



МОСКОВСКИЙ  
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ  
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"  
ПО МАТЕМАТИКЕ

11 КЛАСС. Вариант 12



1. [3 балла] Дан приведённый квадратный трёхчлен  $f(x)$  такой, что уравнение  $f(x) = -2x^2$  имеет единственное решение, а также уравнение  $f(x) = -6$  имеет единственное решение. Найдите сумму корней уравнения  $f(x) = 0$ .
2. [3 балла] Сколькими способами можно представить число  $n = 5^{151} \cdot 7^{600}$  в виде произведения двух натуральных чисел  $x$  и  $y$ , где  $y$  делится на  $x$ ?
3. [5 баллов] Найдите количество пар целых чисел  $(x; y)$ , удовлетворяющих системе

$$\begin{cases} 3 \log_x 27 + \log_y 3 + 8 \log_{xy} \frac{1}{9} = 0, \\ \frac{3y+3}{y-1} < \frac{7x+7}{x-1}, \\ y \leq 24. \end{cases}$$

4. [5 баллов] Найдите все пары натуральных чисел  $(a; b)$  такие, что

$$\begin{cases} 4 \cdot \min(a; b) = 5(a - b)^2, \\ 5 \cdot \max(a; b) = \text{НОК}(a; b). \end{cases}$$

5. [5 баллов] На сторонах  $BA$  и  $BC$  треугольника  $ABC$  с тупым углом  $B$  как на диаметрах построены окружности  $\omega_1$  и  $\omega_2$  соответственно, пересекающиеся в точках  $B$  и  $D$ . Хорда  $BE$  окружности  $\omega_1$  перпендикулярна  $BC$ , а хорда  $BF$  окружности  $\omega_2$  перпендикулярна  $CE$  и касается  $\omega_1$ . Найдите отношение  $BF : BD$ , если  $\cos \angle BCE = \frac{3}{4}$ .
6. [5 баллов] При каких значениях параметра  $a$  система

$$\begin{cases} (y + x^2 - 4x + 1)(x^2 - 2xy + 3y^2)(y - 2x + 1) = 0, \\ y = (-2a + 4)x + a^2 - 1 \end{cases}$$

имеет ровно 2 решения?

7. [6 баллов] В прямую четырёхугольную призму  $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$  вписана сфера  $\omega$ . Луч с началом в точке  $A$  пересекает  $\omega$  в точках  $P$  и  $Q$ , а луч с началом в точке  $C$  пересекает  $\omega$  в точках  $M$  и  $N$ . Пусть  $O$  — точка пересечения диагоналей четырёхугольника  $ABCD$ . Найдите объём призмы  $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$  и расстояние  $\rho$  от центра  $\omega$  до плоскости  $PAC$ , если известно, что  $AO = 1$ ,  $BO = 2$ ,  $CO = 11$ ,  $AP = \frac{2}{\sqrt{5}}$ ,  $AQ = 2\sqrt{5}$ ,  $CM = 4\sqrt{5}$ ,  $CN = 5\sqrt{5}$ .



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА

4 из 4

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

### Задача 1

Пусть  $f(x) = x^2 + px + q$  (старший коэффициент равен 1, т.к. трёхлеи приведённый).

Тогда уравнения  $x^2 + px + q = -2x^2$  и  $x^2 + px + q = -6$  и оба имеют единственное решение. Т.к. оба эти уравнения квадратные и имеют единственное решение, то дискриминант каждого из них равен 0. (Формула дискриминанта:  $D = b^2 - 4ac$  для уравнения  $ax^2 + bx + c = 0$ ).

$$x^2 + px + q = -2x^2$$

$$3x^2 + px + q = 0$$

$$D = p^2 - 4 \cdot 3q = p^2 - 12q$$

$$x^2 + px + q = -6$$

$$x^2 + px + (q+6) = 0$$

$$D = p^2 - 4(q+6) = p^2 - 4q - 24$$

Получаем систему:

$$\begin{cases} p^2 - 12q = 0 \\ p^2 - 4q - 24 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} p^2 = 12q \\ p^2 = 4q + 24 \end{cases} \Rightarrow 12q = 4q + 24$$

$$8q = 24$$

$$q = 3. \text{ Тогда } p^2 = 36 \text{ и } p = 6 \text{ или } p = -6.$$

Под условие подходят  $p = 6$  и  $p = -6$  оба. По теореме Виета для уравнения  $f(x) = 0$  ( $x^2 + px + q = 0$ ) сумма корней является равной  $-p$ . То есть, сумма коэффициентов корней уравнения  $f(x) = 0$  равна  $-6$  или  $6$ .

Ответ:  $-6; 6$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
1 из 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

## Задача 2

$n = 5^{151} \cdot 7^{600}$  и  $n = xy$ . В разложении числа  $n$  на простые множители есть только простые числа 5 и 7. Тогда числа  $x$  и  $y$  можно представить в следующем виде:

$$x = 5^a \cdot 7^b$$

$$y = 5^c \cdot 7^d, \text{ где } a, b, c, d - \text{натуральные числа или } 0.$$

$$y : x \text{ делится на } x \Rightarrow \frac{5^c \cdot 7^d}{5^a \cdot 7^b} = 5^{c-a} \cdot 7^{d-b} - \text{целое натуральное число.}$$

Тогда обязательно  $c \geq a$  и  $d \geq b$ . При этом  $c + a = 151$  и  $b + d = 600$ . Чтобы найти число способов представления  $n$ , надо найти число способов всевозможных  $y$  ( $x$  тогда тоже определен).

$$c \geq a \text{ и } c + a = 151 \Rightarrow c \in [76; 151] \text{ (т.к. } a \text{ и } c - \text{натур. числа или } 0).$$

$$d \geq b \text{ и } d + b = 600 \Rightarrow d \in [300; 600] \text{ (т.к. } b \text{ и } d - \text{натур. числа или } 0).$$

Во всевозможных  $c$  будет 76, во всевозможных  $d$  будет 301. Тогда во всевозможных  $y$  будет  $76 \cdot 301 = 22876$  и будет 22876 способов представить число  $n$ .

