



МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ



11 КЛАСС. Вариант 11

- [3 балла] Дан приведённый квадратный трёхчлен $f(x)$ такой, что уравнение $f(x) = 2x^2$ имеет единственное решение, а также уравнение $f(x) = -8$ имеет единственное решение. Найдите сумму корней уравнения $f(x) = 0$.
- [3 балла] Сколькими способами можно представить число $n = 2^{401} \cdot 3^{500}$ в виде произведения двух натуральных чисел x и y , где y делится на x ?
- [5 баллов] Найдите количество пар целых чисел $(x; y)$, удовлетворяющих системе

$$\begin{cases} \log_x 2 + 3 \log_y 8 + 4 \log_{xy} \frac{1}{16} = 0, \\ \frac{x-1}{x+1} > \frac{3y-3}{7y+7}, \\ x \leq 31. \end{cases}$$

- [5 баллов] Найдите все пары натуральных чисел $(a; b)$ такие, что

$$\begin{cases} 4 \cdot \min(a; b) = 3(a-b)^2, \\ 3 \cdot \max(a; b) = \text{НОК}(a; b). \end{cases}$$

- [5 баллов] На сторонах BA и BC треугольника ABC с тупым углом B как на диаметрах построены окружности ω_1 и ω_2 соответственно, пересекающиеся в точках B и D . Хорда BE окружности ω_1 перпендикулярна BC , а хорда BF окружности ω_2 перпендикулярна CE и касается ω_1 . Найдите отношение $BF : BD$, если $\cos \angle BCE = \frac{3}{5}$.
- [5 баллов] При каких значениях параметра a система

$$\begin{cases} (y - x^2 - x - 1)(x^2 - 3xy + 4y^2)(y + x - 1) = 0, \\ y = (2a + 1)x - a^2 + 1 \end{cases}$$

имеет ровно 2 решения?

- [6 баллов] В прямую четырёхугольную призму $ABCDA_1B_1C_1D_1$ вписана сфера ω . Луч с началом в точке A пересекает ω точках P и Q , а луч с началом в точке C пересекает ω в точках M и N . Пусть O — точка пересечения диагоналей четырёхугольника $ABCD$. Найдите объём призмы $ABCDA_1B_1C_1D_1$ и расстояние ρ от центра ω до плоскости PAC , если известно, что $AO = 1$, $BO = 2$, $CO = 4$, $AP = \frac{\sqrt{5}}{3}$, $AQ = \frac{5\sqrt{5}}{3}$, $CM = \frac{10\sqrt{5}}{9}$, $CN = 2\sqrt{5}$.



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1

2

3

4

5

6

7

СТРАНИЦА
1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

① По условию $x^2 + px + q = f(x)$, и надо найти сумму его корней (p).

$$x^2 + px + q = 2x^2 \Rightarrow -x^2 + px + q = -(x^2 - px - q) = 0 - \text{ имеет одно решение, тогда}$$

$$x^2 - px - q = \text{нашій квадрат} \Rightarrow -q = \frac{p^2}{4}$$

$$\text{Аналогично } x^2 + px + q = -8 \Rightarrow x^2 + px + q + 8 = 0 - \text{нашій квадрат} \Rightarrow q + 8 = \frac{p^2}{4}$$

$$\text{Суммируем полученные равенства: } \frac{1}{4} p^2 = 8, \text{ т.е. } p = \pm 4; q = -4.$$

$$\text{Проверка } p \text{ и } q: x^2 \pm 4x - 4 = 2x^2 \Rightarrow -x^2 \pm 4x - 4 = -(x^2 \mp 4x + 4) = -(x \mp 2)^2 = 0$$

$$x^2 \pm 4x - 4 = -8 \Rightarrow x^2 \pm 4x + 4 = (x \pm 2)^2 = 0$$

Таким образом одно из значений p уравнения действительно именем по одному корню \Rightarrow оба значения 4 и -4 являются для p . Тогда значение где сумма корней уравнения $f(x) = 0$: 4 и -4.

