



МОСКОВСКИЙ  
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ  
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"  
ПО МАТЕМАТИКЕ



## 11 КЛАСС. Вариант 11

- [3 балла] Дан приведённый квадратный трёхчлен  $f(x)$  такой, что уравнение  $f(x) = 2x^2$  имеет единственное решение, а также уравнение  $f(x) = -8$  имеет единственное решение. Найдите сумму корней уравнения  $f(x) = 0$ .
- [3 балла] Сколькими способами можно представить число  $n = 2^{401} \cdot 3^{500}$  в виде произведения двух натуральных чисел  $x$  и  $y$ , где  $y$  делится на  $x$ ?
- [5 баллов] Найдите количество пар целых чисел  $(x; y)$ , удовлетворяющих системе

$$\begin{cases} \log_x 2 + 3 \log_y 8 + 4 \log_{xy} \frac{1}{16} = 0, \\ \frac{x-1}{x+1} > \frac{3y-3}{7y+7}, \\ x \leq 31. \end{cases}$$

- [5 баллов] Найдите все пары натуральных чисел  $(a; b)$  такие, что

$$\begin{cases} 4 \cdot \min(a; b) = 3(a - b)^2, \\ 3 \cdot \max(a; b) = \text{НОК}(a; b). \end{cases}$$

- [5 баллов] На сторонах  $BA$  и  $BC$  треугольника  $ABC$  с тупым углом  $B$  как на диаметрах построены окружности  $\omega_1$  и  $\omega_2$  соответственно, пересекающиеся в точках  $B$  и  $D$ . Хорда  $BE$  окружности  $\omega_1$  перпендикулярна  $BC$ , а хорда  $BF$  окружности  $\omega_2$  перпендикулярна  $CE$  и касается  $\omega_1$ . Найдите отношение  $BF : BD$ , если  $\cos \angle BCE = \frac{3}{5}$ .
- [5 баллов] При каких значениях параметра  $a$  система

$$\begin{cases} (y - x^2 - x - 1)(x^2 - 3xy + 4y^2)(y + x - 1) = 0, \\ y = (2a + 1)x - a^2 + 1 \end{cases}$$

имеет ровно 2 решения?

- [6 баллов] В прямую четырёхугольную призму  $ABCDA_1B_1C_1D_1$  вписана сфера  $\omega$ . Луч с началом в точке  $A$  пересекает  $\omega$  в точках  $P$  и  $Q$ , а луч с началом в точке  $C$  пересекает  $\omega$  в точках  $M$  и  $N$ . Пусть  $O$  — точка пересечения диагоналей четырёхугольника  $ABCD$ . Найдите объём призмы  $ABCDA_1B_1C_1D_1$  и расстояние  $\rho$  от центра  $\omega$  до плоскости  $PAC$ , если известно, что  $AO = 1$ ,  $BO = 2$ ,  $CO = 4$ ,  $AP = \frac{\sqrt{5}}{3}$ ,  $AQ = \frac{5\sqrt{5}}{3}$ ,  $CM = \frac{10\sqrt{5}}{9}$ ,  $CN = 2\sqrt{5}$ .



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении **каждой задачи отдельно**.

- |                                       |                            |                            |                            |                            |                            |                            |
|---------------------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|
| <input checked="" type="checkbox"/> 1 | <input type="checkbox"/> 2 | <input type="checkbox"/> 3 | <input type="checkbox"/> 4 | <input type="checkbox"/> 5 | <input type="checkbox"/> 6 | <input type="checkbox"/> 7 |
|---------------------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|

СТРАНИЦА  
1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач **нумеруются отдельно**. Порча QR-кода недопустима!

✓ 1

$$f(b) = b^2 + pb + q;$$

$$f(b) = 2b^2; \quad f(b) + pb + q = 2b^2$$

$$b^2 - pb - q = 0 \quad \text{- имеет единичное решение} \quad (\exists)$$

$$\Delta = 0 \Leftrightarrow$$

$$p^2 + 4q = 0$$

$$f(b) = -8 \quad \text{или единичное решение} \Rightarrow \Delta = 0 \Rightarrow$$

$$b^2 + pb + q = -8$$

$$b^2 + pb + q + 8 = 0 \quad \text{или единичное решение} \Rightarrow \Delta = 0 \Leftrightarrow$$

$$p^2 + 4(q + 8) = 0$$

$$\begin{cases} p^2 + 4q = 0 \\ p^2 + 4(q + 8) = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} p^2 = -4q \\ p^2 = -4(q + 8) \end{cases} \quad \begin{cases} -4q = -4(q + 8) \\ p^2 = -4q \end{cases} \quad \begin{cases} q + 8 = q \\ p^2 = -4q \end{cases} \quad \begin{cases} 8 = 0 \\ p^2 = -4q \end{cases} \quad \begin{cases} 0 = 0 \\ p = \pm 4 \end{cases}$$

Сумма корней уравнения  $f(b) = 0$ , т.е.  $f(b) = b^2 + pb + q$  равна

$-p \Rightarrow$  сумма корней равна  $\pm 4$

Одно:  $\pm 4$ .



