



МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

11 КЛАСС. Вариант 12



1. [3 балла] Дан приведённый квадратный трёхчлен $f(x)$ такой, что уравнение $f(x) = -2x^2$ имеет единственное решение, а также уравнение $f(x) = -6$ имеет единственное решение. Найдите сумму корней уравнения $f(x) = 0$.
2. [3 балла] Сколькими способами можно представить число $n = 5^{151} \cdot 7^{600}$ в виде произведения двух натуральных чисел x и y , где y делится на x ?
3. [5 баллов] Найдите количество пар целых чисел $(x; y)$, удовлетворяющих системе

$$\begin{cases} 3 \log_x 27 + \log_y 3 + 8 \log_{xy} \frac{1}{9} = 0, \\ \frac{3y+3}{y-1} < \frac{7x+7}{x-1}, \\ y \leq 24. \end{cases}$$

4. [5 баллов] Найдите все пары натуральных чисел $(a; b)$ такие, что

$$\begin{cases} 4 \cdot \min(a; b) = 5(a - b)^2, \\ 5 \cdot \max(a; b) = \text{НОК}(a; b). \end{cases}$$

5. [5 баллов] На сторонах BA и BC треугольника ABC с тупым углом B как на диаметрах построены окружности ω_1 и ω_2 соответственно, пересекающиеся в точках B и D . Хорда BE окружности ω_1 перпендикулярна BC , а хорда BF окружности ω_2 перпендикулярна CE и касается ω_1 . Найдите отношение $BF : BD$, если $\cos \angle BCE = \frac{3}{4}$.
6. [5 баллов] При каких значениях параметра a система

$$\begin{cases} (y + x^2 - 4x + 1)(x^2 - 2xy + 3y^2)(y - 2x + 1) = 0, \\ y = (-2a + 4)x + a^2 - 1 \end{cases}$$

имеет ровно 2 решения?

7. [6 баллов] В прямую четырёхугольную призму $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ вписана сфера ω . Луч с началом в точке A пересекает ω в точках P и Q , а луч с началом в точке C пересекает ω в точках M и N . Пусть O — точка пересечения диагоналей четырёхугольника $ABCD$. Найдите объём призмы $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ и расстояние ρ от центра ω до плоскости PAC , если известно, что $AO = 1$, $BO = 2$, $CO = 11$, $AP = \frac{2}{\sqrt{5}}$, $AQ = 2\sqrt{5}$, $CM = 4\sqrt{5}$, $CN = 5\sqrt{5}$.



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☒ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА

4 из 4

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Задача 1

Пусть $f(x) = x^2 + px + q$ (старший коэффициент равен 1, т.к. трёхлеи приведённый).

Тогда уравнения $x^2 + px + q = -2x^2$ и $x^2 + px + q = -6$ и оба имеют единственное решение. Т.к. оба этих уравнения квадратные и имеют единственное решение, то дискриминант каждого из них равен 0. (Формула дискриминанта: $D = b^2 - 4ac$ для уравнения $ax^2 + bx + c = 0$).

$$x^2 + px + q = -2x^2$$

$$3x^2 + px + q = 0$$

$$D = p^2 - 4 \cdot 3q = p^2 - 12q$$

$$x^2 + px + q = -6$$

$$x^2 + px + (q+6) = 0$$

$$D = p^2 - 4(q+6) = p^2 - 4q - 24$$

Получаем систему:

$$\begin{cases} p^2 - 12q = 0 \\ p^2 - 4q - 24 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} p^2 = 12q \\ p^2 = 4q + 24 \end{cases} \Rightarrow 12q = 4q + 24$$

$$8q = 24$$

$$q = 3. \text{ Тогда } p^2 = 36 \text{ и } p = 6 \text{ или } p = -6.$$

Под условие подходят $p = 6$ и $p = -6$ оба. По теореме Виета для уравнения $f(x) = 0$ ($x^2 + px + q = 0$) сумма корней является равной $-p$. То есть, сумма коэффициентов корней уравнения $f(x) = 0$ равна -6 или 6 .

Ответ: $-6; 6$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☒ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА
1 из 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Задача 2

$n = 5^{151} \cdot 7^{600}$ и $n = xy$. В разложении числа n на простые множители есть только простые числа 5 и 7. Тогда числа x и y можно представить в следующем виде:

$$x = 5^a \cdot 7^b$$

$$y = 5^c \cdot 7^d, \text{ где } a, b, c, d - \text{натуральные числа или } 0.$$

$$y : x \text{ } y \text{ делится на } x \Rightarrow \frac{5^c \cdot 7^d}{5^a \cdot 7^b} = 5^{c-a} \cdot 7^{d-b} - \text{целое натуральное число.}$$

Тогда обязательно $c \geq a$ и $d \geq b$. При этом $c + a = 151$ и $b + d = 600$. Чтобы найти число способов представления n , надо найти число ~~способов~~ всевозможных y (x тогда тоже определён).

$$c \geq a \text{ и } c + a = 151 \Rightarrow c \in [76; 151] \text{ (т.к. } a \text{ и } c - \text{натур. числа или } 0).$$

$$d \geq b \text{ и } d + b = 600 \Rightarrow d \in [300; 600] \text{ (т.к. } b \text{ и } d - \text{натур. числа или } 0).$$

Во всевозможных c будет 76, во всевозможных d будет 301. Тогда во всевозможных y будет $76 \cdot 301 = 22876$ и будет 22876 способов представить число n .