Ответ:

$$4; -4$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1

2

3

4

5

6

7

СТРАНИЦА

1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

(2)

$$n = 2^{401} \cdot 3^{500} = x \cdot y; y : x.$$

Очевидно, что числа x и y имеют вид $x = 2^{\alpha_1} \cdot 3^{\beta_1}$ и $y = 2^{\alpha_2} \cdot 3^{\beta_2}$, причём $\alpha_1, \beta_1, \alpha_2, \beta_2$ — неотрицательные целые числа. Тогда $\alpha_2 \geq \alpha_1, \beta_2 \geq \beta_1, (y : x), \alpha_1 + \alpha_2 = 401, \beta_1 + \beta_2 = 500$.

Отсюда $\alpha_2 \geq \frac{401}{2}, \beta_2 \geq \frac{500}{2} \Rightarrow \alpha_2 \geq 201, \beta_2 \geq 250$. Заметим, что α_1 и β_1 однозначно определяются через α_2 и β_2 соответственно, но α_1 и β_1 недавно были. Т.к. $401 - \alpha_2 \geq 201$ и $500 - \beta_2 \geq 250$, то есть α_1 и β_1 равно 201 и 251 соответственно; а общее количество способов выбрать

~~$$x \text{ и } y - \text{ равно } 201 \cdot 251 = 50451$$~~

Ответ: 50451

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.



- | | | | | | | |
|----------------------------|----------------------------|---------------------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|
| <input type="checkbox"/> 1 | <input type="checkbox"/> 2 | <input checked="" type="checkbox"/> 3 | <input type="checkbox"/> 4 | <input type="checkbox"/> 5 | <input type="checkbox"/> 6 | <input type="checkbox"/> 7 |
|----------------------------|----------------------------|---------------------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|

СТРАНИЦА
1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по **каждой из задач** нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

(3) Уравнение логарифм должно быть позитивное число, т.е. $x > 0$ и $y > 0$, а также $x \neq 1$ и $y \neq 1$.

$$0 = \log_x 2 + 3 \log_8 8 + 4 \log_{xy} \frac{1}{16} = \frac{1}{\log_2 x} + \frac{3}{\log_2 y} + \frac{4}{\log_{xy} 16} = \frac{1}{\log_2 x} + \frac{9}{\log_2 y} - \frac{16}{\log_2 xy}$$

Заменим $a = \log_2 x$, $b = \log_2 y$, $\log_2 xy = \log_2 x + \log_2 y = a+b$

$$0 = \frac{1}{a} + \frac{9}{b} - \frac{16}{a+b} \Leftrightarrow \frac{9a+b}{ab} = \frac{16}{a+b} \Leftrightarrow (9a+b)(a+b) = 16ab \Leftrightarrow 9a^2 + b^2 - 6ab = 0 \Leftrightarrow (3a-b)^2 = 0 \Leftrightarrow$$

$\Leftrightarrow 3a = b$, т.е. $3 \log_2 x = \log_2 y$, откуда $x^3 = y$.

Общая система:

$$\begin{cases} \frac{x-1}{x+1} > \frac{3-x^3-3}{7 \cdot x^3 + 7} \\ x \leq 31, x > 1 \end{cases} \quad (x > 1, \text{т.к. } x-\text{число}, x > 0, x \neq 1)$$

$$\frac{x-1}{x+1} > \frac{3}{7} \cdot \frac{x^3-1}{x^2+1} = \frac{3}{7} \cdot \frac{x-1}{x+1} \cdot \frac{x^2+x+1}{x^2-1}; \text{ т.к. } x > 1, \frac{x-1}{x+1} > 0, \text{ поэтому } \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 1 > \frac{3}{7} \cdot \frac{x^2+x+1}{x^2-1} \Leftrightarrow 7(x^2-x-1) > 3(x^2+x+1), \text{ т.к. } x^2-x-1 > 0 \text{ при } x > 1$$

Вспомог $4x^2-10x+4=2(2x-1)(x-2) > 0$ — неравенство решено при $x > 2$.

$2 < x \leq 31$ — отсюда каскадные значения $x = 29$, а y однозначно выражается через x .

Ответ: 29.



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

1

2

3

4

5

6

7

СТРАНИЦА

1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по **каждой из задач** нумеруются **отдельно**. Порча QR-кода недопустима!