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

 1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА  
1 из 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

12

 $b; g \in N$ 

$$h = 2^{a_1} \cdot 3^{b_1}; \quad a = b; \quad g = k \cdot h \quad (k \in N)$$

$$h = k^2 \cdot k$$

~~$$1) X \in \mathbb{Z}_{\geq 2} \quad X = 2^a \cdot 3^b, \text{ на } (a, b \in N \setminus \{0\}; a \in [0; 100]);$$~~

~~$$k \in [0; 250]$$~~

~~$$\text{Бс. } 401 - \text{ первое; } 500 - \text{ второе, } \text{ то } k = 2^{a-1} \cdot 3^{b-1}, \text{ на}$$~~

~~$$k \in N; \quad b \in N \setminus \{0\}; \quad a \in [1; 100]; \quad b \in [0; 250], \text{ т.е.}$$~~

~~$$\text{Барыш } g = k: 200 \cdot 251 = 50200, \text{ т.е. } k =$$~~

~~$$b$$
 ~~значит~~ является однозначной; а значит  $a = y \Rightarrow$~~ 
~~$$\text{Барыш } 50200 \text{ единиц}$$~~
~~$$\text{Цена: } 50200 \text{ рублей.}$$~~



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

- |                          |                          |                          |                                     |                          |                          |                          |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1                        | 2                        | 3                        | 4                                   | 5                        | 6                        | 7                        |
| <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

СТРАНИЦА  
1 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\begin{cases} 4 \cdot \min(a; b) = 3(a-b)^2 \\ 3 \cdot \max(a; b) = \text{НОД}(a; b) \end{cases}$$

$$\begin{cases} a \geq b \\ 4b = 3(a-b)^2 \\ 3a = \text{НОД}(a; b) \end{cases}$$

$$\begin{cases} a < b \\ 4a = 3(a-b)^2 \\ 3b = \text{НОД}(a; b) \end{cases}$$

$$\begin{cases} a \geq b \\ 4b = 3(a-b)^2 \\ 3a = \text{НОД}(a; b) \end{cases}$$

$$3a = \text{НОД}(a; b) \Rightarrow 3a \mid b$$

$$3a = \text{НОД}(a; b) \quad | : a \quad (a \neq 0)$$

$$3 = \frac{ab}{\text{НОД}(a; b)} \quad | : 3 \quad (a \neq 0)$$

$$b = 3 \cdot \text{НОД}(a; b) \Rightarrow b:3 \cdot b = 3^2$$

~~4a = 3~~  $4 \cdot 8S = 3(a-b)^2 \quad \text{SGN}$

$$ak = a - 3b^2$$

$$2^2 S = (a-b)^2 \Rightarrow S = k^2; b = 3k^2$$

$$a = 3k^2 + 2k; 3a: 3k^2; 3a = 3k^2 \ell$$

$$3k^2 + 2k = 3k^2 \ell$$

$$3k + 2 : k \Rightarrow 2:k \Rightarrow k=1; b=3$$

$$b = 3 \quad \text{и} \quad b = 12$$

$$\begin{cases} 3(a-3)^2 = 4 \cdot 3 \\ 3(a-12)^2 = 4 \cdot 12 \end{cases} \quad \left[ \begin{array}{l} a-3=2 \quad (a \geq b \Rightarrow |a-b| = a-b) \\ a-12=4 \end{array} \right] \quad \left[ \begin{array}{l} a=5 \\ a=16 \end{array} \right]$$

Причина в том, что уравнение  $(5; 3) \cup (10; 12)$  для второго есть



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1

2

3

4

5

6

7

СТРАНИЦА  
2 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Дано векторное уравнение  $\vec{y} = \vec{a} + t\vec{b}$ , где  $\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ ,  $\vec{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ .

Найдем  $\vec{a} + t\vec{b}$ :

$$\left\{ \begin{array}{l} \vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \\ t\vec{b} = t \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}^2 \\ \vec{a} + t\vec{b} = \begin{pmatrix} 1+2t \\ 2-t \\ 3+t \end{pmatrix} \end{array} \right.$$

если  $t = 0$  получим первое решение  $\vec{y} = \vec{a}$ , если  $t = 1$  получим второе решение  $\vec{y} = \vec{a} + \vec{b}$ .