Ответ: 22876

На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
2 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$3 < 7 \cdot \frac{y^2 - y + 1}{y^2 + y + 1} \quad | \cdot (y^2 + y + 1) > 0$$

$$3y^2 + 3y + 3 < 7y^2 - 7y + 7$$

$$4y^2 - 10y + 4 > 0 \quad | : 2$$

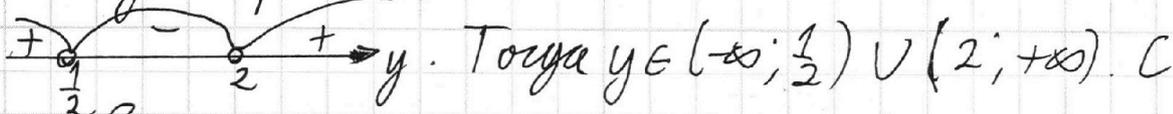
$$2y^2 - 5y + 2 > 0$$

Корни квадратного трёхчлена  $2y^2 - 5y + 2$ :

$$D = 25 - 4 \cdot 2 \cdot 2 = 9 = 3^2$$

$$y_{1,2} = \frac{5 \pm 3}{4}, \text{ то есть корни: } 2 \text{ и } \frac{1}{2}.$$

Метод интервалов:



Условием  $y \geq 2$  и  $y$  натуральным неравенством  $y \leq 24$  получаем, что  $y \in [2; 24]$ ,  $y \in \mathbb{Z} \Rightarrow y \in [3; 24]$ . Тогда

Каждый  $y$  из этой промежутка имеет соответствующий  $x = y^3$ , то есть и каждая такая пара будет удовлетворять всей системе. В промежутке  $[3; 24]$  будет 22 числа, то есть 22 пары чисел  $(x; y)$ . ( $x = y^3$  тоже целое число, если  $y$  - целый).

Ответ: 22



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
1 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

### Задача 3

Разберёмся сначала с верхним ~~уже~~ уравнением, используя формулы:  $\log_a b = \frac{1}{\log_b a}$ ,  $\log_a bc = \log_a b + \log_a c$ ,  
и  $\log_a b^c = c \cdot \log_a b$

$$3 \log_x 27 + \log_y 3 + 8 \log_{xy} \frac{1}{9} = 0$$

$$\frac{\log_3 27}{\log_3 x} + \frac{\log_3 3}{\log_3 y} - \frac{16 \log_3 3}{\log_3 xy} = 0$$

$$\frac{\log_3 27}{\log_3 x} + \frac{\log_3 3}{\log_3 y} - \frac{16 \log_3 3}{\log_3 x \log_3 y} = 0$$

$$9 \log_3 y \log_3 x + 9 \log_3^2 y + \log_3^2 x + \log_3 x \log_3 y - 16 \log_3 x \log_3 y = 0$$

Дробь равна 0, когда числитель равен 0. Получаем:

$$\log_3^2 x - 6 \log_3 x \log_3 y + (3 \log_3 y)^2 = 0$$

$$(3 \log_3 y - \log_3 x)^2 = 0$$

$$\log_3 y^3 = \log_3 x$$

$$x = y^3$$

Подставим теперь это в среднее неравенство:

$$\frac{3y+3}{y-1} < \frac{7y^3+7}{y^3-1}$$

$$3(y+1) \cdot \frac{y+1}{y-1} < 7 \cdot \frac{y^3+1}{y^3-1}$$

$$3 \cdot \frac{y+1}{y-1} < 7 \cdot \frac{(y+1)(y^2-y+1)}{(y-1)(y^2+y+1)} \quad | : \frac{y+1}{y-1} > 0$$

ОДЗ:  $x > 0$ ,  $y > 0$ ,  $y \neq 1$ ,  $x \neq 1$ . Также  $x$  и  $y$  — целые числа.  
Поэтому  $x \geq 2$  и  $y \geq 2$ . Тогда  $y+1 > 0$  и  $y-1 > 0$  и  $\frac{y+1}{y-1} > 0$ ,  $y^2+y+1 > 0$  также т.к.  $y > 0$

На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.



1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
1 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

### Задача 4

$$\begin{cases} 4. \min(a; b) = 5(a-b)^2 \\ 5. \max(a; b) = \text{НОК}(a; b) \end{cases}$$

Если  $a=b$ , то  $\max(a; b) = a$  и  $\text{НОК}(a; b) = a$  и получится, что  $5a = a$ , что невозможно при  $a \in \mathbb{N}$ . Так что  $a \neq b$ .

Заметим, что если пара  $(x; y)$  удовлетворяет условию, то пара  $(y; x)$  тоже будет удовлетворять. Поэтому можно решить задачу при условии, что  $a > b$  ( $a \neq b$ , что доказано выше), после чего, добавив к ответу все пары, противоположные уже полученным (если есть ответ  $(x; y)$ , то добавить к ответу  $(y; x)$ ).  
Тогда получаем систему:

$$\begin{cases} 4b = 5(a-b)^2 \\ 5a = \text{НОК}(a; b) \end{cases}$$

Пусть  $\text{НОК}(a; b) = k$ . Тогда пусть  $a = k \cdot t$ ,  $b = k \cdot m$ , где  $t$  и  $m$  взаимнопросты и  $t > m$  (т.к.  $a > b$ ). Тогда  $\text{НОК}(a; b) = k \cdot t \cdot m$ .