Ответ: 22876



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☒ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА
2 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$3 < 7 \cdot \frac{y^2 - y + 1}{y^2 + y + 1} \quad | \cdot (y^2 + y + 1) > 0$$

$$3y^2 + 3y + 3 < 7y^2 - 7y + 7$$

$$4y^2 - 10y + 4 > 0 \quad | :2$$

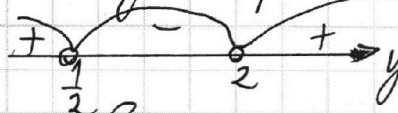
$$2y^2 - 5y + 2 > 0$$

Корни квадратного трёхчлена $2y^2 - 5y + 2$:

$$D = 25 - 4 \cdot 2 \cdot 2 = 9 = 3^2$$

$$y_{1,2} = \frac{5 \pm 3}{4}, \text{ то есть корни: } 2 \text{ и } \frac{1}{2}.$$

Метод интервалов:

 Тогда $y \in (-\infty; \frac{1}{2}) \cup (2; +\infty)$.

Условием $y \geq 2$ и y из условия неравенства $y \leq 24$ получаем, что $y \in [2; 24]$, $y \in \mathbb{Z} \Rightarrow y \in [3; 24]$. Тогда

Каждый y из этого промежутка имеет соответствующий $x = y^3$, то есть и каждая такая пара будет удовлетворять всей системе. В промежутке $[3; 24]$ будет 22 числа, то есть 22 пары чисел $(x; y)$. ($x = y^3$ тоже целое число, если y - целое).

Ответ: 22



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☒ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА
1 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Задача 3

Разберёмся сначала с верхним ~~уравнением~~ уравнением, используя формулы: $\log_a b = \frac{1}{\log_b a}$, $\log_a bc = \log_a b + \log_a c$,
и $\log_a b^c = c \cdot \log_a b$

$$3 \log_x 27 + \log_y 3 + 8 \log_{xy} \frac{1}{9} = 0$$

$$\log_x 3 + \log_y 3 - 16 \log_{xy} 3 = 0$$

$$\frac{\log_x 3}{\log_3 x} + \frac{\log_y 3}{\log_3 y} - \frac{16 \log_{xy} 3}{\log_3 xy} = 0 ; \log_3 xy = \log_3 x + \log_3 y$$

$$\frac{9 \log_3 y \log_3 x + 9 \log_3^2 y + \log_3^2 x + \log_3 x \log_3 y - 16 \log_3 x \log_3 y}{\log_3 x \cdot \log_3 y \cdot \log_3 xy} = 0$$

Дробь равна 0, когда числитель равен 0. Получаем:

$$\log_3^2 x - 6 \log_3 x \log_3 y + (3 \log_3 y)^2 = 0$$

$$(3 \log_3 y - \log_3 x)^2 = 0$$

$$\log_3 y^3 = \log_3 x$$

$$\boxed{x = y^3}$$

Подставим теперь это в среднее неравенство:

$$\frac{3y+3}{y-1} < \frac{7y^3+7}{y^3-1}$$

$$3(y+1) \cdot \frac{y+1}{y-1} < 7 \cdot \frac{y^3+1}{y^3-1}$$

$$3 \cdot \frac{y+1}{y-1} < 7 \cdot \frac{(y+1)(y^2-y+1)}{(y-1)(y^2+y+1)} \quad | : \frac{y+1}{y-1} > 0$$

ОДЗ: $x > 0$, $y > 0$, $y \neq 1$, $x \neq 1$. Также x и y — целые числа.
Поэтому $x \geq 2$ и $y \geq 2$. Тогда $y+1 > 0$ и $y-1 > 0$ и $\frac{y+1}{y-1} > 0$, $y^2+y+1 > 0$ так как $y > 0$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☒ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА

1 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Задача 4

$$\begin{cases} 4. \min(a; b) = 5(a-b)^2 \\ 5. \max(a; b) = \text{НОК}(a; b) \end{cases}$$

Если $a=b$, то $\max(a; b)=a$ и $\text{НОК}(a; b)=a$ и получится, что $5a=a$, что невозможно при $a \in \mathbb{N}$. Так что $a \neq b$.

Заметим, что если пара $(x; y)$ удовлетворяет условию, то пара $(y; x)$ тоже будет удовлетворять. Поэтому можно решить задачу при условии, что $a > b$ ($a \neq b$, что доказано выше), после чего, добавив к ответу все пары, противоположные уже получившимся (если есть ответ $(x; y)$, то добавить к ответу $(y; x)$). Тогда получаем систему:

$$\begin{cases} 4b = 5(a-b)^2 \\ 5a = \text{НОК}(a; b) \end{cases}$$

Пусть $\text{НОД}(a; b) = k$. Тогда пусть $a = k \cdot t$, $b = k \cdot m$, где t и m взаимнопросты и $t > m$ (т.к. $a > b$). Тогда $\text{НОК}(a; b) = k \cdot t \cdot m$.

Запишем нижнее уравнение в другом виде:

$$5 \cdot kt = k \cdot t \cdot m \quad | : (kt) \quad (kt \neq 0)$$

$$m = 5$$

Теперь запишем верхнее уравнение в другом виде:

$$4 \cdot km = 5(k t - k m)^2$$

20k | 4

$$4 \cdot 5 \cdot k = 5 \cdot k^2 (t - m)^2 \quad | : (5k)$$

$$k(t-5)^2 = 4$$

~~Все числа в уравнении натуральны~~

k и t строго натуральные, при этом $t > 5 = m$, поэтому числа k и $(t-5)^2$ натуральные. 4 можно в виде произведения двух натуральных чисел можно представить тремя способами:



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

☐☐☐☒☐☐☐

СТРАНИЦА
2 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

или: $2 \cdot 2$ или $4 \cdot 1$ или $1 \cdot 4$. Поэтому рассмотрим следующие решения:

$$1) \begin{cases} k=2 \\ (t-5)^2=2 \end{cases} \quad \text{или} \quad 2) \begin{cases} k=1 \\ (t-5)^2=4 \end{cases} \quad \text{или} \quad 3) \begin{cases} k=4 \\ (t-5)^2=1 \end{cases}$$

$$1) (t-5)^2=2 \Rightarrow t-5=\sqrt{2} \quad (t>5) \Rightarrow \text{решений нет, т.к. } t \in \mathbb{N}$$

$$2) \begin{cases} k=1 \\ (t-5)^2=4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} k=1 \\ t=7 \quad (\text{т.к. } t>5) \end{cases}$$

Тогда получаем пару $a=7$ и $b=5$

$$3) \begin{cases} k=4 \\ (t-5)^2=1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} k=4 \\ t=6 \quad (\text{т.к. } t>5) \end{cases}$$

Тогда получаем пару $a=24$ и $b=20$

Подходят также пары $a=5$ и $b=7$; $b=24$ и $a=20$.
(было сказано вначале).

