \\ 4 \\ 3 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \\ -2 \\ -3 \\ -4 \\ -5 \end{matrix} \quad \begin{matrix} x-1 \\ -3x-1 \\ -6 \\ -4 \\ -2 \\ 0 \\ 2 \\ 4 \end{matrix} \quad \begin{matrix} -1/6 \\ -2x-2 \end{matrix}$$
$$x = 5$$
$$5+2k=0 \Rightarrow k=-2.5$$
$$x \in [-5; 5]$$
$$-4 \leq x-1+2k \leq 4$$
$$-3 \leq x+2k \leq 5$$
$$k^2 - 10k + 1 = 0$$
$$k = 5 \pm \sqrt{24}$$
$$\frac{1}{k} = 5 \pm \sqrt{24}$$
$$k = -4$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

1 2 3 4 5 6 7

☐ ☐ ☐ ☐ ☐ ☐ ☐

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

① $A = \overline{acacac} = a \cdot 1111$ $A \cdot B \cdot C = n^2$ $n^2 = 11$ $n = 11$ $n^2 = 121$ $10\sqrt{8}$

$B = \overline{bcd}$ 2 $a \cdot B \cdot C = 1111 \cdot k^2$ 1111 30

$C = \overline{ef}$ 3 $9 \ 992 \ 99$ 837 12976 820304 $k^2 \leq 800$ $k \leq 30$

$a(1111 \cdot a \cdot 1111)$ $11 = 11 \cdot 101$

$a \cdot B \cdot C = 1111 \cdot k^2$ 101 202 909

1) $C : 11 \Rightarrow C = 33$ $B : 101 \Rightarrow B = 202$

$6666 - a = 1111 \cdot k^2$ 6666 33 202 $a = 6$

② $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{2}{xy} = \frac{1}{x-1} + \frac{1}{y+1} + \frac{2}{(x-1)(y+1)}$ $2 + x + y = y + 1 + x - 1 + 2$ $2xy = y + x + 2$ $\Rightarrow xy = x + y + 1$ $y = x - 1$

$u = x^3 - (x-1)^3 - 3x(x-1) = x^3 - x^3 + 3x^2 - 3x + 1 - 3x^2 + 3x = 1$

③ $(\sin \pi x + \sin \pi y) \sin \pi x = (\cos \pi x + \cos \pi y) \cos \pi x$ $(\sin a + \sin b) \sin a = (\cos a + \cos b) \cos a$ $\sin^2 a + \sin b \sin a = \cos^2 a + \cos b \cos a$ $0 = \cos 2a + \cos(a+b)$ $\cos 2a = \cos(a+b+\pi)$ $2a = a+b+\pi + 2\pi n$ $2a = (a+b+\pi) + 2\pi k$

$\arcsin \frac{x}{5} + \arccos \frac{y}{4} \leq \frac{3\pi}{2}$ $\arcsin \frac{x}{5} \geq \arccos \frac{y}{4} - \frac{3\pi}{2}$ $x \in [-5; 5]$ 3600 2 4 $10 + 2\sqrt{7}$ 6 $2\sqrt{7}$ 16 $\sqrt{36} > \sqrt{28}$

$x = y + 1 + 2n$ $3x = -y - 1 + 2k$ $y = x - (1 + 2n)$ $y = 2k - 1 - 3x$ $\sin^2 2 = \cos^2 2$ $6y^2 = 1$ 4 8 16 $\sqrt{36} > \sqrt{28}$

$\frac{a\sqrt{3}}{2\sqrt{3}} = \frac{a}{2}$ $\frac{a\sqrt{3}}{2\sqrt{3}} = \frac{a}{2}$

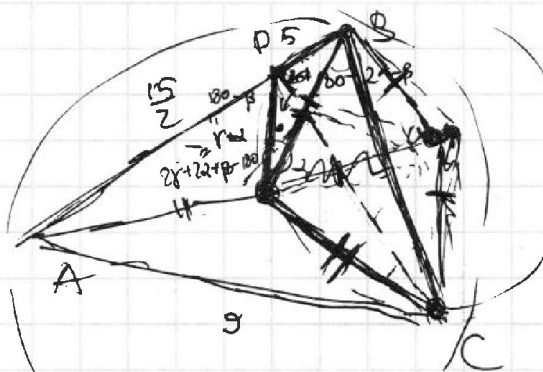


На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

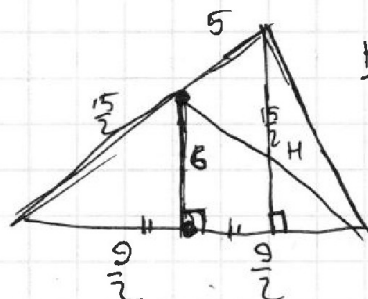
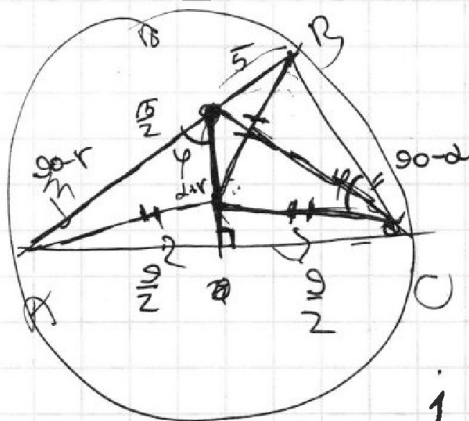