Запишем нижнее уравнение в другом виде:

$$5 \cdot kt = k \cdot t \cdot m \quad | : (kt) \quad (kt \neq 0)$$

$$m = 5$$

Теперь запишем верхнее уравнение в другом виде:

$$4 \cdot km = 5(kt - km)^2$$

20k141

$$4 \cdot 5 \cdot k = 5 \cdot k^2 (t - m5)^2 \quad | : (5k)$$

$$k(t-5)^2 = 4$$

~~Все числа в уравнении натуральны~~

$k$  и  $t$  строго натуральные, при этом  $t > 5 = m$ , поэтому числа  $k$  и  $(t-5)$  натуральные. 4 можно в виде произведения двух натуральных чисел можно представить тремя способами



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

СТРАНИЦА

2 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

или:  $2 \cdot 2$  или  $4 \cdot 1$  или  $1 \cdot 4$ . Поэтому рассмотрим следующие решения:

$$1) \begin{cases} k=2 \\ (t-5)^2=2 \end{cases} \quad \text{или} \quad 2) \begin{cases} k=1 \\ (t-5)^2=4 \end{cases} \quad \text{или} \quad 3) \begin{cases} k=4 \\ (t-5)^2=1 \end{cases}$$

$$1) (t-5)^2=2 \Rightarrow t-5=\sqrt{2} \quad (t>5) \Rightarrow \text{решений нет, т.к. } t \in \mathbb{N}$$

$$2) \begin{cases} k=1 \\ (t-5)^2=4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} k=1 \\ t=7 \quad (\text{т.к. } t>5) \end{cases}$$

Тогда получаем пару  $a=7$  и  $b=5$

$$3) \begin{cases} k=4 \\ (t-5)^2=1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} k=4 \\ t=6 \quad (\text{т.к. } t>5) \end{cases}$$

Тогда получаем пару  $a=24$  и  $b=20$

Подходят также пары  $a=5$  и  $b=7$ ;  $b=24$  и  $a=20$ .  
(было сказано вначале).

Ответ:  $(7; 5), (24; 20), (5; 7), (20; 24)$ .

На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.



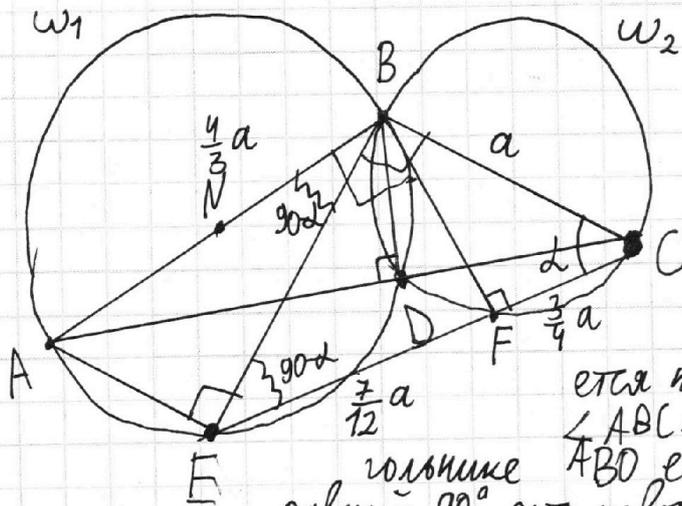
1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА

1 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

### Задача 5



$\angle B$  - тупой, это значит, что  $W_1$  и  $W_2$  не пересекают  $BC$  и  $BA$  соответственно (отрезки  $BC$  и  $BA$ ). Если бы они  $W_1$  пересекло  $BC$ , допустим в точке  $O$ , то  $\angle BOA = 90^\circ$  (т.к. вписанной и опирается на диаметр), при этом  $\angle ABC = \angle ABO$  тупой, и в треугольнике  $ABO$  есть тупой угол и угол, равный  $90^\circ$ , что невозможно. Аналогично  $W_2$  не пересекает отрезок  $AB$ .

$\angle ADB = \angle CDB = 90^\circ$  (т.к. они опираются на диаметр и являются вписанными)  $\Rightarrow \angle ADC = 180^\circ \Rightarrow C, D$  лежит на  $AC$ .

$BF \perp CE$  и при этом  $\angle BFC = 90^\circ$  (опирается на диаметр)  $\Rightarrow C, F \in CE$  (иначе было бы так, что из точки  $C$  было два перпендикуляра на  $BF$ , что невозможно).

Пусть  $N$  - центр  $W_1$ , тогда  $N \in AB$  и  $NB \perp BF$  (т.к.  $BF$  касается  $W_1$ ,  $NB$  - радиус, проведенный в точку касания). Тогда пусть  $\angle BCE = \alpha$ ,  $\cos \alpha = \frac{3}{4}$  по условию

$BE \perp BC \Rightarrow \angle EBC = 90^\circ$ .  $\angle AEB = 90^\circ$  (опирается на диаметр)  $\Rightarrow BC \parallel AE$  (равны накрест лежащие углы).

$\angle CBF = 90^\circ - \alpha \Rightarrow$  т.к.  $\angle EBC = 90^\circ$ , то  $\angle EBF = \alpha \Rightarrow \angle ABE = 90^\circ - \alpha$  (т.к.  $BF \perp AB$ ).

$\angle BEC = 90^\circ - \alpha$  ( $\angle EBC = 90^\circ$ )  $\Rightarrow AB \parallel EC$  (равны накрест лежащие углы)  $\Rightarrow EABC$  - параллелограмм (т.к.  $AB \parallel EC$  и  $BC \parallel AE$ ).

Пусть  $BC = a$ . Тогда  $\cos \alpha = \frac{a}{EC} \Rightarrow \frac{a}{EC} = \frac{3}{4} \Rightarrow EC = \frac{4}{3} a$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА

2 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\cos \angle = \frac{FC}{a} \Rightarrow \frac{FC}{a} = \frac{3}{4} \Rightarrow FC = \frac{3}{4}a. \text{ Тогда } EF = \frac{4}{3}a - \frac{3}{4}a = \frac{7}{12}a$$

$$\angle ABC = 180^\circ - \angle (\text{т.к. } AB \parallel EC) \Rightarrow -\cos \angle = \cos \angle ABC$$

$$AB = EC = \frac{4}{3}a$$

По теореме косинусов для  $\triangle ABC$ :

$$AC^2 = a^2 + \frac{16}{9}a^2 - 2 \cdot a \cdot \frac{4}{3}a \cdot (-\cos \angle)$$

$$AC^2 = a^2 + \frac{16}{9}a^2 - \frac{8}{3}a^2 \cdot \left(-\frac{3}{4}\right)$$

$$AC^2 = a^2 + \frac{16}{9}a^2 + 2a^2$$

$$AC^2 = \frac{43}{9}a^2 \Rightarrow AC = \frac{\sqrt{43}}{3}a$$

$$S_{EABC} = 2S_{ABC} = EC \cdot BF \text{ (диагональ } AC \text{ делит площадь } EABC \text{ пополам)}$$

$$S_{ABC} = \frac{1}{2} \cdot BD \cdot AC \text{ (} BD \perp AC \text{)}$$

Или получаем:

$$2 \cdot \frac{1}{2} \cdot BD \cdot \frac{\sqrt{43}}{3}a = BF \cdot \frac{4}{3}a \quad | \cdot 3$$

$$BD \cdot \sqrt{43}a = BF \cdot 4a$$

$$\frac{BF}{BD} = \frac{\sqrt{43}a}{4a} \Rightarrow \frac{BF}{BD} = \frac{\sqrt{43}}{4}$$

$$\text{Ответ: } BF:BD = \frac{\sqrt{43}}{4}$$

На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.