Ответ: $(7; 5), (24; 20), (5; 7), (20; 24)$.

Пусть $BC = a$. Тогда $\cos \alpha = \frac{a}{EC} \Rightarrow \frac{a}{EC} = \frac{3}{4} \Rightarrow EC = \frac{4}{3} a$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.



СТРАНИЦА

2 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\cos \angle = \frac{FC}{a} \Rightarrow \frac{FC}{a} = \frac{3}{4} \Rightarrow FC = \frac{3}{4}a. \text{ Тогда } EF = \frac{4}{3}a - \frac{3}{4}a = \frac{7}{12}a$$

$$\angle ABC = 180^\circ - \angle (\text{т.к. } AB \parallel EC) \Rightarrow \cos \angle = \cos \angle ABC$$

$$AB = EC = \frac{4}{3}a$$

По теореме косинусов для $\triangle ABC$:

$$AC^2 = a^2 + \frac{16}{9}a^2 - 2 \cdot a \cdot \frac{4}{3}a \cdot (-\cos \angle)$$

$$AC^2 = a^2 + \frac{16}{9}a^2 - \frac{8}{3}a^2 \cdot (-\frac{3}{4})$$

$$AC^2 = a^2 + \frac{16}{9}a^2 + 2a^2$$

$$AC^2 = \frac{43}{9}a^2 \Rightarrow AC = \frac{\sqrt{43}}{3}a$$

$$S_{EABC} = 2S_{ABC} = EC \cdot BF \text{ (диагональ } AC \text{ делит площадь } EABC \text{ пополам)}$$

$$S_{ABC} = \frac{1}{2} \cdot BD \cdot AC \text{ (} BD \perp AC \text{)}$$

Аналогично:

$$2 \cdot \frac{1}{2} \cdot BD \cdot \frac{\sqrt{43}}{3}a = BF \cdot \frac{4}{3}a \quad | \cdot 3$$

$$BD \cdot \sqrt{43}a = BF \cdot 4a$$

$$\frac{BF}{BD} = \frac{\sqrt{43}a}{4a} \Rightarrow \frac{BF}{BD} = \frac{\sqrt{43}}{4}$$

$$\text{Ответ: } BF:BD = \frac{\sqrt{43}}{4}$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

☐☐☐☐☐☒☐

СТРАНИЦА

1 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Задача 6

Чтобы верхнее уравнение имело решение, нужно, чтобы хотя бы один из множителей был равен 0.

Пусть $y=0$

Рассмотрим скобку посередине: $x^2 - 2xy + 3y^2$

$(x-y)^2 \geq 0$ всегда $\Rightarrow x^2 + y^2 \geq 2xy$ всегда. Тогда, т.к. $2y^2 \geq 0$,

$x^2 + 3y^2 \geq 2xy$, то есть, $x^2 - 2xy + 3y^2$ равно 0 только, если $y=0$. А если $y=0$, то и $x=0$. Поэтому пара $(0; 0)$ является решением верхнего уравнения всегда и является единственным решением уравнения $x^2 - 2xy + 3y^2 = 0$.

Теперь пусть $y - 2x + 1 = 0$. Тогда $y = 2x + 1$. Если же $y + x^2 - 4x + 1 = 0$, то $y = -x^2 + 4x - 1$.

Пусть пара $(0; 0)$ - решение системы. Тогда:

$$0 = 0 + a^2 - 1 \Rightarrow a^2 = 1 \Rightarrow a = \pm 1$$

При $a=1$:

$$y = 2x$$

При $y = 2x$ уравнение $y - 2x + 1$ не имеет решений, уравнение $y + x^2 - 4x + 1$ для

$x^2 - 2x + 1 \Rightarrow (x-1)^2 = 0 \Rightarrow x = 1$ и $y = 2$ будет решением системы. Поэтому при $a=1$ 2 решения: $(0; 0)$ и $(1; 2)$

При $a=-1$:

$$y = 6x$$

Если $y - 2x + 1 = 0$, то $4x + 1 = 0$ и $x = -\frac{1}{4}$, $y = -\frac{3}{2}$ это решение системы.

Если $y + x^2 - 4x + 1 = 0$, то $x^2 + 2x + 1 = 0$ и $x = -1$, $y = -6$ это решение системы и вся система будет иметь 3 решения.



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☒	☐

СТРАНИЦА
2 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Теперь пусть решение^а $(0,0)$ у системы не будет.
 $y=2x-1$ и $y=(-2a+4)x+a^2-1$ на графике являются прямыми, а $y=-x^2+4x-1$ это парабола с ветвями вниз.
Чтобы вся система имела ровно 2 решения, то прямая $y=2x-1$ $(-2a+4)x+a^2-1$ должна либо пересекать параболу в двух точках и быть параллельной прямой $y=2x-1$, либо должна пересекаться с прямой $y=2x-1$ и касаться параболы.

- 1) Если прямая параллельна $y=2x-1$, то $-2a+4=2$ и $a=1$, и тогда $(0,0)$ будет решением $\Rightarrow$ не рассматриваем этот случай.
- 2) Если прямая касается параболы, тогда $D=0$ (D -дискриминант).