⑨ при каких неравенствах a и b , система не имеет решений. Пусть $a > b$ ($a \neq b$, т.к. $\text{HOD}(a; b) > 0$)

тогда система:

$$\begin{cases} 4b = 3(a-b)^2 \\ 3a = \text{НОК}(a; b) \end{cases}$$

$$\text{НОК}(a; b) = \frac{ab}{\text{HOD}(a; b)} \Rightarrow 3a = \frac{ab}{\text{HOD}(a; b)} \Rightarrow b = 3\text{HOD}(a; b)$$

$$4b = 3(a-b)^2 = 12\text{HOD}(a; b) \Rightarrow (a-b)^2 = 4\text{HOD}(a; b).$$

Но $a-b$: $\text{HOD}(a; b)$, потому $a-b = k \cdot \text{HOD}(a; b)$. Тогда получим:

$$k^2 \cdot \text{HOD}(a; b) = 4 \Rightarrow \begin{cases} k=1, \text{HOD}(a; b)=4 \\ k=2, \text{HOD}(a; b)=1 \end{cases}$$

если $k=1$:

$$a-b=4, \text{HOD}(a; b)=4 \Rightarrow b=3 \cdot 4=12, a=b+4=16.$$

если $k=2$:

$$a-b=2, \text{HOD}(a; b)=1 \Rightarrow b=3 \cdot 1=3, a=b+2=5.$$

Проверка: $\begin{cases} 4 \cdot 12 = 3 \cdot (16-12)^2 \\ 3 \cdot 16 = \text{НОК}(12; 16) = 48 \end{cases}$

- Верно

$$\begin{cases} 4 \cdot 3 = 3 \cdot (5-3)^2 \\ 3 \cdot 5 = \text{НОК}(5; 3) = 15 \end{cases}$$

- Верно

Ответ: $(3; 5), (5; 3), (12; 16), (16; 12)$

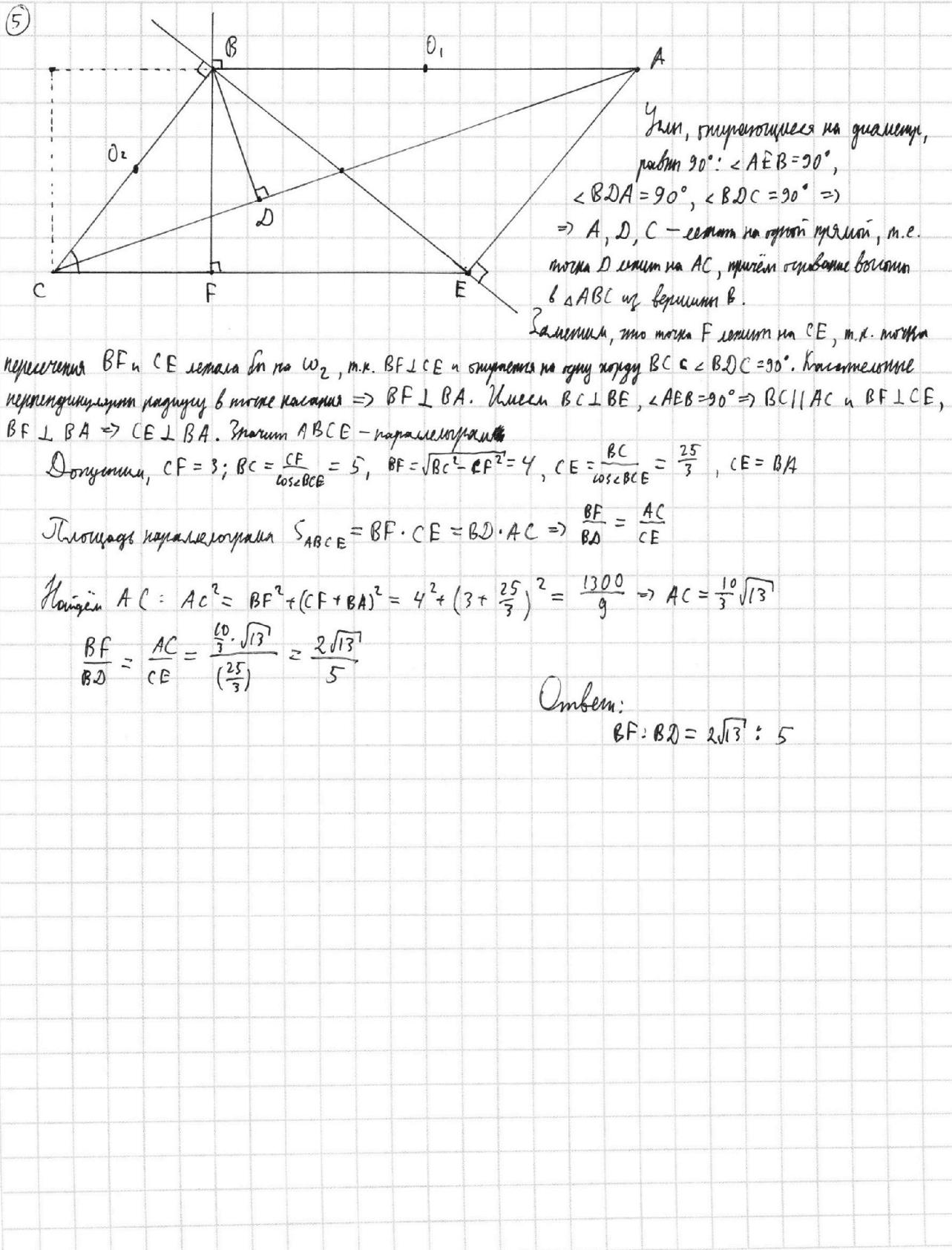
На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.



