



МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

9 КЛАСС. Вариант 13



- [4 балла] Натуральные числа a, b, c таковы, что ab делится на $3^{11}7^{11}$, bc делится на $3^{18}7^{16}$, ac делится на $3^{21}7^{38}$. Найдите наименьшее возможное значение произведения abc .
- [4 балла] Известно, что дробь $\frac{a}{b}$ несократима ($a \in \mathbb{N}, b \in \mathbb{N}$). На доске записана дробь

$$\frac{a+b}{a^2 - 8ab + b^2}.$$

При каком наибольшем m можно оказалось, что числитель и знаменатель дроби можно сократить на m ?

- [5 баллов] Решите уравнение

$$\sqrt{2x^2 - 3x + 4} - \sqrt{2x^2 + x + 3} = 1 - 4x.$$

- [4 балла] Центр окружности ω лежит на окружности Ω , диаметр AB окружности Ω касается ω в точке C так, что $AC = 1$ и $BC = 16$. Найдите длину общей касательной к окружностям ω и Ω .
- [4 балла] Ненулевые действительные числа x, y, z удовлетворяют равенствам

$$3x + 2y = z \quad \text{и} \quad \frac{3}{x} + \frac{1}{y} = \frac{2}{z}.$$

Найдите наибольшее возможное значение выражения $\frac{3x^2 - 4y^2 - z^2}{x^2 - 6y^2}$.

- [5 баллов] Из пункта A в пункт B выезжают одновременно велосипедист и мотоциклист. Оба они движутся с постоянной скоростью, и мотоциклист прибывает в пункт B на 2 часа раньше велосипедиста. Если бы велосипедист ехал со своей скоростью в течение того времени, что понадобилось мотоциклистику на дорогу от A к B , а мотоциклист – в течение того времени, что понадобилось велосипедисту на этот путь, то мотоциклист проехал бы на 96 километров больше. Если бы скорость каждого из них возросла на 6 км/ч, то велосипедист приехал бы в B на 1 час 15 минут позже велосипедиста. Найдите расстояние между A и B .
- [6 баллов] Вписанная окружность ω прямоугольного треугольника ABC с прямым углом B касается его сторон CA, AB, BC в точках D, E, F соответственно. Луч ED пересекает прямую, перпендикулярную BC , проходящую через вершину C , в точке Y ; X – вторая точка пересечения прямой FY с окружностью ω . Известно, что $EX = 2\sqrt{2}XY$. Найдите отношение $AD : DC$.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:



- | | | | | | | |
|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

МФТИ.

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

за $\nu_p(a)$ обозначим наибольшее неотрицательное число d , такое,
что $p^d \mid a$ ($x \mid y \Leftrightarrow y \mid x$), где p -простое, a -число
м.к. $ab : 3^{25} \cdot 7^{38}$, то $ab : 3^2 \Rightarrow \nu_3(ab) \geq 11$. значит, что
 $\nu_3(a \cdot b) = \nu_3(a) + \nu_3(b) \Rightarrow \nu_3(a) + \nu_3(b) \geq 11$. также $ab : 7^{38} \Rightarrow$
 $\Rightarrow \nu_{7^{38}}(a) + \nu_{7^{38}}(b) \geq 11$
аналогично, м.к. $bc : 3^{25} \cdot 7^{32}$, то $\nu_3(b) + \nu_3(c) \geq 16$; $\nu_7(b) + \nu_7(c) \geq 32$.
м.к. $ac : 3^{25} \cdot 7^{32}$, то $\nu_3(a) + \nu_3(c) \geq 25$; $\nu_7(a) + \nu_7(c) \geq 32$.

имеем:

$$\left\{ \begin{array}{l} \nu_3(a) + \nu_3(b) + \nu_3(b) + \nu_3(c) + \nu_3(a) + \nu_3(c) \geq 11 + 16 + 25 \\ \nu_7(a) + \nu_7(b) + \nu_7(b) + \nu_7(c) + \nu_7(a) + \nu_7(c) \geq 11 + 16 + 32 \end{array} \right.$$

??

$$\left\{ \begin{array}{l} 2(\nu_3(a) + \nu_3(b) + \nu_3(c)) \geq 50 \\ 2(\nu_7(a) + \nu_7(b) + \nu_7(c)) \geq 65 \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \nu_3(a) + \nu_3(b) + \nu_3(c) \geq 25 \\ \nu_7(a) + \nu_7(b) + \nu_7(c) \geq \frac{65}{2} \end{array} \right.$$