Уравнение $-x^2+4x-1=(-2a+4)x+a^2-1$ имеет ровно 1 корень.

$$-x^2+4x-1=-2ax+4x+a^2-1$$

$$-x^2+2ax-1-a^2+1=0$$

$$-x^2+2ax-a^2=0 \quad | \cdot (-1)$$

$$x^2-2ax+a^2=0$$

$$D=4a^2-4a^2=0$$

$(x-a)^2=0 \Rightarrow x=a$ — всегда корень, при этом единственный. Тогда должно



На одной странице можно оформлять **только одну задачу**. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\frac{3(y+1)}{y-1} < \frac{2(y^3+1)}{y^3-1}$$
$$3 \frac{y+1}{y-1} < 2 \frac{(y+1)(y^2+y+1)}{(y-1)(y^2+y+1)}$$

AC - спец. теор. код

$$\frac{CF}{a} = \frac{3}{4}$$
$$3a = 4CF$$
$$CF = \frac{3}{4}a$$
$$EF = \frac{4}{3}a - \frac{3}{4}a$$

$$y \cdot \frac{3}{4} - \frac{3}{4} = \frac{16-9}{12} = \frac{7}{12}$$

$$3y^2 + 3y + 3 < 2y^2 - 2y + 2$$

$$4y^2 - 10y + 4 > 0$$

$$2y^2 - 5y + 2 > 0$$

$$D = 25 - 4 \cdot 2 \cdot 2 = 25 - 16 = 9$$
$$y_{1,2} = \frac{5 \pm 3}{4}$$

$$y_{1,2} = \frac{5 \pm 3}{4}$$

$$y \in -0,2; 2,5$$

$$\frac{3}{4} = \frac{CF}{a}$$

$$3FC = 4a$$

$$FC = \frac{4}{3}a$$

$$y_1 = 2, y_2 = \frac{1}{2}$$

$$от 3 до 24$$

$$от 1 до 22$$

22 макс

$$BCFE = \frac{3}{4}a$$

$$\frac{BF}{a}$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА
— ИЗ —

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$9 \log_3 y (\log_3 x + \log_3 y) + \log_3 x (\log_3 x + \log_3 y) - 16 \log_3 x \log_3 y = 0$$

$$9 \log_3 y \cdot \log_3 x + 9 \log_3^2 y + \log_3^2 x + \log_3 x + \log_3 x \log_3 y - 16 \log_3 x \log_3 y = 0$$

$$9 \log_3^2 y + \log_3^2 x - 6 \log_3 y \log_3 x = 0$$

$$\log_3^2 x - 6 \log_3 x \cdot \log_3 y + 3 \log_3^2 y + (3 \log_3 y)^2 = 0$$

$$(3 \log_3 y + \log_3 x)^2 = 0$$

$$\boxed{y^3 = x}$$

$$\forall y \geq 2$$

$$3 \log_3 y + \log_3 x = 0$$

$$\log_3 y^3 + \log_3 x = 0$$

$$\log_3 (y^3 \cdot x) = 0$$

$$x > 0$$

$$\log x \geq 7$$

$$\log x \geq 7$$

$$\log_{-3} a = 0$$

$$a(-3)^0 = a$$

$$\boxed{y^3 \cdot x = 1}$$

$$y^3 \cdot x = 1$$

$$\frac{3y+3}{y-1} < \frac{7y^3+7}{y^3-1}$$

$$\boxed{y^3 = \frac{1}{x}}$$

$$\frac{3}{y-1} < 2 + \frac{7}{x-1}$$

$$3 + \frac{6}{y-1} < 2 + \frac{14}{x-1}$$

$$x > 0$$

$$y^3 x = 1$$

$$= \log_3 \frac{1}{x}$$

$$a \log_3 y = y$$

$$a \log_3 x + \log_3 y$$

$$x \neq 1$$

$$y \neq 1$$

$$\log_3(xy) = \log_3 x + \log_3 y$$

$$a \log_3(xy) = xy$$

$$a \log_3 x = x$$

$$\log_3 y^3 = \log_3 x$$

$$\boxed{y^3 = x}$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

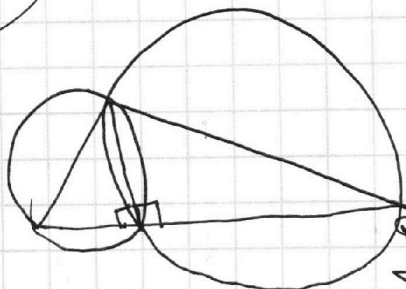
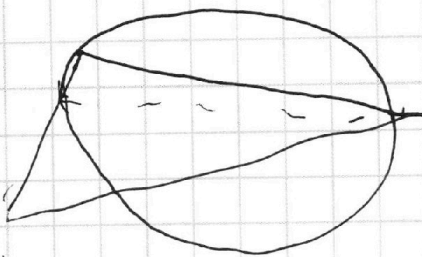
СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$2x-1 = -2ax+4x+a^2-1$$