1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА

1 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

### Задача 6

Чтобы верхнее уравнение имело решение, нужно, чтобы хотя бы один из множителей был равен 0.

Пусть только

Рассмотрим скобку посередине:  $x^2 - 2xy + 3y^2$

$(x-y)^2 \geq 0$  всегда  $\Rightarrow x^2 + y^2 \geq 2xy$  всегда. Тогда, т.к.  $2y^2 \geq 0$ ,

$x^2 + 3y^2 \geq 2xy$ , то есть,  $x^2 - 2xy + 3y^2$  равно 0 только, если  $y=0$ . А если  $y=0$ , то и  $x=0$ . Поэтому пара  $(0; 0)$  является решением верхнего уравнения всегда и является единственным решением уравнения  $x^2 - 2xy + 3y^2 = 0$ .

Теперь пусть  $y - 2x + 1 = 0$ . Тогда  $y = 2x + 1$ . Если же  $y + x^2 - 4x + 1 = 0$ , то  $y = -x^2 + 4x - 1$ .

Пусть пара  $(0; 0)$  - решение системы. Тогда:

$$0 = 0 + a^2 - 1 \Rightarrow a^2 = 1 \Rightarrow a = \pm 1$$

При  $a = 1$ :

$$y = 2x$$

При  $y = 2x$  уравнение  $y - 2x + 1$  не имеет решений, уравнение  $y + x^2 - 4x + 1$  <sup>а для</sup>

$$x^2 - 2x + 1 \Rightarrow (x-1)^2 = 0 \Rightarrow x = 1 \text{ и } y = 2 \text{ будет решением}$$

системы. Поэтому при  $a = 1$  2 решения:  $(0; 0)$  и  $(1; 2)$

При  $a = -1$ :

$$y = 6x$$

Если  $y - 2x + 1 = 0$ , то  $4x + 1 = 0$  и  $x = -\frac{1}{4}$ ,  $y = -\frac{3}{2}$  это решение системы.

Если  $y + x^2 - 4x + 1 = 0$ , то  $x^2 + 2x + 1 = 0$  и  $x = -1$ ,  $y = -6$  это решение системы и вся система будет иметь 3 решения.



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
2 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Теперь пусть решение  $(0,0)$  у системы не будет.  
 $y=2x-1$  и  $y=(-2a+4)x+a^2-1$  на графике являются прямыми, а  $y=-x^2+4x-1$  это парабола с ветвями вниз.  
Чтобы вся система имела ровно 2 решения, то прямая  $y=2x-1$   $(-2a+4)x+a^2-1$  должна либо пересекать параболу в двух точках и быть параллельной прямой  $y=2x-1$ , либо должна пересекаться с прямой  $y=2x-1$  и касаться параболы.

- 1) Если прямая параллельна  $y=2x-1$ , то  $-2a+4=2$  и  $a=1$ , и тогда  $(0,0)$  будет решением  $\Rightarrow$  не рассматриваем этот случай.
- 2) Если прямая касается параболы, тогда  $D=0$  ( $D$ -дискриминант).

Уравнение  $-x^2+4x-1=(-2a+4)x+a^2-1$  имеет ровно 1 корень.

$$-x^2+4x-1=-2ax+4x+a^2-1$$

$$-x^2+2ax-1-a^2+1=0$$

$$-x^2+2ax-a^2=0 \quad | \cdot (-1)$$

$$x^2-2ax+a^2=0$$

$$D=4a^2-4a^2$$

$(x-a)^2=0 \Rightarrow x=a$  — всегда корень, при этом единственный. Тогда должно



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
\_ ИЗ \_

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются **отдельно**. Порча QR-кода недопустима!

$$\frac{3(y+1)}{y-1} < \frac{2(y^3+1)}{y^3-1}$$

$$3 \frac{y+1}{y-1} < \frac{2(y+1)(y^2+y+1)}{(y-1)(y^2+y+1)}$$

$$3 \frac{y+1}{y-1} < \frac{2(y+1)(y^2+y+1)}{(y-1)(y^2+y+1)}$$

AC спец. теор. кол

$$\frac{CF}{a} = \frac{3}{4}$$

$$3a = 4CF$$

$$CF = \frac{3}{4}a$$

$$EF = \frac{4}{3}a - \frac{3}{4}a$$

$$d \frac{3}{4} - \frac{3}{4} = \frac{16-9}{12} = \frac{7}{12}$$

$$3y^2 + 3y + 3 < 2y^2 - 2y + 2$$

$$4y^2 - 10y + 4 > 0$$

$$2y^2 - 5y + 2 > 0$$

$$D = 25 - 4 \cdot 2 \cdot 2 = 25 - 16 = 9$$

$$y_{1,2} = \frac{5 \pm 3}{4}$$

$$y_1 = 2 \quad y_2 = \frac{1}{2}$$

∇

3, 4, 5, 24

от 3 до 24

от 1 до 22

22 мая

$$3FC = 4a$$

$$FC = \frac{4}{3}a$$

$$\frac{3}{4} = \frac{a}{FC}$$

$$y \in -0,5; 2; 1,2; +\infty$$

$$\cos \angle BCE = \frac{3}{4}$$

$$\frac{BF}{BD}$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
\_ ИЗ \_

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$9 \log_3 y (\log_3 x + \log_3 y) + \log_3 x (\log_3 x + \log_3 y) - 16 \log_3 x \log_3 y = 0$$