м.к. т.к. $\nu_p(a) \in \mathbb{Z}$, то $\nu_7(a) + \nu_7(b) + \nu_7(c) \geq 33$

значит, что $\nu_3(a) + \nu_3(b) + \nu_3(c) - \nu_3(abc) \geq 25$

аналогично, $\nu_7(abc) \geq 33$

значит, $abc : 7^{33}$ и $abc : 3^{25} \Leftrightarrow abc : 3^{25} \cdot 7^{32} \Rightarrow abc \geq 3^{25} \cdot 7^{32}$

но кроме того, $\nu_7(a \cdot c) \geq 36 \Rightarrow \nu_7(a) + \nu_7(c) \geq 38 \Rightarrow$

$$\Rightarrow \nu_7(a) + \nu_7(b) + \nu_7(c) \geq 38 \Rightarrow \boxed{abc \geq 3^{25} \cdot 7^{38}}$$

равенство может выполняться при $a = 3^7 \cdot 7^{11}; b = 3^4; c = 3^4 \cdot 7^{27}$

ответ: $3^{25} \cdot 7^{38}$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

- | | | | | | | |
|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$\frac{a}{b} - \text{некратична} \Rightarrow (a; b) = 1$$

$$(a; b) = 10 \Leftrightarrow (a; b) = 1$$

m - наибольшее число: $m | a+b$ и $m | a^2 - bab + b^2 \Rightarrow m = (a+b; a^2 - bab + b^2)$

$$(a+b; a^2 - bab + b^2) = (a+b; (a+b)^2 - \cancel{2ab}) = (a+b; -10ab)$$

$$m | a+b \text{ и } m | -10ab$$

$$a \equiv -b \pmod{m}$$

$$-10ab \equiv$$

$$(\text{mod } m)$$

$$-10ab \equiv 10b^2 (\cancel{-m}) \equiv 0 \text{ если } m | b, \text{ но } m \nmid a \text{ - противоречие.}$$

$$10 \equiv 0 \pmod{m}$$

$$(a; b) = 1$$

получаем, m - делитель 10. Наибольший делитель ~~10~~

некратичных числа - само число \Rightarrow ~~но~~ наибольшее $m = 10$.

Будем $a = 3, b = 7$:

$$\frac{a^2 + b^2}{a - b \cdot 21 + 49} = \frac{10}{-110} \Rightarrow m = 10$$

доказано

□

Ответ: $m = 10$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,

решение которой представлено на странице:



- | | | | | | | |
|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

МФТИ.

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$\sqrt{2x^2 - 3x + 4} - \sqrt{2x^2 + x + 3} = 1 - 4x$$

м.к. $2x^2 - 3x + 4 > 0$ и $2x^2 + x + 3 > 0$ при любых $x \in \mathbb{R}$, то

PD2: ~~х < 0~~ x - любое

меножим $2x^2 - 3x + 4 = a$, $4x - 1 = b$, уравнение примет вид:

$$\sqrt{a} - \sqrt{a+b} = -b$$

$\sqrt{a+b} = \sqrt{-b}$ | возведем обе части в квадрат

$$a + 2b\sqrt{a+b} + b^2 = a + b$$

$$b^2 + ab(2\sqrt{a} - 1) = 0$$

||

$$\begin{cases} b=0 \\ b+2\sqrt{a}-1=0 \end{cases}$$

1st case: $b=0 \Leftrightarrow 4x-1=0 \Leftrightarrow x=\frac{1}{4}$

проверим для проверки: $\sqrt{\frac{2}{16}} - \sqrt{\frac{12}{16} + \frac{64}{16}} - \sqrt{\frac{2}{16} + \frac{4}{16} + \frac{48}{16}} =$
 $= 0 \Leftrightarrow \sqrt{\frac{54}{16}} - \sqrt{\frac{54}{16}} = 0$ верно $\Rightarrow x=\frac{1}{4}$ - реш.