- | | | | | | | |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|
| <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|

СТРАНИЦА
1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.



- | | | | | | | |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|
| <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|

СТРАНИЦА
1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по **каждой из задач** нумеруются **отдельно**. Порча QR-кода недопустима!

⑥ Уравнение $x^2 - 3xy + 4y^2 = 0$ имеет только одно решение $x=0$ и $y=0$:

$$x^2 - 3xy + 4y^2 = (x - \frac{3}{2}y)^2 + \frac{7}{4}y^2 = 0 \Rightarrow \frac{7}{4}y^2 = 0 \text{ и } (x - \frac{3}{2}y)^2 = 0.$$

$$(y^2 - x^2 - x - 1) = (2a+1)x - a^2 + 1 - x^2 - x - 1 = -x^2 + 2a - a^2 = -(x-a)^2$$

$$(y^2 - x^2 - x - 1) = (2a+1)x - a^2 + 1 - x^2 - x - 1 = x(2a+2) - a^2$$

Система:

$$\begin{cases} -(x-a)^2 \cdot ((2a+2)x - a^2) \cdot (x^2 - 3xy + 4y^2) = 0 \\ y = (2a+1)x - a^2 + 1 \end{cases}$$

При $a = -\frac{1}{2}$, y не зависит от x — получим $y = \frac{3}{4}$. Тогда $x^2 - 3xy + 4y^2 \neq 0$, а система имеет два решения

$$x = a \text{ и } x = \frac{-a^2}{2a+2}, y = \frac{3}{4}.$$

При $a \neq \pm 1$ x и y не могут быть равны нулю одновременно; система имеет есть два решения:

$$x_1 = a \text{ и } x_2 = \frac{a^2}{2a+2}, y \text{ определяется однозначно } \text{[затем] при } x_1 \text{ и } x_2. \text{ Но } x_1 \text{ и } x_2 \text{ не являются}$$

$$\text{однозначно: } a \neq \frac{a^2}{2a+2} \Rightarrow a \neq -2, a \neq 0.$$

При $a = 1$ система имеет одно решение: $x_1 = a$, $x_2 = \frac{a^2}{2a+2}$, $x_3 = 0$, y может принимать ~~одинаковые~~ \neq значения не подходит.

При $a = 0$ система: $\begin{cases} -x^2 \cdot (x^2 - 3xy + 4y^2) = 0 \\ y = x+1 \end{cases}$ имеет ровно 1 решение $x=0, y=1$, т.к. x и y не могут одновременно быть равны нулю.

При $a = -2$ система имеет ровно одно решение $x = a$, $y = (2a+1)x - a^2 + 1$, т.к. x и y не могут одновременно быть равны нулю.

При $a = -1$ система $\begin{cases} -(x+1)^2 \cdot (-1) \cdot (x^2 - 3xy + 4y^2) = 0 \\ y = -x \end{cases}$ имеет одно решение $x = -1, y = 1$ и $x_2 = 0, y_2 = 0$

При этом мы не подходим $a = 1, a = 0, a = -2$, т.к. все остальные значения системы имеют 2 решения.