$$2ax-2x = a^2$$

$$x = \frac{a^2}{2a-1}$$



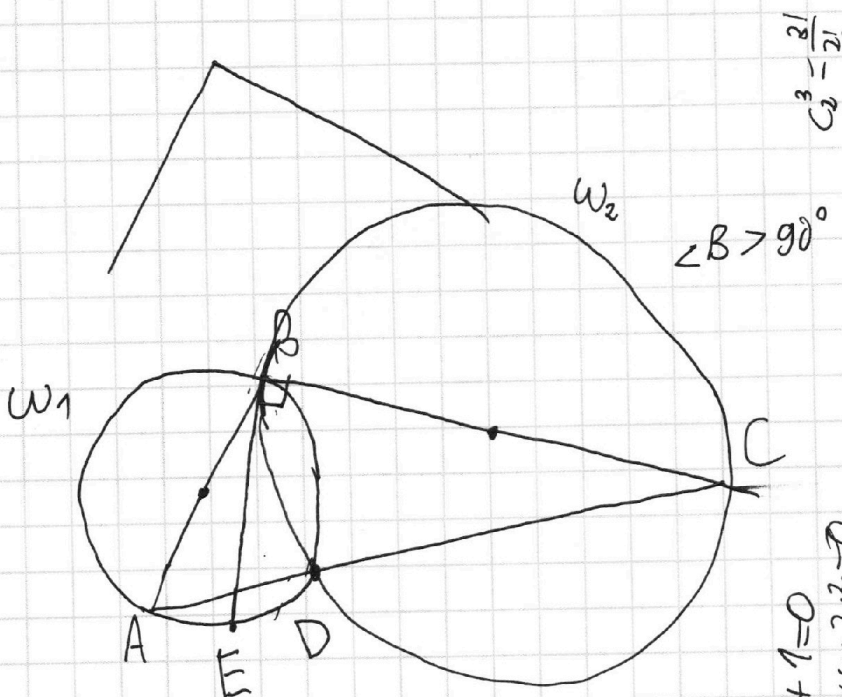
$$y-2x+1=0$$

$$y = 2x-1$$

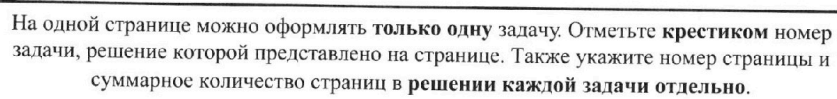
$$2x-1 = (-2a+4)x+a^2-1$$

$$\begin{cases} y-2x+1=0 \\ x^2-2xy+3y^2=0 \\ y+x^2-4x+1=0 \end{cases}$$

$$y = (-2a+4)x+a^2-1$$

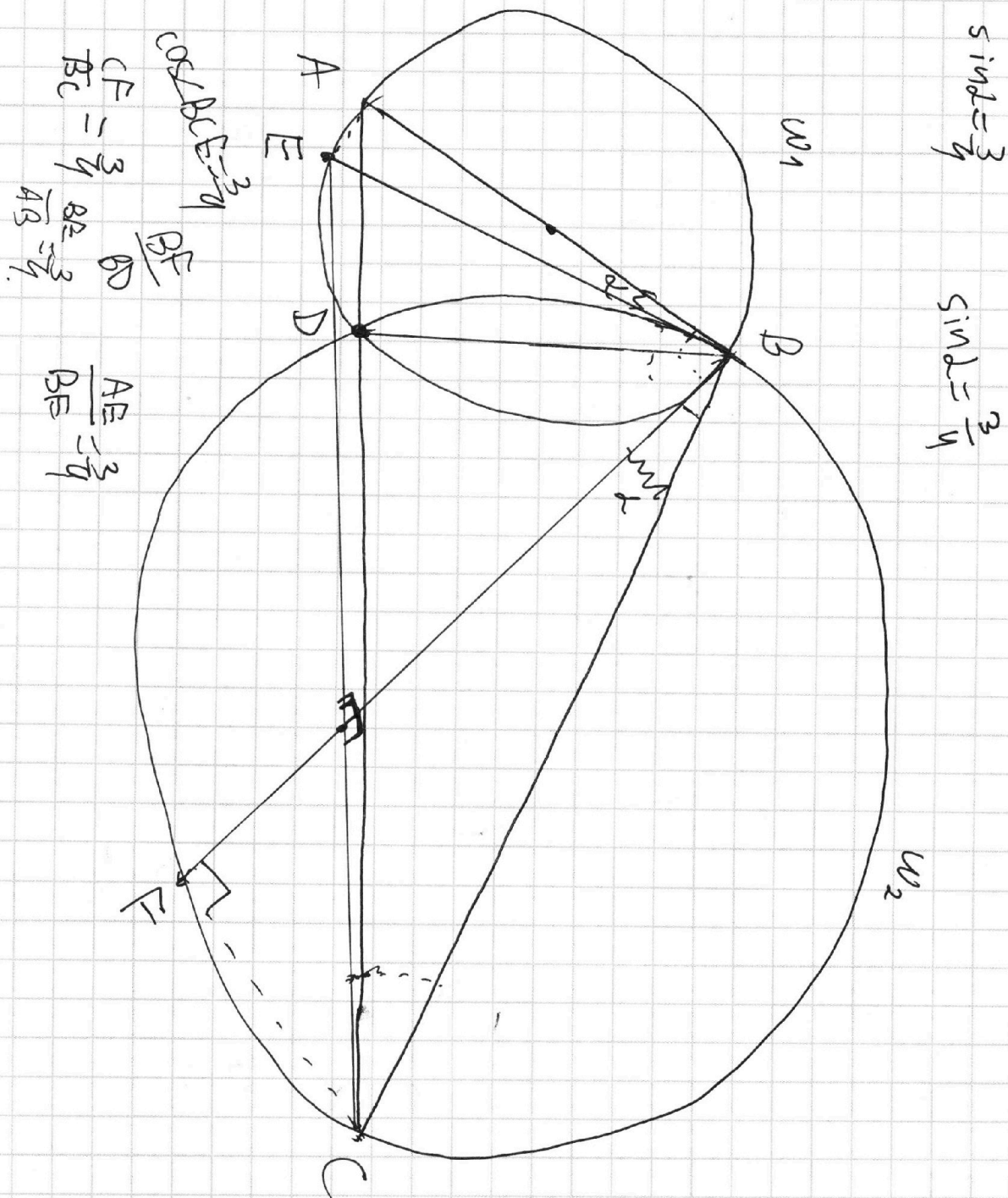


$$C_3 = \frac{2!}{2!}$$



СТРАНИЦА
___ ИЗ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. **Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!**