2nd case: $b+2\sqrt{a}-1=0$

$$2\sqrt{a} = 1 - b \quad | \text{ возведем в квадрат}$$

$$4a = 1 - 2b + b^2$$

м.к. $a = 2x^2 - 3x + 4$, $b = 4x - 1$, то

$$\begin{aligned} 8x^2 - 12x + 16 &= 1 - 8x + 2 + 16x^2 - 8x + 1 \\ 8x^2 - 4x - 12 &= 0 \quad | :4 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 2x^2 - x - 3 &= 0 \\ x_1 &= -1; x_2 = \frac{3}{2} \end{aligned}$$

были проверены условия, что $x = -1$ и $x = \frac{3}{2}$ - не реш.

$$\text{Diber}: x = \frac{1}{4}$$

| - - - -
 Проверим $x = \frac{3}{2}$:
 $\sqrt{\frac{9}{2} - \frac{9}{2} + 4} - \sqrt{\frac{9}{2} + \frac{3}{2} + \frac{48}{2}} =$

$$\begin{aligned} &= 1 - 6 \Leftrightarrow \sqrt{4} - \sqrt{9} = -5, \\ &\text{что неверно} \end{aligned}$$

| - - - -
 Проверим $x = -1$:
 $\sqrt{2 + 3 + 4} - \sqrt{2 - 1 + 3} = 5 \Leftrightarrow$
 $\Leftrightarrow \sqrt{9} - \sqrt{2} = 5$, что неверно

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,

решение которой представлено на странице:

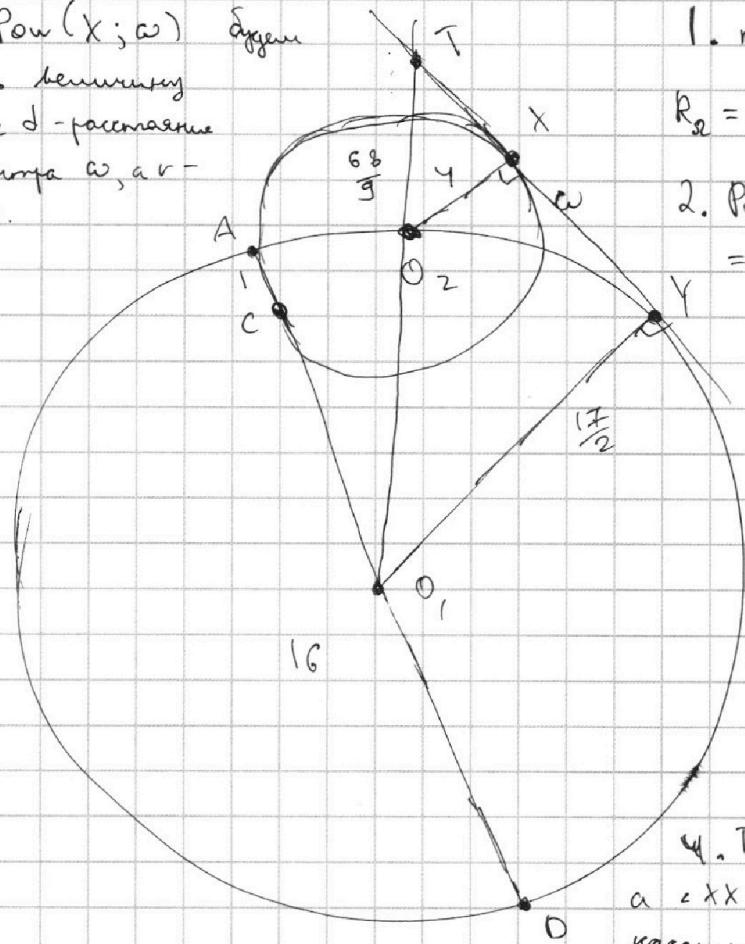


- | | | | | | | |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

яч $Pow(X; \omega)$ будем
однозначно определять как
 $d^2 + r^2$, где d - расстояние
от X до центра ω , а r -
радиус ω .



1. м.к. $AC = 1$; $OC = 16$, то

$$R\omega = (1+16) \cdot \frac{1}{2} = \frac{17}{2}$$

2. $Pow(O_2; \omega) = O_1O_2^2 - R\omega^2 =$
 $= \frac{289}{4} - R\omega^2 = O_1C^2 = (\frac{15}{2})^2$

$\Rightarrow R\omega^2 = \frac{289}{4} - \frac{225}{4} = 16$

$R\omega = 4$

3. пусть XY - общая
кас. к ω и O_2 , $X \in \omega$;
 $Y \in O_2$. тогда O_1O_2
го перпен. с XY :
 $O_1O_2 \cap XY = T$

4. $T.O_2 X \sim T.O_1 Y$ ($\angle T$ -одинак.),
 $\alpha \angle X.O_2 = \angle Y.O_1 = \frac{\pi}{2}$ из-за
касания)