Ответ:

$$a \in (-\infty; -2) \cup (-2; 0) \cup (0; 1) \cup (1; +\infty)$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

1

2

3

4

5

6

7

СТРАНИЦА
ИЗ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по **каждой из задач** **нумеруются отдельно**. Порча QR-кода недопустима!

$$\left\{ \begin{array}{l} 3 \max(a; b) = \text{НОК}(a; b) \\ 4 \min(a; b) = 3(a - b)^2 \end{array} \right.$$

$a \leftarrow b$, т.к. $a \geq b$, $a > b$

$$3a = \text{НОК}(a; b) = \frac{ab}{\text{НОД}(a; b)} \rightarrow b = 3 \text{НОД}(a; b)$$

$$4b = 3(a - b)^2$$

$$\cancel{4b} = 4 \cdot \cancel{b} \text{НОД}(a; b)$$

$$(a - b)^2 = 4 \text{НОД}(a; b)$$

~~(a - b)² = 4 НОД(a; b)~~

$$a - b = k \text{НОД}(a; b)$$

$$k^2 \text{НОД}(a; b) = 4$$



$$k = 1, \text{НОД} = 4 \Rightarrow a - b = 4$$

$$k = 2, \text{НОД} = 1 \Rightarrow a - b = 2$$

$$\cancel{\text{НОД}} = 0$$

$$3a = ab$$

$$4b = 3 \cdot 2^2$$

$$b = 3, a = 5.$$

$$3 = \frac{b}{4} \Rightarrow b = 12$$

$$a = 16$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

1

2

3

4

5

6

7

СТРАНИЦА
_ из _

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. **Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно.** Порча QR-кода недопустима!

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.



- | | | | | | | |
|---------------------------------------|---------------------------------------|---------------------------------------|---------------------------------------|---------------------------------------|---------------------------------------|---------------------------------------|
| <input checked="" type="checkbox"/> 1 | <input checked="" type="checkbox"/> 2 | <input checked="" type="checkbox"/> 3 | <input checked="" type="checkbox"/> 4 | <input checked="" type="checkbox"/> 5 | <input checked="" type="checkbox"/> 6 | <input checked="" type="checkbox"/> 7 |
|---------------------------------------|---------------------------------------|---------------------------------------|---------------------------------------|---------------------------------------|---------------------------------------|---------------------------------------|

СТРАНИЦА
ИЗ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. **Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно.** Порча QR-кода недопустима!

$$\frac{x-1}{x+1} > \frac{3x^3 - 3}{7x^3 + 7} = \frac{3}{7} \left(\frac{x^2 - 1}{x^3 + 1} \right) = \frac{3}{7} \cdot \frac{x-1}{x+1} \cdot \frac{x^2 + x + 1}{x^2 - x + 1}$$

$$a^3 - b^3 = (a-b)(a^2 + ab + b^2) \quad 7(x^2 - x + 1) > 3(x^2 + x + 1)$$

$$a^3 + b^3 = (a+b)(a^2 - ab + b^2) \quad 4x^2 - 10x + 4 > 0$$

$$2x^2 - 5x + 2 > 0$$

$$3 \leq x \leq 31$$

$$31 - 3 + 1 = 29$$

$$\frac{5}{2-2} = \frac{5}{0} \quad (x-1)(x-2) = 2x^2 - 5x + 2$$

$$8 - 10 + 2$$

$$(2a+1)x - a^2 + 1 - x^2 - x - 1 = -x^2 + 2a - a^2 = -(x-a)^2$$

$$2a+1 - 1 = 2a$$

$$-a^2 + 1 - 1 = -a^2$$

$$(2a+1)x - a^2 + 1 - x^2 - x - 1 = x(2a+2) - a^2$$

$$a \neq -\frac{1}{2}$$

$$-(x-a)^2(x(2a+2)-a^2)(x^2 - 3xy + 4y^2) = 0$$

$$x^2 - 3xy + 4y^2 = x^2 - 3(2a+1)x^2 + 3a^2x - 3x + 4(2a+1)^2x^2 + (a^2+1)^2 - 2(a^2+1)(2a+1)x$$