На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$f(x) = x^2 + ax + b$$

$$f(x) = 0$$

$$f(x) = -2x^2 \leftarrow \text{один корень.}$$

$$x^2 + ax + b = -6$$

$$f(x) = -6 \leftarrow \text{один корень.}$$

$$x^2 + ax + (b+6) = 0$$

$$x^2 + ax + b = -2x^2$$

$$D = a^2 - 4 \cdot 1 \cdot (b+6) = 0$$

$$3x^2 + ax + b = 0$$

$$a^2 - 4b - 24$$

$$D = 0$$

$$x^2 + 6x + 3 = -6 \quad | +6$$

$$x^2 + ax + b = 0$$

$$x^2 + 6x + 9 = 0$$

$$x_1 + x_2 = -a$$

$$\begin{cases} a^2 - 12b = 0 \\ a^2 - 4b - 24 = 0 \end{cases}$$

$$(x+3)^2 = 0$$

$$\boxed{x = -3}$$

$$\begin{cases} a^2 = 12b \\ a^2 = 4b + 24 \end{cases}$$

$$3x^2 + 6x + 3 = 0 \quad | :3$$

$$12b = 4b + 24$$

$$a =$$

$$x^2 + 2x + 1 = 0$$

$$8b = 24 \quad | :8$$

$$(x+1)^2 = 0$$

$$\boxed{b = 3}$$

$$36$$

$$x^2 + 6x + 3$$

$$x^2 - 6x + 3 = -6$$

$$x^2 - 6x + 3$$

$$x^2 - 6x + 9$$

$$DA$$

$$a^2 - 12 \cdot 3 = 0$$

$$(x-3)^2 \quad x = 3$$

$$D = 36 - 4 \cdot 3 =$$

$$a^2 = 36$$

$$6 \quad = 36 - 12 = 24$$

$$\boxed{a = \pm 6}$$

$$6 \quad x_{1,2} = \frac{-6 \pm \sqrt{24}}{2}$$

$$6 \text{ или } -6. \quad x_2 = \frac{-6 \pm \sqrt{24}}{2} \quad \frac{-12}{2} = -6$$

$$3x^2 - 6x + 3 = 0$$

$$x^2 - 2x + 1 = 0$$

$$(x-1)^2 = 0$$

$$x = 1$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

☐☐☐☐☐☐☐

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$n = 5^{151} \cdot 7^{600}$$

$$x = 5^a \cdot 7^b$$

$$n = x \cdot y$$

$$y = 5^c \cdot 7^d$$

$$y : x$$

$$c \geq a$$

$$d \geq b$$

$$a + c = 151$$

$$b + d = 600$$

$$76 \cdot 151$$

$$c \text{ от } 76 \text{ до } 151$$

$$d \text{ от } 300 \text{ до } 600$$

$$1 \dots 76$$

$$1 \dots 301$$

$$76 \cdot 301$$

$$\begin{array}{r} 301 \\ 76 \overline{) 22876} \end{array}$$

$$300 \cdot 600$$

$$28800$$

$$25$$

$$600$$

$$1$$

$$289$$

$$300 \cdot 600$$

$$301$$

$$\begin{array}{r} 600 \\ 151 \overline{) 22876} \\ \underline{75} \\ 76 \end{array}$$

$$1 \cdot 76$$

$$00$$

$$\begin{array}{r} \times 301 \\ 76 \\ + 1806 \\ 2107 \\ \hline 22876 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 21070 \\ 1806 \\ + 2107 \\ \hline 22876 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} \times 301 \\ 76 \\ + 1806 \\ 2107 \\ \hline 22876 \end{array}$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

xy - не вкл.

$$\frac{3x-3+6}{y-1} < \frac{7x-7+14}{x-1}$$

$$3 + \frac{6}{y-1} < 7 + \frac{14}{x-1}$$

$$\frac{6}{y-1} < 4 + \frac{14}{x-1}$$

$x > 0$

$9 \log_3 x + \log_3 3 - 16 \log_3 y - 3 = 0$
 $\frac{9}{\log_3 x} + \frac{1}{\log_3 y} - \frac{16}{\log_3 x + \log_3 y} - 3 = 0$

$\log_{ab} x$
 $\log_c ab = \log_c a + \log_c b$
 $\log_{ab} x \cdot \log_{xab} = 1$
 $\log_{ab} x = \frac{1}{\log_{xab}}$
 $\frac{\log_3 3}{\log_3 x} = \frac{1}{\log_3 x} = \log_3 x$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи** отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

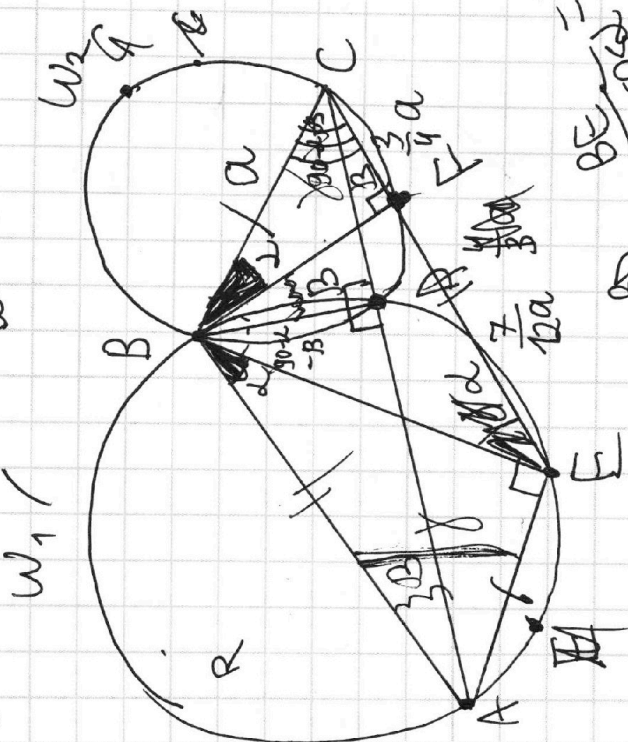
$$BD \cdot AC = BF \cdot AB = AB \cdot BC \cdot \sin \angle BCE$$