5. из подобия n.ч:

$$\frac{T.O_2}{T.O_2 + O_2O_1} = \frac{O_2X}{O_1Y} \Leftrightarrow \frac{T.O_2}{T.O_2 + \frac{17}{2}} = \frac{4}{17/2} \Leftrightarrow \frac{2T.O_2}{2T.O_2 + 17} \rightarrow \frac{8}{17} \Rightarrow 34T.O_2 = 16T.O_2 + 136 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow T.O_2 = \frac{68}{9}$$

6. ~~$Pow(T; \omega)$~~ $Pow(T; \omega) = T.O_2 - R\omega^2 = \frac{4624}{81} - 16 = \frac{3328}{81} \Rightarrow TX^2 \Rightarrow TX = \frac{8}{9}\sqrt{52} =$

$$= \frac{16}{9}\sqrt{13}$$

7. из подобия n.ч $\Rightarrow \frac{TX}{TY} = \frac{4}{17/2} \Leftrightarrow \frac{16\sqrt{13}}{9TY} = \frac{8}{17} \Rightarrow 34\sqrt{13} = 9TY \Rightarrow TY = \frac{34}{9}\sqrt{13}$

8. $XY = TY - TX = \frac{34}{9}\sqrt{13} - \frac{16}{9}\sqrt{13} = 2\sqrt{13}$

Ответ: $2\sqrt{13}$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,

решение которой представлено на странице:

- | | | | | | | |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$3x + 2y = 2 \quad \text{и} \quad \frac{3}{x} + \frac{1}{y} = \frac{2}{2} \quad (x, y \neq 0) \quad ; x, y \in \mathbb{R}$$

$$\frac{3x^2 - 4y^2 - 2^2}{x^2 - 6y^2} = ? = A$$

преобразуем второе равенство:

$$\frac{3}{x} + \frac{1}{y} = \frac{2}{2} \iff \frac{1}{\frac{3}{x} + \frac{1}{y}} = \frac{2}{2} \iff \frac{xy}{3y+x} = \frac{2}{2} \iff 2 = \frac{2xy}{3y+x}$$

$$\text{значит, } \frac{2xy}{3y+x} = 3x + 2y \Rightarrow 2xy = (3x + 2y)(3y + x) \iff$$

$$\iff 2xy = 9xy + 3x^2 + 6y^2 + 2xy \iff x^2 + 3xy + 3y^2 = 0 \iff (x+y)(x+2y) = 0$$

$$\text{1st case: } x = -y \Rightarrow z = -y, \text{ тогда } A = \frac{3y^2 - 4y^2 - y^2}{y^2 - 6y^2} = \frac{-2y^2}{-5y^2} = \frac{2}{5}$$

$$\text{2nd case: } x = -2y \Rightarrow z = -4y : A = \frac{12y^2 - 4y^2 - 16y^2}{4y^2 - 6y^2} = \frac{-8y^2}{-2y^2} = 4$$

Ober: ~~3~~ 4. Ober: 4.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:



- | | | | | | | |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

МФТИ.

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

обозначим длину пути от А до В за S , скорость велосипедиста -
за v_b , мотоциклиста - за v_m . по условию верна система:

$$\frac{S}{v_b} = \frac{S}{v_m} + 2 \quad (1) \quad | \cdot v_b$$

$$v_b \cdot \frac{S}{v_m} + 96 = v_m \cdot \frac{S}{v_b} \quad (2)$$

$$\frac{S}{v_b+6} = \frac{S}{v_m+6} + \frac{5}{4} \quad (3)$$

$$v_m: \quad \frac{S \cdot v_b}{v_m} = \frac{S \cdot 2v_b}{v_m} + 2v_b = (v_m \cdot \frac{S}{v_b} - 96) + 2v_b$$

$$\frac{v_m \cdot S}{v_b} = S + 2v_m = v_b \cdot \frac{S}{v_m} + 96, \text{ т.к. } \frac{S}{v_m} = \frac{S}{v_b} - 2, \text{ то}$$

$$S + 2v_m = v_b \cdot \left(\frac{S}{v_b} - 2 \right) + 96 \Rightarrow S + 2v_m = S - 2v_b + 96 \Rightarrow 2v_m + 2v_b = 48$$

погонавим 6 (1) и (3) вычитаем $v_b = 48 - 2v_m$:

$$\frac{S}{48 - 2v_m} = \frac{S + 2v_m}{v_m} \Rightarrow S v_m = 24 S + 48 v_m - v_m^2$$

$$\frac{S}{54 - v_m} = \frac{S}{v_m + 6} + \frac{5}{4} \Rightarrow S(v_m + 6) = (54 - v_m)(S + 6v_m + 6a)$$

||

$$S v_m + 6S = 54S$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

- | | | | | | | |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| <input type="checkbox"/> |

МФТИ



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

v_m, v_6, t_m, t_6 .