$$y^2 = ((2a+1)x - (a^2+1))^2 = (a+1)^2x^2 + (a+1)^2 - 2(a^2+1)(2a+1)x$$

$$xy = (2a+1)x^2 - a^2x + x$$

$$a = -\frac{1}{2}$$

$$-x^2 - y - \frac{1}{4}$$

$$-2x - 4$$

$$y = \frac{3}{4}$$

$$a = \frac{a^2}{2a+2}$$

$$x = -2$$

$$\frac{3}{4} - x^2 - x - 1 = -x^2 - x + \frac{1}{4} \cancel{+}$$

$$2a^2 + 2a = a^2 \quad x+1$$

$$D = 1 + 4 \cdot (-1) \cdot \frac{1}{4} = 2$$

$$a + 2 = 0$$

$$x = \frac{1 \pm \sqrt{2}}{2 \cdot (-1)} = \frac{-1 \pm \sqrt{2}}{2}$$

$$a = -2$$

$$3 \cdot 4^2$$

На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1

2

3

4

5

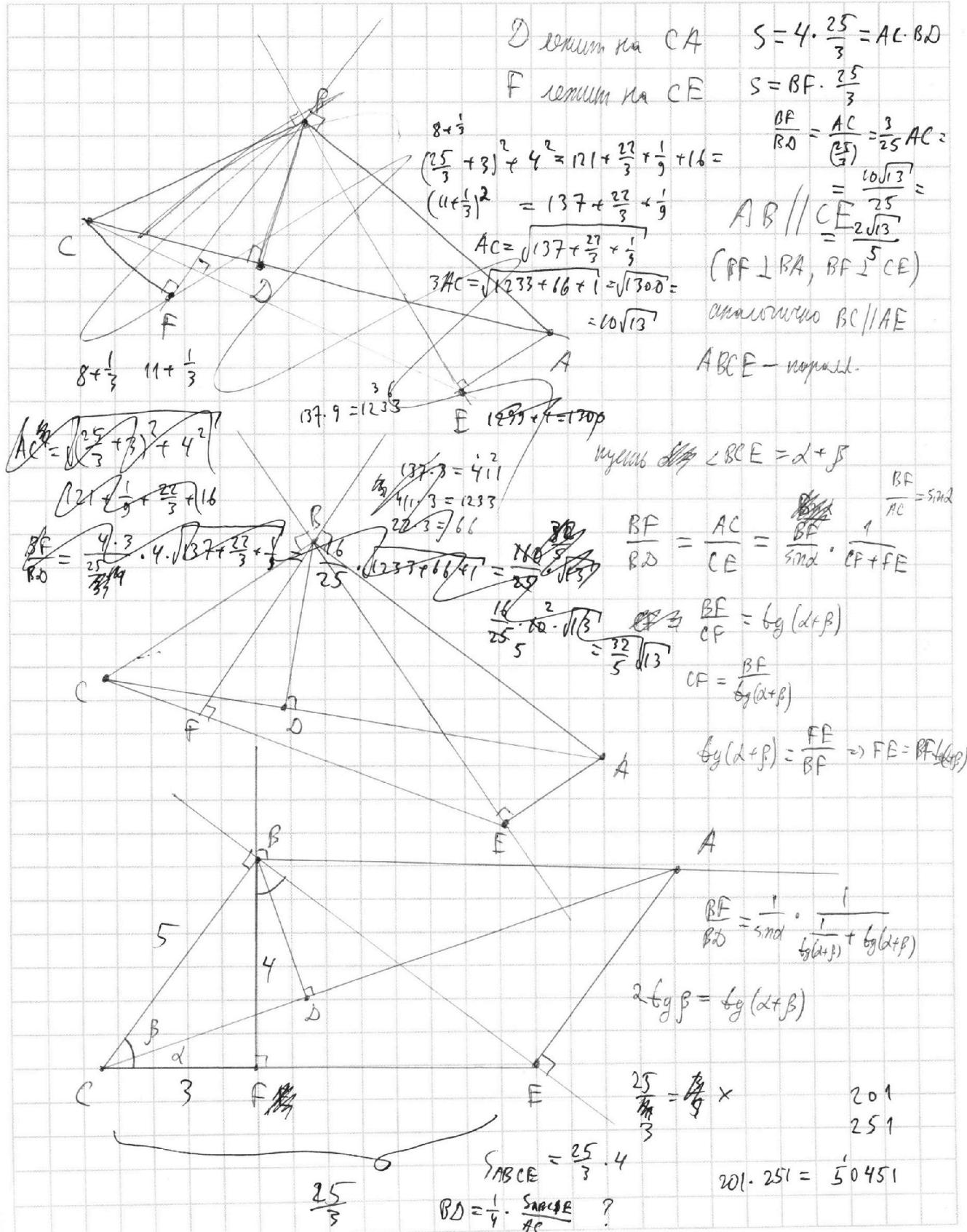
6

7

СТРАНИЦА
ИЗ



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



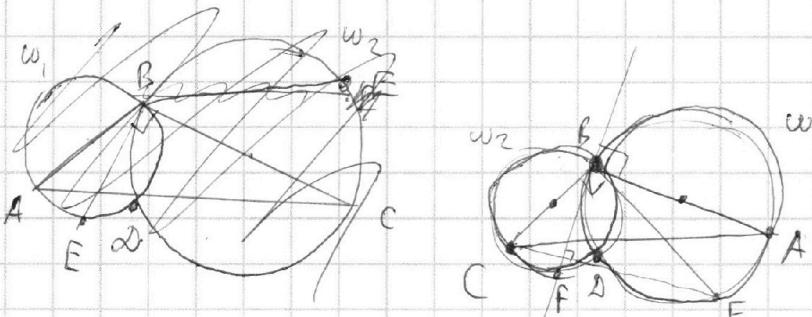


На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

- | | | | | | | |
|---------------------------------------|---------------------------------------|---------------------------------------|---------------------------------------|---------------------------------------|---------------------------------------|---------------------------------------|