$$9 \log_3 y \cdot \log_3 x + 9 \log_3^2 y + \log_3^2 x + \log_3 x + \log_3 x \log_3 y - 16 \log_3 x \log_3 y = 0$$

$$9 \log_3^2 y + \log_3^2 x - 6 \log_3 y \log_3 x = 0$$

$$\log_3^2 x - 6 \log_3 x \cdot \log_3 y + 3 \log_3^2 y + (3 \log_3 y)^2 = 0$$

$$(3 \log_3 y + \log_3 x)^2 = 0$$

$$\boxed{y^3 = x}$$

$$\forall y \geq 2$$

$$3 \log_3 y + \log_3 x = 0$$

$$\log_3 y^3 + \log_3 x = 0$$

$$\log_3 (y^3 \cdot x) = 0$$

$$\begin{matrix} x > 0 \\ y > 0 \end{matrix}$$

$$\log x = 2.7$$

$$\log_3 a = 0$$

$$a(-3)^6 = a$$

$$\begin{matrix} 2 & 7 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & \dots & 0 \end{matrix}$$

$$\frac{3y+3}{y-1} < \frac{7y^2+7}{y^3-1}$$

$$\boxed{y^3 = x = 1}$$

$$\frac{3}{y-1} < 2 + \frac{7}{x-1}$$

$$3 + \frac{6}{y-1} < 2 + \frac{14}{x-1}$$

$$\begin{matrix} x > 0 \\ y > 0 \end{matrix}$$

$$y^3 x = 1$$

$$= \log_3 1$$

$$\log_a(xy) = \log_a x + \log_a y$$

$$a^{\log_a(xy)} = xy$$

$$a^{\log_a x - x}$$

$$a^{\log_a y = y}$$

$$a^{\log_a x + \log_a y}$$

$$\begin{matrix} x \neq 1 \\ y \neq 1 \end{matrix}$$

$$\log_2 y^3 = \log_3 x$$

$$\boxed{y^3 = x}$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

- 1  2  3  4  5  6  7

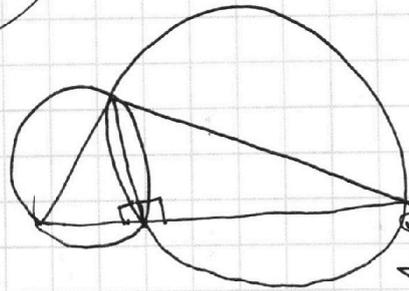
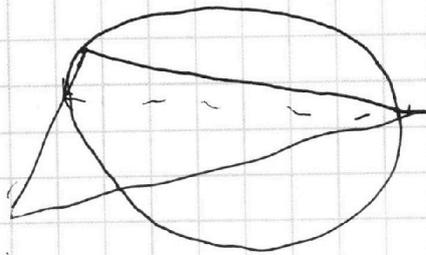
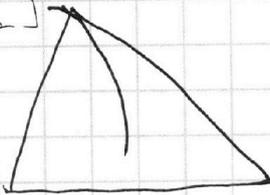
СТРАНИЦА  
\_ ИЗ \_

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$2x - 1 = -2ax + 4x + a^2 - 1$$

$$2ax - 2x = a^2$$

$$x = \frac{a^2}{2a-1}$$



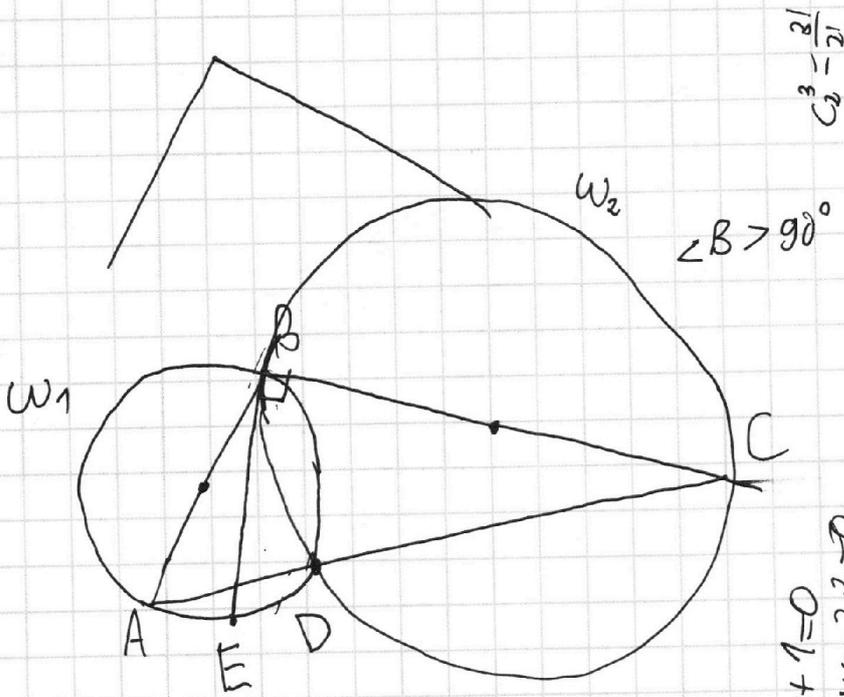
$$y - 2x + 1 = 0$$

$$y = 2x - 1$$

$$2x - 1 = (-2a + 4)x + a^2 - 1$$

$$\begin{cases} y - 2x + 1 = 0 \\ x^2 - 2xy + 3y^2 = 0 \\ y + x^2 - 4x + 1 = 0 \end{cases}$$