$v_6 \cdot t_6 - ?$

$v_m \cdot t_m - ?$

$$\left\{ \begin{array}{l} t_m + 2 = t_6 \\ v_6 \cdot t_m + 36 = v_m \cdot t_6 \end{array} \right.$$

$$v_6 \cdot t_m + 36 = v_m \cdot t_6$$

$$\frac{v_6 \cdot t_6}{v_6 + 6} = \frac{v_m \cdot t_m}{v_m + 6} + a \quad a = \frac{36}{6}$$

$$-26 t_6 = -36 t_m - 72$$

$$\frac{v_6 \cdot t_6}{v_6 + 6} = t_6 - \frac{6 t_6}{v_6 + 6} = t_m - \frac{6 t_m}{v_m + 6}$$

$$2 - \frac{6 t_6}{v_6 + 6} = - \frac{6 t_m}{v_m + 6}$$

$$-6 v_m t_6 = -6 v_6 t_m - 96 \cdot 6$$

$$\frac{2 v_6 + 12 - 6 t_6}{v_6 + 6} = \frac{-6 t_m}{v_m + 6}$$

$$2 v_6 \cdot v_m + 12 v_m - 6 t_6 v_m + 12 v_6 + 72 - 36 t_6 = -6 t_m v_6 - 36 t_m$$

$$2 v_6 \cdot v_m + 12 v_m - 96 \cdot 6 + 12 v_6 + 72 - 36 t_6 = -36 t_m$$

$$2 v_6 \cdot v_m + 12 v_m - 96 \cdot 6 + 12 v_6 = 0$$

$$v_6 \cdot v_m + 6 v_m - 96 \cdot 3 + 6 v_6 = 0 \quad | \cdot t_6$$

$$5 \cdot v_m + 6 v_m \cdot t_6 - 96 \cdot 3 t_6 + 6 s = 0$$

$$5 \cdot v_m + 6(v_6 t_m + 96) - 96 \cdot 3 t_6 + 6s = 0 \quad t_6 = t_m + 2$$

$$5 \cdot v_m + 6 v_6 \cdot t_m + 96 \cdot 6 - 96 \cdot 3(t_m + 2) + 6s = 0$$

$$v_6 \cdot t_6 + v_m + 6 v_6 \cdot t_m - 3 t_m + 6s = 0$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

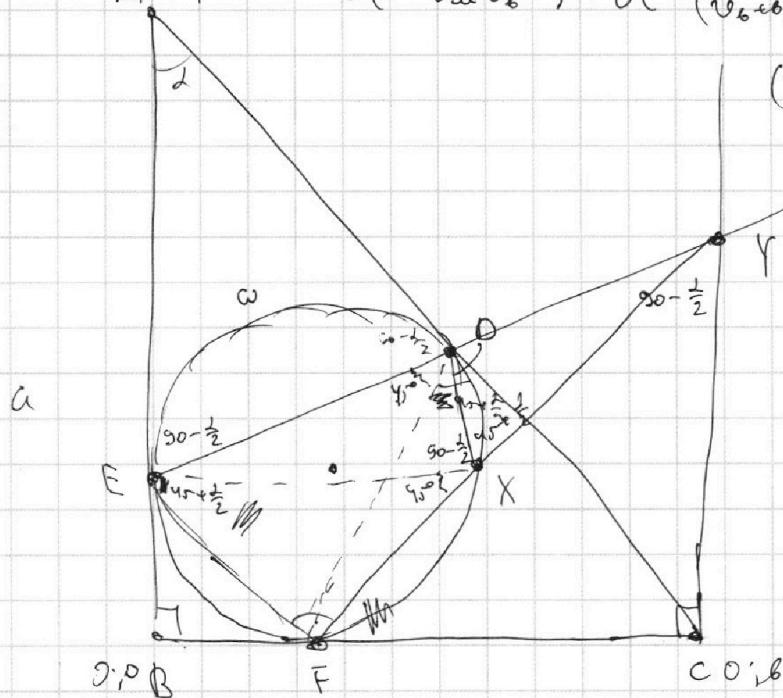
 МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$\frac{5S}{\psi_6} - \frac{5S}{\psi_{16}} - \frac{6S}{\psi_{8+6}} + \frac{8S}{\psi_{16+6}} = 0$$