$$\frac{BD}{AC} = \frac{BF}{AB} = \frac{BC \cdot \sin \angle BCE}{AB}$$

$$\frac{BD}{AC} = \frac{BF}{AB} = \frac{BC \cdot \sin \angle BCE}{AB}$$

$$\frac{BD}{AC} = \frac{BF}{AB} = \frac{BC \cdot \sin \angle BCE}{AB}$$

$$\frac{BD}{AC} = \frac{BF}{AB} = \frac{BC \cdot \sin \angle BCE}{AB}$$



$$AB = \frac{BD \cdot \sin \angle BDC}{\sin \angle ABC}$$

$$AB = \frac{BD \cdot \sin \angle BDC}{\sin \angle ABC}$$

$$AB = \frac{BD \cdot \sin \angle BDC}{\sin \angle ABC}$$

$$AB = \frac{BD \cdot \sin \angle BDC}{\sin \angle ABC}$$

$$AB = \frac{BD \cdot \sin \angle BDC}{\sin \angle ABC}$$

$$\cos \angle BCE = \frac{BF}{BC}$$

$$\cos \angle BCE = \frac{BF}{BC}$$

$$\cos \angle BCE = \frac{BF}{BC}$$

$$\cos \angle BCE = \frac{BF}{BC}$$

$$\cos \angle BCE = \frac{BF}{BC}$$



$$\frac{AE}{AB} = \frac{CF}{BC} = \frac{BF}{BC}$$

$$\frac{AE}{AB} = \frac{CF}{BC} = \frac{BF}{BC}$$

$$\frac{AE}{AB} = \frac{CF}{BC} = \frac{BF}{BC}$$

$$\frac{AE}{AB} = \frac{CF}{BC} = \frac{BF}{BC}$$

$$\frac{AE}{AB} = \frac{CF}{BC} = \frac{BF}{BC}$$

$$AB = \frac{BF}{\cos \angle BCE}$$

$$AB = \frac{BF}{\cos \angle BCE}$$

$$AB = \frac{BF}{\cos \angle BCE}$$