$$y = (-2a + 4)x + a^2 - 1$$



$$\omega_3 = \frac{2}{2}$$

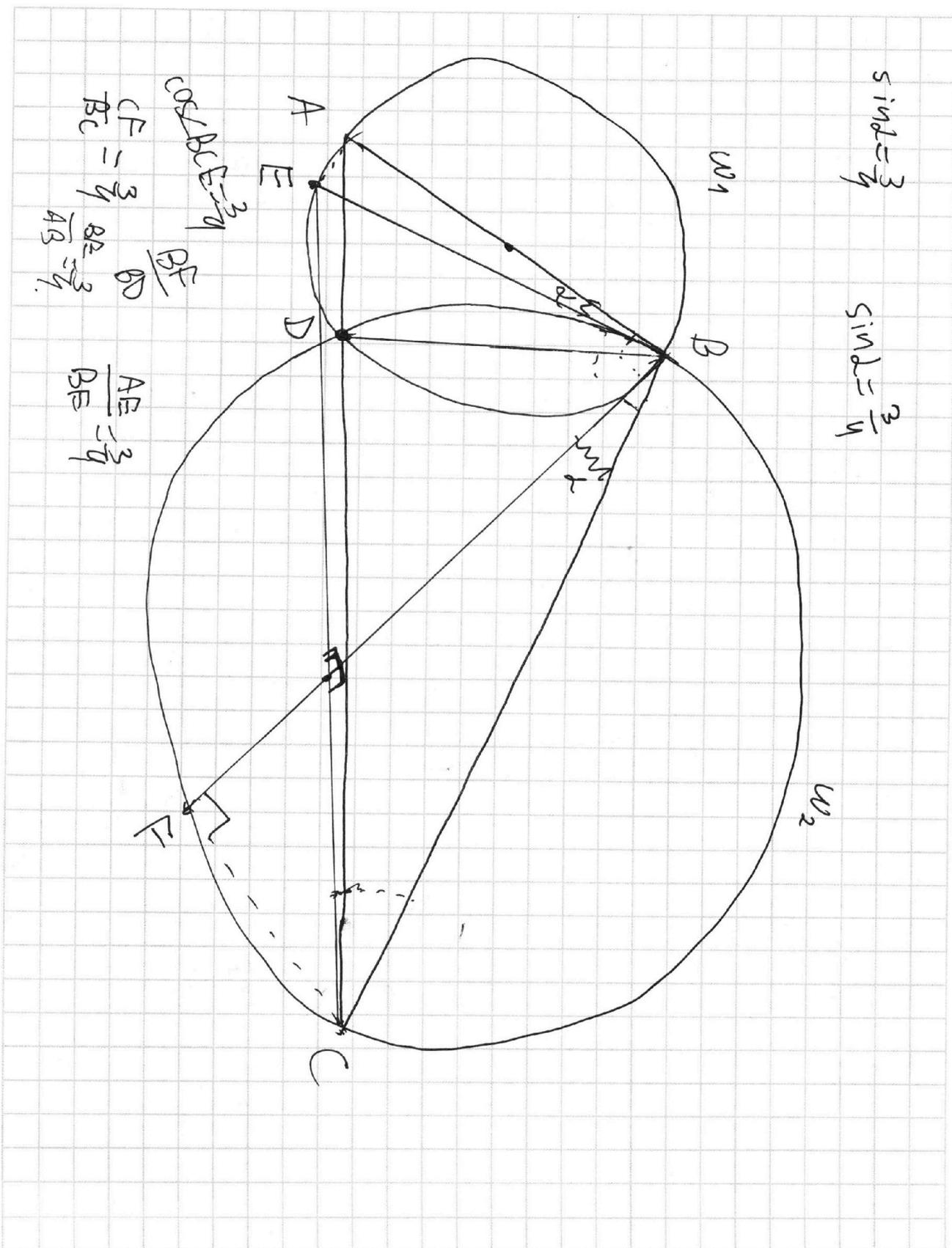


На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении **каждой задачи отдельно**.

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>						

СТРАНИЦА  
\_\_ ИЗ \_\_

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. **Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно.** Порча QR-кода недопустима!





На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
\_\_ ИЗ \_\_

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$f(x) = x^2 + ax + b$$

$$f(x) = 0$$

$$f(x) = -2x^2 \leftarrow \text{один корень.}$$

$$x^2 + ax + b = -6$$

$$f(x) = -6 \leftarrow \text{один корень.}$$

$$x^2 + ax + (b+6) = 0$$

$$x^2 + ax + b = -2x^2$$

$$D = a^2 - 4 \cdot 1 \cdot (b+6) = 0$$

$$3x^2 + ax + b = 0$$

$$a^2 - 4b - 24$$

$$D = 0$$

$$a^2 - 4 \cdot 3b$$

$$x^2 + 6x + 3 = -6 \quad | +6$$

$$x^2 + ax + b = 0$$

$$\begin{cases} a^2 - 12b = 0 \\ a^2 - 4b - 24 = 0 \end{cases}$$

$$x^2 + 6x + 9 = 0$$

$$x_1 + x_2 = -a$$

$$\begin{cases} a^2 = 12b \\ a^2 = 4b + 24 \end{cases}$$

$$(x+3)^2 = 0$$

$$\boxed{x = -3}$$

$$3x^2 + 6x + 3 = 0 \quad | :3$$

$$a = x^2 + 2x + 1 = 0$$

$$(x+1)^2 = 0$$

~~x1~~

$$12b = 4b + 24$$

$$8b = 24 \quad | :8$$

36

$$x^2 + 6x + 3$$

$$\boxed{b = 3}$$

$$x^2 - 6x + 3$$

$$a^2 - 12 \cdot 3 = 0$$

$$x^2 - 6x + 3 = -6$$

$$x^2 - 6x + 9$$

DA

$$D = 36 - 4 \cdot 3 =$$

$$a^2 = 36$$

$$(x-3)^2 \quad x = 3$$

$$6 \pm \sqrt{24} = 36 - 12 = 24$$

$$\boxed{a = \pm 6}$$

$$6 - x_{1,2} = \frac{-6 \pm \sqrt{24}}{2}$$

$$x \quad 3x^2 - 6x + 3 = 6$$

$$6 \text{ или } -6. \quad x_2 = \frac{-6 \pm \sqrt{24}}{2} \quad \frac{-12}{2} = -6$$

$$x^2 - 2x + 1 = 0$$

$$(x-1)^2 = 0$$

$$x = 1$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
\_\_ ИЗ \_\_

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются **отдельно**. Порча QR-кода недопустима!