$$\Delta^0 \text{ a } 5\left(\frac{v_{an}+v_b}{v_{an}v_b}\right) + 8\left(\frac{v_{an}+b - v_b - b}{(v_b-a)(v_{an}+b)}\right) = 0$$

$$(V_{\text{in}} - V_0) \left(\frac{5}{V_{\text{in}} - V_0} - \frac{9}{V_{\text{in}} + 6} \dots \right)$$



$$Ex = 2\sqrt{2} \times Y$$

$$6 \quad 45 + \frac{2}{2}$$

$$\frac{S}{v_m} + 2 = \frac{S}{v_b}$$

$$\frac{S+2v_m}{v_m} = \frac{S}{v_b}$$

$$Sv_f + 2v_m v_e = Sv_m$$

$$\frac{S}{V_{\text{out}} + 6} + \frac{S}{4} = \frac{S}{V_{\text{f}} + 6}$$

8 8

$$-\left(\frac{5S}{V_B} - \frac{5S}{V_{Bn}}\right) = 0$$

$$\frac{8S}{V_{6+6}} - \frac{8S}{12m+6} = \frac{5}{12}(10)$$

$$\frac{4s + 5us + 30}{4(2u + 6)} = \frac{4s}{4(2u + 6)}$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

- | | | | | | | |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| <input type="checkbox"/> |

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$\frac{S}{4v - 2v_m} = \frac{S + 2v_m}{v_m}$$

$$S v_m = 4v S - S v_m + 96 v_m - 2 v_m^2$$

$$S v_m = 24 S + 4v v_m - v_m^2$$

$$\frac{4S}{54 - 2v_m} = \frac{4S + 5v_m - 30}{v_m + 6}$$

$$4S v_m + 24S = 216S + 270v_m + 4 \cdot 30 - 4S v_m + 5v_m^2 + 30v_m$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,

решение которой представлено на странице:



1

2

3

4

5

6

7

МФТИ.

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$\frac{5S}{v_6} = \frac{5S}{v_m} + 10$$

$$\frac{6S}{v_6+6} = \frac{6S}{v_m+6} + 10$$

$$\frac{5S}{v_6} - \frac{6S}{v_6+6} = \frac{5S}{v_m} - \frac{6S}{v_m+6}$$

$$\frac{5v_6 + 30 - 6v_6}{v_6(v_6+6)} = \frac{5v_m + 30 - 6v_m}{v_m(v_m+6)}$$

$$\frac{30 - 10 - 3v_6}{v_6(v_6+6)} = \frac{(10 - 3v_m)}{v_m(v_m+6)}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{S}{a} = \frac{S}{a} + 2 \\ \frac{S}{a+6} = \frac{S}{a+6} + \frac{5}{9} \end{array} \right.$$

$$6 \cdot \frac{S}{a} + 96 = a \cdot \frac{S}{6}$$

$$\frac{6S}{a} + 96 = \frac{aS}{6}$$

$$\frac{S}{6} - \frac{S}{a+6} = \frac{S}{a} - \frac{S}{a+6} + \frac{3}{45}$$

$$\frac{62}{6(a+6)} = \frac{62}{a(a+6)} + \frac{18}{45}$$

$$2 \left(\frac{1}{6(a+6)} + \frac{1}{a(a+6)} \right) = \frac{1}{45 \cdot 88}$$

$$\frac{a^2 + 6a + 6^2 + 68}{a(a+6)(a+6)} = \frac{1}{88}$$

$$\frac{6S + 96a}{a} = \frac{aS}{6}$$

$$\frac{S+2a}{a} = \frac{S}{6}$$

$$6S = \frac{a(a+6)b(b+6)}{a^2 + 6a + 6b + b^2}$$

$$\frac{S}{v_m} = \frac{S}{v_6} - 2$$

$$\frac{6S + 96a}{S+2a} = a$$

$$S+2v_m = S-2v_6 + 96$$

$$\frac{6S + 96a}{a} = 2S + 42a^2$$

$$\frac{6S}{a} + 96 = S+2a$$

$$a \left(\frac{S}{a} + 2 \right) = S+2a$$

$$\frac{aS}{6} = S+2a$$

$$S+2a = S+2a$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,

решение которой представлено на странице:



- | | | | | | | |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| <input type="checkbox"/> |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$ab : 3^{11} 7^{11}$$

$$bc : 3^{13} 7^{16}$$

$$ac : 3^{21} 7^{38}$$

$$v_3(a) + v_3(c) \geq 21 \quad v_3(a) + v_3(b) \geq 11 \quad v_3(b) + v_3(c) \geq 18$$

$$2(v_3(a) + v_3(b) + v_3(c)) \geq 50 \Rightarrow [v_3(a) + v_3(b) + v_3(c) \geq 25]$$

$$v_7(a) + v_7(b) \geq 11 \quad v_7(b) + v_7(c) \geq 18 \quad v_7(a) + v_7(c) \geq 38 \quad \begin{matrix} 50+15= \\ =65 \end{matrix}$$

$$2(v_7(a) + v_7(b) + v_7(c)) \geq 65 \Rightarrow v_7(a) + v_7(b) + v_7(c) \geq 33 \quad 33$$

$$(a; b) = 1 \quad \frac{a+b}{a^2 - bab + b^2} = \frac{a+b}{(a+b)^2 - 10ab} \quad \frac{36 + 16 + 11}{2}$$

$$(a+b; a^2 - bab + b^2) = \frac{(a+b)^2 - 10ab}{168} \quad \frac{21}{168}$$

$$a+b \quad \frac{a^2 - bab + b^2}{a^2 + ab} \quad \frac{a+b}{a-9b} \quad a+b \quad a+b \quad a+b \quad a+b \quad a+b$$

$$a = 3^{21} 7^{11} \quad \frac{a^2 + ab}{-9ab + b^2} \quad a = b \quad \frac{a+b}{-10ab} \quad \frac{7+3}{4g - (6b+g)} =$$

$$c = 7^{28} \quad \frac{-9ab}{10b^2} \quad 10ab = -10b^2 \Rightarrow 10 = 0 \quad 4g - (6b+g) =$$

$$c = 7 \quad \frac{10}{110} = 10 \quad \sqrt{3} - \sqrt{6} = -3 \quad b = 0 \quad \frac{7}{9} = 0 \quad 4g = 6b + g$$

$$\sqrt{2x^2 - 3x + 4} - \sqrt{2x^2 + x + 3} = 1 - 4x \quad \begin{matrix} 7^{28} \\ c = 7 \\ a = 7^{11} \end{matrix}$$

$$2x^2 - 3x + 4 - 2\sqrt{2x^2 - 3x + 4} \sqrt{2x^2 + x + 3} + 2x^2 + x + 3 = 1 - 8x + 16x^2$$

$$4x^2 - 2x + 6 - 2\sqrt{2x^2 - 3x + 4} \sqrt{2x^2 + x + 3} = 1 - 8x + 16x^2$$

$$2x^2 - 3x + 4 = a$$

$$4x - 1 = 6$$

$$4x^2 + 6x + 6 - 2\sqrt{2x^2 - 3x + 4} \sqrt{2x^2 + x + 3} = 1 - 8x + 16x^2$$

$$\boxed{\sqrt{a} - \sqrt{a+6} = -6}$$

$$\sqrt{a+6} = \sqrt{a+6} \quad 110 \quad a+6 = 11$$

$$a + 2b\sqrt{a+6} + b^2 = a+6 \quad 2\sqrt{a} = 1-b \quad b = 1-b \quad 25$$

$$4a = b^2 - 2b + 1 \quad a+6 = 1-b \quad a+6 = 1-b \quad 25$$

$$b^2 + b(2\sqrt{a} - 1) = 0 \quad b + 2\sqrt{a} - 1 = 0 \quad \boxed{a = 4 \cdot 14 \quad b = 4}$$

$$(1) b = 0 \quad a = 7 \quad b = 4$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,

решение которой представлено на странице:



- | | | | | | | |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| <input type="checkbox"/> |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|

МФТИ.