| <input checked="" type="checkbox"/> 1 | <input checked="" type="checkbox"/> 2 | <input checked="" type="checkbox"/> 3 | <input checked="" type="checkbox"/> 4 | <input checked="" type="checkbox"/> 5 | <input checked="" type="checkbox"/> 6 | <input checked="" type="checkbox"/> 7 |
|---------------------------------------|---------------------------------------|---------------------------------------|---------------------------------------|---------------------------------------|---------------------------------------|---------------------------------------|

СТРАНИЦА
из

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по **каждой из задач** нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



$$\frac{BF}{BD} = ? \quad \cos \angle BCE = \frac{3}{5}$$

~~Линии~~ ~~Линии~~ ~~Линии~~

$$y + x - 1 = 0$$

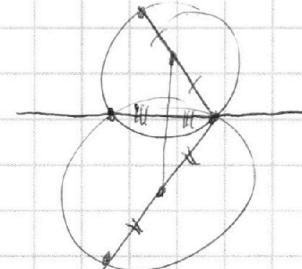
$$\text{Уравнение } x^2 - 3xy + \frac{9}{4}y^2 + \frac{7}{4}y^2 = 0$$

$$(x - \frac{3}{2}y)^2 + \frac{2}{7}y^2 = 0$$

~~Линии~~ ~~Линии~~ ~~Линии~~ ограждение

при $y = 0$

$$x = 0$$

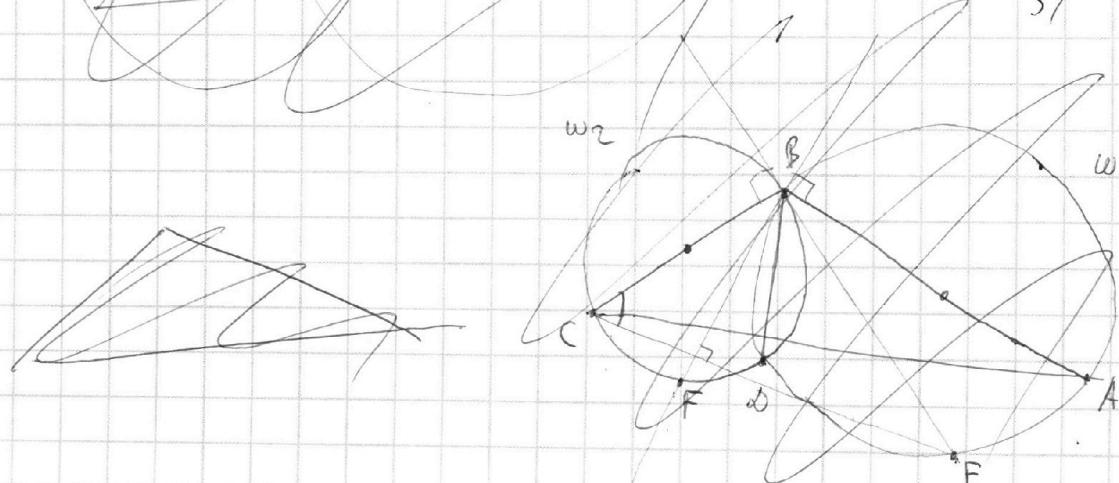


$$\operatorname{tg}(d+\beta)$$

$$\sin d(1 + \operatorname{tg}^2(d+\beta))$$

AB || CE

37



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.