$$n = 5^{151} \cdot 7^{600}$$

$$x = 5^a \cdot 7^b$$

$$n = x \cdot y$$

$$y = 5^c \cdot 7^d$$

$$y : x$$

$$c \geq a$$

$$a + c = 151$$

$$d \geq b$$

$$b + d = 600$$

$$76 \cdot 151$$

c от 76 до 151

1 ... 76

d от 300 до 600

1 ... 301

$$76 \cdot 301$$

$$\begin{array}{r} 76 \\ \times 301 \\ \hline \end{array}$$

$$300 \cdot 600$$

$$280$$

$$76$$

$$600$$

$$1$$

$$280$$

$$300 \cdot 600$$

$$301$$

$$\begin{array}{r} 301 \cdot 76 \\ \hline 1806 \\ 2107 \\ \hline \end{array}$$

$$1 \cdot 76$$

$$0$$

$$\begin{array}{r} \times 301 \\ 76 \\ + 1806 \\ 2107 \\ \hline 22876 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 21070 \\ 1806 \\ + 1806 \\ \hline 22876 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} \times 301 \\ 76 \\ + 1806 \\ 2107 \\ \hline 22876 \end{array}$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
\_ ИЗ \_

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

xy - не введе.

$$\frac{3y-3+6}{y-1} < \frac{7x-7+14}{x-1}$$

$$3 + \frac{6}{y-1} < 7 + \frac{14}{x-1}$$

$$\frac{6}{y-1} < 4 + \frac{14}{x-1}$$

$$\frac{6}{y-1} \leq 4M$$

x > 0

$$9 \log_3 x + \log_3 3 - 16 \log_3 y - 3 = 0$$

$$\frac{9}{\log_3 x} + \frac{1}{\log_3 y} - \frac{16}{\log_3 x + \log_3 y} - 3 = 0$$

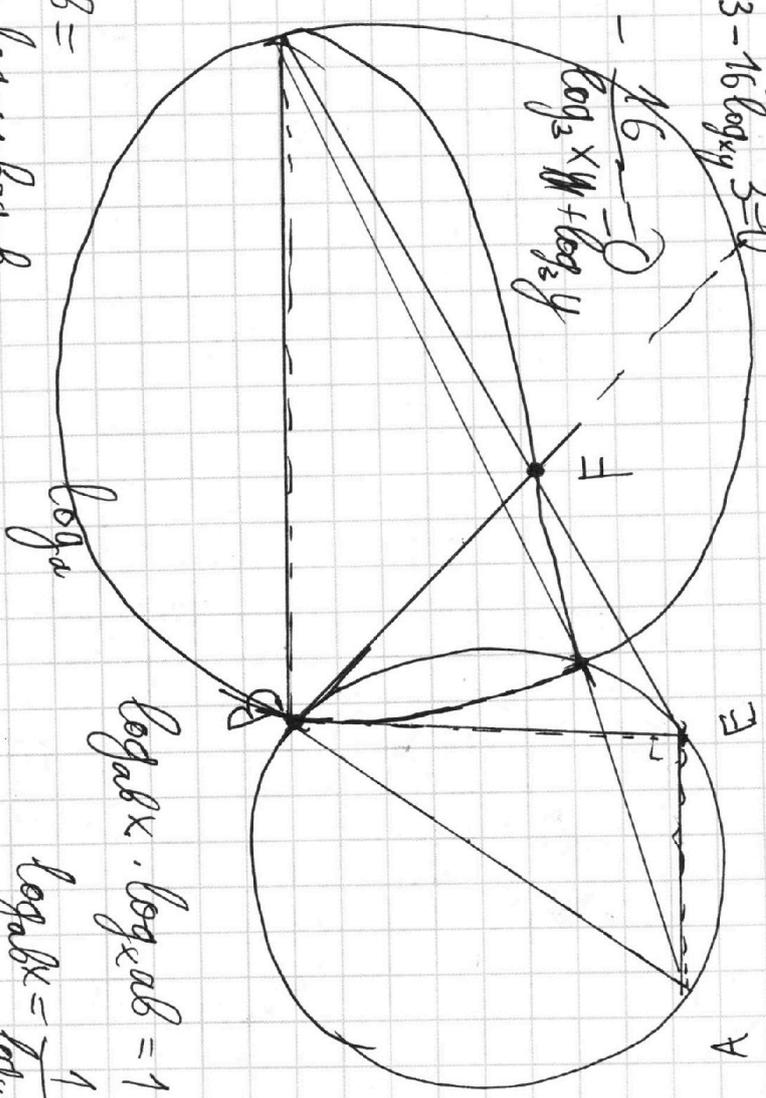
$$\log_{ab} x$$

$$\log_c ab = \log_c a + \log_c b$$

$$\log_a b \cdot \log_b a = 1$$

$$\log_a b = \frac{1}{\log_b a}$$

$$\frac{\log_3 3}{\log_3 x \log_3 x} = \log_3 x$$





На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
\_ ИЗ \_

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



Handwritten solution on grid paper for a geometry problem involving a circle and a triangle.

**Diagram:** A circle with center  $O$  and radius  $R = 120$ . A triangle  $ABC$  is inscribed in the circle. Point  $D$  is on  $BC$ ,  $E$  is on  $AC$ , and  $F$  is on  $AB$ . Lines  $AD$ ,  $BE$ , and  $CF$  are drawn, intersecting at point  $M$ . Right angle symbols are shown at  $D$ ,  $E$ , and  $F$ . Other points  $N$  and  $K$  are marked on the circle.