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$3x+2y=2 \quad \text{или} \quad \frac{3}{x} + \frac{1}{y} = \frac{2}{2}$$

$$\frac{3x^2 - 4y^2 - 2^2}{x^2 - 6y^2} = \frac{1}{\frac{3}{x} + \frac{1}{y}} = \frac{2}{2} \quad \frac{xy}{3y+x} = \frac{z}{2}$$

$$z = \frac{2xy}{3y+x}$$

$$2xy = (3y-x)(3x+2y)$$

$$9xy + 6y^2 + 3x^2 + 2xy = 2xy$$

$$\Rightarrow 9xy + 3x^2 + 6y^2 = 0 \quad x^2 + 3xy + 2y^2 = 0$$

$$(x=-y)$$

$$\cancel{y^2 - 3y} \quad \text{и} \quad x_1 = -y$$

$$x_2 = -2y$$

$$(x+y)(x+2y)$$

$$\frac{\cancel{x+y}}{-v_6 - 6} = \frac{s}{v_6 + 6} = \frac{s + av_m + 6a}{v_m + 6}$$

$$sv_m + 6s = sv_6 + av_mv_6 + 6av_6 + 6s + 6av_m + 36a$$

$$A \quad 2v_m v_6 = av_m v_6 + 6a(v_6 + v_m) + 36a$$

$$\frac{sv_6 + 96v_m}{v_m} = \frac{sv_m}{v_6} \quad B$$

$$v_6 \approx v_m$$

$$\left[\frac{s}{v_6} = \frac{s}{v_m} + 2 \right]$$

$$\frac{sv_6 + 96v_m}{v_m} = \frac{sv_m^2}{s-2}$$

$$\frac{75}{60} = \frac{65}{\frac{s}{4}}$$

$$\left[v_6 \cdot \frac{s}{v_m} + 96 = v_m \cdot \frac{s}{v_6} \right]$$

$$\frac{s}{v_6} = \frac{s + 2v_m}{v_m}$$

$$\left[\frac{s}{v_6 + 6} = \frac{s}{v_m + 6} + \frac{s}{4} = a \right]$$

$$sv_m = sv_6 + 2v_m v_6$$

$$\frac{s}{v_6 + 6} = \frac{s + \frac{s}{4}(v_m + 6)}{v_m + 6}$$

$$sv_m + 6s = sv_6 + 6s + \frac{s}{4}(v_m + 6) \cdot v_6 + \frac{5 \cdot 3}{2} (v_m + 6)$$

$$sv_6 + 2v_m v_6 = sv_6 + \frac{s}{4} v_m v_6 + \frac{15}{2} v_6 + \frac{15}{2} v_m + 45$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,

решение которой представлено на странице:



- | | | | | | | |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| <input type="checkbox"/> |

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$\begin{array}{r} 3326 \\ - 3200 \\ \hline 126 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 64 \\ 16 \\ \times 16 \\ \hline 256 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 7 \\ 13 \\ \hline 126 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 256 \\ - 256 \\ \hline 0 \end{array}$$

$$2x^2 - 3x + 4 = a \quad 4x^2 + 4x - 1 = b$$

$$\sqrt{a} + \sqrt{a+b} = 6$$

$$b = 5$$

$$\sqrt{a} - b = \sqrt{a+b}$$

$$\begin{array}{l} a - 2b = \sqrt{a+b} \\ a - 2b = \sqrt{a+b}^2 = a+b \\ 6 \end{array}$$

$$\sqrt{a} + b = \sqrt{a+b}$$

$$a + 2b = \sqrt{a+b}^2 = a+b$$

$$\sqrt{4} + \sqrt{9} = -5$$

$$b^2 + b(2\sqrt{a}-1) = 0 \quad x = \frac{1}{4}$$

$$b(b+2\sqrt{a}-1) = 0$$

$$6 - 1 + 2\sqrt{a} = 0$$

$$b = 4 \cdot \frac{3}{2} - 1 = 5$$

$$2\sqrt{a} = -4$$

$$4(2x^2 - 3x + 4) = (4x - 1)^2 - 2(4x + 1) + 1$$

$$2\sqrt{b} =$$

$$\begin{array}{r} 8x^2 - 12x + 16 \\ \sim \sim \sim \sim \sim \sim \\ 16x^2 - 8x + 1 - 8x + 2 + 1 \end{array}$$

$$6$$

$$8x^2 - 4x - 12 = 0$$

$$\sqrt{\frac{9}{2} - \frac{9}{2} + \frac{12}{2}} - \sqrt{\frac{9}{2} + \frac{3}{2} + \frac{6}{2}} =$$

$$2x^2 - x - 3 = 0$$

$$= \sqrt{6} - 9 =$$

$$D = 1 + 4 \cdot 3 \cdot 2 = 25$$

$$\frac{9}{2} - \frac{9}{2} + 4 = 2 \quad 2 - 3 =$$

$$\sqrt{9} - \sqrt{2} =$$

$$\frac{9}{2} + \frac{3}{2} + \frac{6}{2} = 9$$