$$AB = \frac{BF}{\cos \angle BCE}$$

$$AB = \frac{BF}{\cos \angle BCE}$$

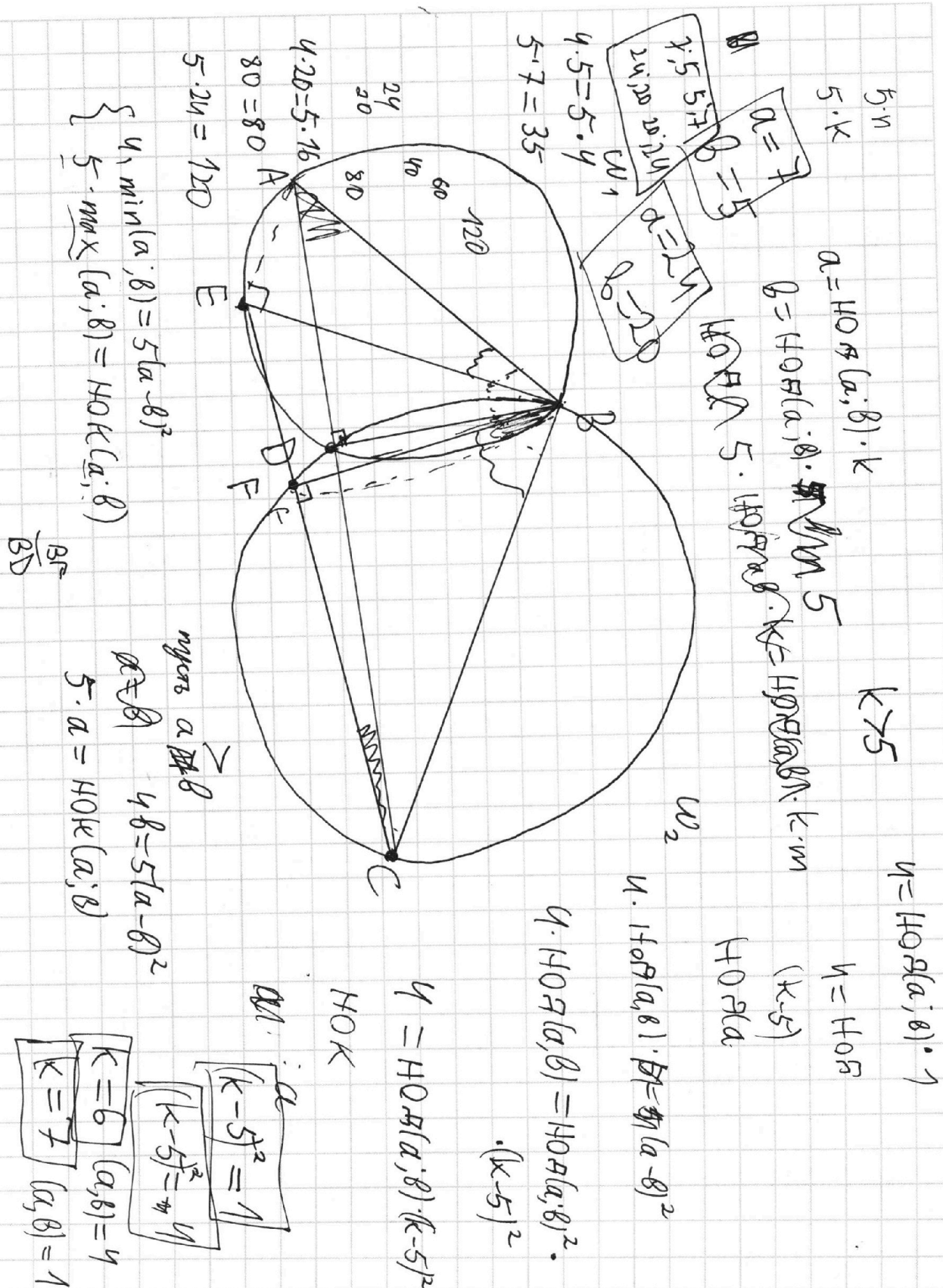


На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА
_ ИЗ _

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



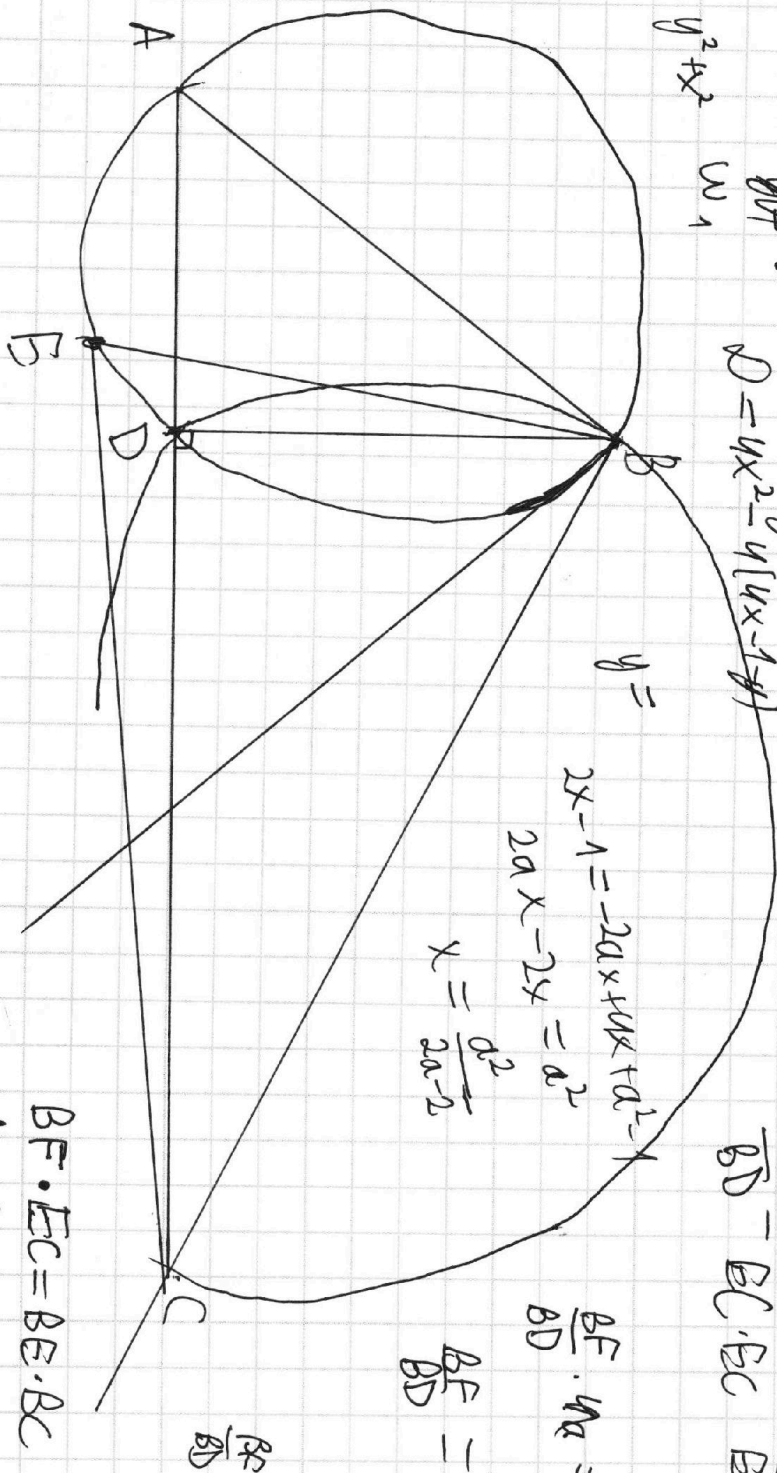


На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи** отдельно.

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



$$BE \cdot AE = BF \cdot EC$$

$$\frac{9}{9} + \frac{16}{9} + \frac{18}{9} = \frac{18+16+9}{9} =$$

$$2 \quad 34+9=43$$

$$\frac{BF}{BD} = \frac{BF \cdot AC}{BD \cdot EC} = \frac{BC \cdot AC}{EC^2}$$

$$y^2 + x^2 = 1$$

$$d^2 - 2ax + 4x - 1 - y = 0$$

$$d = 4x^2 - 4(4x - 1)$$

$$y =$$

$$2x - 1 = -2ax + 4x + a^2 - 1$$

$$2ax - 2x = a^2$$

$$x = \frac{a^2}{2a-2}$$

$$\frac{BF}{BD} \cdot 4a = \sqrt{13}a$$

$$\frac{BF}{BD} = \frac{\sqrt{13}a}{4a}$$

$$AB \cdot AC \cdot \frac{BD}{AB}$$

$$\frac{BE}{3y^2 + x^2 - 2xy}$$

$$\cos \angle BAE = \frac{BF}{BE}$$

$$\sin \angle BAE = \frac{BF}{BE}$$

$$BF \cdot EC = BE \cdot BC$$

$$AC \cdot BD = EC \cdot BE$$

$$\frac{BF}{BD} \cdot \frac{EC}{AC} =$$

$$AC \cdot BD = EC \cdot BE = \frac{BC}{EC}$$