**Handwritten Equations and Notes:**

- $4 \cdot 20 = 5 \cdot 16$
- $80 = 80$
- $5 \cdot 24 = 120$
- $4 \cdot 5 = 5 \cdot 4$
- $5 \cdot 7 = 35$
- $a = 7$
- $b = 5$
- $a = \text{НОД}(a; b) \cdot k$
- $b = \text{НОД}(a; b) \cdot m$
- $k > 5$
- $m > 5$
- $k = \text{НОД}(a; b) \cdot m$
- $n = \text{НОД}(a; b) \cdot 1$
- $n = \text{НОД}$
- $(k-5)$
- $\text{НОД}(a; b)$
- $n \cdot \text{НОД}(a; b) \cdot 1 \cdot 1 = 120 \cdot (a-b)^2$
- $n \cdot \text{НОД}(a; b) = \text{НОД}(a; b)^2 \cdot (k-5)^2$
- $n = \text{НОД}(a; b) \cdot (k-5)^2$
- $\text{НОД}$
- $n \cdot 1 = 1$
- $(k-5)^2 = 1$
- $(k-5)^2 = 1$
- $k = 6$
- $(a; b) = 4$
- $k = 7$
- $(a; b) = 1$
- $a \neq b$
- $4b = 5(a-b)^2$
- $5 \cdot a = \text{НОД}(a; b)$
- $\frac{BF}{BD}$
- $\frac{BF}{BD}$
- $\text{пусть } a \neq b$

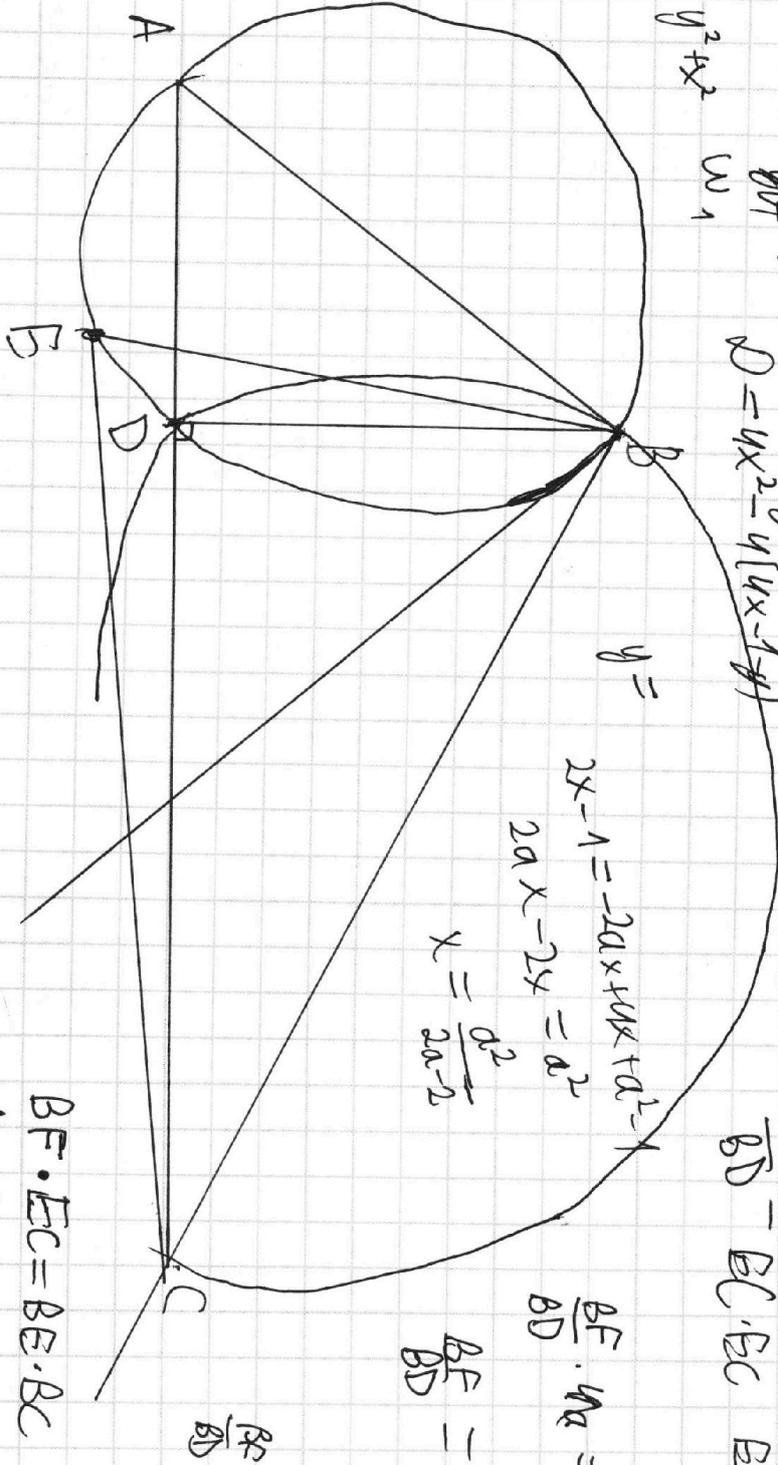


На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
\_\_ ИЗ \_\_

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



$$BE \cdot AE = BF \cdot EC \quad \frac{9}{9} + \frac{16}{9} + \frac{18}{9} = \frac{18+16+19}{9} = 2 \quad 34+9=43$$

$$d^2 - 2ax + 1x - 1 - y = 0$$

$$D = 4x^2 - 4(1x - 1 - y)$$

$$y^2 + x^2 = 1$$

$$y = 2x - 1 = -2ax + 1x + a^2 - 1$$

$$2ax - 2x = a^2$$

$$x = \frac{a^2}{2a-2}$$

$$\frac{BF}{BD} = \frac{BC \cdot AC}{BC \cdot EC} = \frac{BC \cdot AC}{BC^2}$$

$$\frac{BF}{BD} \cdot 4a = \sqrt{13}a$$

$$\frac{BF}{BD} = \frac{\sqrt{13}a}{4a}$$

$$AB \cdot AC \cdot \frac{BD}{AB}$$

$$\frac{BE}{3y^2 + x^2 - 2xy}$$

$$\sin \angle BCE = \frac{BF}{BC} = \frac{BE}{EC}$$

$$BF \cdot EC = BE \cdot BC$$

$$AC \cdot BD = EC \cdot BE$$

$$\frac{BF}{BD} \cdot \frac{EC}{AC} = \frac{BE}{BC}$$

$$AC \cdot BD = EC \cdot BE = \frac{BF}{BD} \cdot \frac{EC}{AC} = \frac{BC}{EC}$$