- | | | | | | | |
|-------------------------------------|--------------------------|-------------------------------------|-------------------------------------|-------------------------------------|-------------------------------------|-------------------------------------|
| <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> |
|-------------------------------------|--------------------------|-------------------------------------|-------------------------------------|-------------------------------------|-------------------------------------|-------------------------------------|

СТРАНИЦА
ИЗ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$f(x) = x^2 + px + q, \quad (x - x_1)(x - x_2) = x^2 - (x_1 + x_2)x + x_1 x_2 \quad h = 2^{401} \cdot 3^{500} = x \cdot y \quad (1)$$

$$-x^2 + px + q = 0 \quad \text{Чему равен } (-p)?$$

методику вводят

$$-(x^2 - px - q) \Rightarrow -q = \frac{p^2}{4}$$

$$x^2 + px + q + 8 = 0$$

$$(x - \frac{p}{2})^2 = x^2 - px + \frac{p^2}{4}$$

метод

$$\begin{aligned} p &= \pm 4 \\ q &= -4 \end{aligned}$$

$$x^2 + px + \left(8 - \frac{p^2}{4}\right) = 0$$

$$x^2 \pm 4x + 4 = (x \pm 2)^2$$

$$\left(\frac{p}{2}\right)^2 = 8 - \frac{p^2}{4}$$

$$x^2 \pm 4x + 4$$

$$\frac{1}{2}p^2 = 8$$

$$p = \pm 2\sqrt{8} \quad \text{или} \dots$$

$$\begin{aligned} x^2 \pm 2x + 1 &= (x \pm 1)^2 \\ x^2 \pm 2x + 7 &= \cancel{(x \pm 1)^2} \\ q &= -1 \\ p &= \pm 2\sqrt{7} \end{aligned}$$

$$y = 2^{\alpha_1} \cdot 3^{\beta_1} \quad X = 2^{\alpha_2} \cdot 3^{\beta_2}$$

$$y = 2^{\alpha_2} \cdot 3^{\beta_2}$$

$$\alpha_2 \geq \alpha_1$$

$$\beta_2 \geq \beta_1 \quad \text{причем } \alpha_1 + \alpha_2 = 401$$

$$\beta_1 + \beta_2 = 500$$

a, b - катеты

$$\frac{1}{16} = 2^{-4}$$

$$\log_2 2^{401} = 401$$

$$\frac{1}{\log_2 x} + \frac{9}{\log_2 y} - \frac{16}{\log_2 xy} = 0$$

$$\min(a+b) = a+b - |a-b|$$

$$a = \log_2 x, \quad b = \log_2 y$$

$$\max(a+b) = a+b + |a-b|$$

$$\frac{1}{a} + \frac{9}{b} = \frac{16}{a+b} = \frac{b+9a}{ab}$$

$$12 \max(a+b) = 6(a+b + |a-b|) = 9(a-b)^2$$

$$16ab = (a+b)(b+9a) = 10ab + 6^2 9a^2$$

$$12 \max(a+b) = 6(a+b + |a-b|) = 4 \operatorname{KOK}(a+b)$$

$$9a^2 + b^2 - 6ab = 0$$

$$(3a-b)^2 = 0$$

$$3a = b$$

$$\log_2 x^3 = \log_2 y$$

$$x^3 = y$$

$$\log_2 x + \log_2 x^3 + \log_2 y^{-4} = 0$$

$$(7x^3 + 7)(x-1) > (3x^2 - 3)(x+1)$$

$$\frac{3y-3}{7y+7} = \frac{3}{7} \left(\frac{y-1}{y+1} \right) = \frac{3}{7} \left(1 - \frac{2}{x^3+1} \right)$$

$$7x^4 - 7x^3 + 7x - 7 > 3x^4 + 3x^3 - 3x - 3$$

$$4x^4 - 10x^3 + 10x + 4 > 0$$

$$1+3-4=0$$

$$x \leq 31$$