$$\frac{\sin \beta}{\sin(2\alpha + \beta)} = \frac{3}{2}$$

$$2 \sin \beta = 3 \sin(2\alpha + \beta)$$

$$BR + OD \cdot CR = R \cdot CD$$

$$225 - 8p = 144$$



$$\frac{H}{6} = \frac{25}{15} = \frac{5}{3}$$

$$H = 10$$

$$\frac{9 \cdot 10}{2} = 45$$

$$1 \cdot \frac{C_9^2}{C_4^{11}} = \frac{\frac{9!}{2! \cdot 7!}}{\frac{11!}{4! \cdot 7!}} = \frac{4 \cdot 3}{11 \cdot 10}$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$⑥ (x-3\sqrt{2}\sin\alpha)(y-3\sqrt{2}\cos\alpha) \leq 0$$

$$x^2 + y^2 \leq 25$$

$$y_c = 3\sqrt{2}\cos\alpha$$

$$AC = 2x_c$$

$$BD = 2y_c$$

$$x+y_B \text{ max}$$

$$\sqrt{25-18\cos^2\alpha} + \sqrt{25-18\sin^2\alpha}$$

$$\frac{18\cos\alpha\sin\alpha}{\sqrt{25-18\cos^2\alpha}}$$

$$\frac{+36\cos\alpha\sin\alpha - 18\sin\alpha\cos\alpha}{\sqrt{25-18\sin^2\alpha}} = 0$$

$$\sin 2\alpha = 0 \Rightarrow \alpha = \frac{\pi}{2}$$

$$\sqrt{25-18\sin^2\alpha} - \sqrt{25-18\cos^2\alpha} = 0$$

$$25-18\sin^2\alpha = 25-18\cos^2\alpha$$

$$\sin^2\alpha \cos^2\alpha - \sin^2\alpha = 0$$

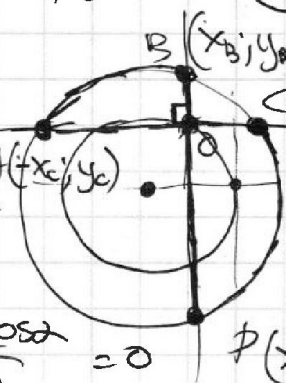
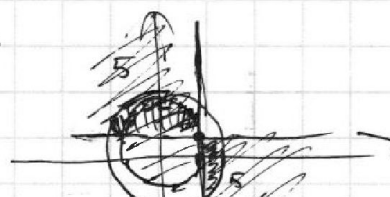
$$\cos 2\alpha = 0$$

$$\alpha = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi k}{2}$$

3

$$3\sqrt{2} = \sqrt{18}$$

4, 9



$$\frac{\pi}{2} = \frac{1}{2}(\overline{AB} + \overline{CD})$$

$$\overline{AB} + \overline{CD} = \pi = \text{const}$$

$$AC + BD = \text{max}$$

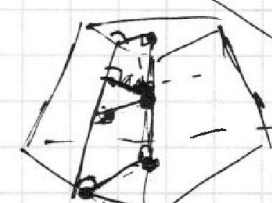
$$p(x_B, y_B)$$

$$S_{\text{max}} = \frac{1}{2}(a+b) \cdot \sqrt{ab} \sin \alpha$$

$$S_{\text{max}} = \frac{a^2}{4} \sin \left(\text{ctg} \frac{130^\circ}{4} \right)$$



$$\frac{a^2 + b^2 + 2ab}{4} = \frac{a^2}{4} + \frac{b^2}{4} + \frac{2ab}{4}$$



$$2R = h$$

$$h_a + h_b = 2R$$

$$ab - (h_a - h_b)^2 = 2R$$

$$h_a = \frac{a}{2} \cdot \text{ctg} \frac{130^\circ}{4}$$

$$\frac{a}{2} = k$$

$$k^2 + 1 = \frac{3}{2} \cdot \frac{1}{k}$$

$$k^2 - 2kb + 1 = 0$$

$$k = \frac{1}{2} \pm \sqrt{1 - 2b}$$

$$\sqrt{ab} = h_a + h_b$$

$$\sqrt{ab} = \frac{a}{2k} + \frac{b}{2k}$$

$$4\sqrt{ab} = a^2 + b^2 + 2ab$$

$$k^2 + 2(1 - 2b)k + 1 = 0$$

$$k = t + \sqrt{t^2 - 1}$$

$$k = 2t^2 - 1 + \sqrt{t^2 - 1}$$