Итак, решения:

$\vec{y} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}$ .



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

- |                            |                            |                            |                            |                                       |                            |                            |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|---------------------------------------|----------------------------|----------------------------|
| <input type="checkbox"/> 1 | <input type="checkbox"/> 2 | <input type="checkbox"/> 3 | <input type="checkbox"/> 4 | <input checked="" type="checkbox"/> 5 | <input type="checkbox"/> 6 | <input type="checkbox"/> 7 |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|---------------------------------------|----------------------------|----------------------------|

СТРАНИЦА  
4 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач **нумеруются отдельно**. Порча QR-кода недопустима!

15

Реш.

Δ ABC

$90^\circ \leq B < 180^\circ$

$\text{окр}(O_1, R)$

$\text{окр}(O_2, r)$

$O_1$  - центральная  
точка симметрии  
на дугах на

Вдано BC - симметрия

$E \in \text{окр}(O_1, R)$

$F \in \text{окр}(O_2, r)$

$BE \perp AC$

$\frac{EF}{CE} \in \text{окр}(O_1, R)$

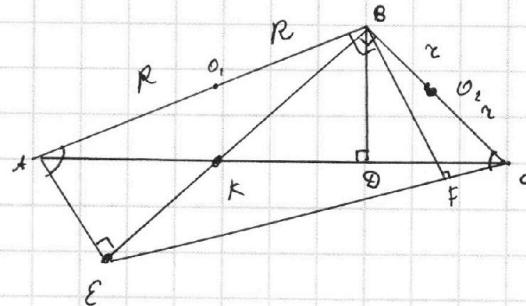
$\text{окр}(O_1, R) \cap \text{окр}(O_2, r) = \{B, D\}$

$\cos \angle BCE = \frac{3}{5}$

Найти:

$$\frac{BF}{BD} = ?$$

Решение:



1) ~~Углы  $O_1$  и  $O_2$  - центральные углы,  $BC$  - соединяющая~~

2)  $\Rightarrow$   $BL \perp AC$ ;  $\angle LAC = 90^\circ$ ;  $O_1$  определена на  $AB \Rightarrow \angle L \in \text{окр}(O_1, \alpha)$ ; доказано  $\angle L \in \text{окр}(O_2, \beta) \Rightarrow$

$L \in D$  - симметрия

3) ~~Угол  $BE \perp CE$ , т.к.  $\angle BFC = 90^\circ$  - отсюда на  $BC \Rightarrow$~~

3) ~~Углы  $BF \perp EC = S$ , т.к.  $BF \perp EC$ ;  $BF \perp EC = S$ , т.к.  $\angle BSC = 90^\circ$ .~~  
Он определяет  $BC \Rightarrow S \in \text{окр}(O_2, r) \Rightarrow$   $P \in S$  - симметрия

$\rightarrow KBF \perp EC = P$

4) ~~Угол  $BF$  - паспорт  $\text{окр}(O_2, r)$ , т.к.  $BP \perp AB$~~

5)  $BP \perp AB$ ;  $BP \perp CE \Rightarrow AB \parallel CE$

6)  $B \in \angle BCA$ ;  $BE \perp AC$ , ( $\text{т.к. } \angle AEB = 90^\circ$ , т.к.  $AB$  - диаметр  $\text{окр}(O_1, R)$ )  $\Rightarrow$

$AE \parallel BC$

7)  $AE \parallel BC$ ;  $AE \parallel CE \Rightarrow E \in BC$  - перпендикуляр границы из определения  $\Rightarrow$

$\angle EAB = \angle BCA = \alpha$ ;  $AE = EC$ ;  $EC = EB$ , т.к.  $K = AC \cap BE$ ;  $AC = BC = 2r$

8) ~~Угол  $ABC$  - прямой  $\angle BPC$  ( $\angle BFC = 90^\circ$ );  $BP = PC$  (т.к.  $\angle BCF = \angle EBC$ ).~~

$\Rightarrow \angle B = 90^\circ$  8)  $\cos \angle = \cos \angle BCE = \frac{3}{5} \Rightarrow \sin \angle = \frac{4}{5}$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

- |                            |                            |                            |                            |                                       |                            |                            |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|---------------------------------------|----------------------------|----------------------------|
| <input type="checkbox"/> 1 | <input type="checkbox"/> 2 | <input type="checkbox"/> 3 | <input type="checkbox"/> 4 | <input checked="" type="checkbox"/> 5 | <input type="checkbox"/> 6 | <input type="checkbox"/> 7 |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|---------------------------------------|----------------------------|----------------------------|

СТРАНИЦА  
2 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач **нумеруются отдельно**. Порча QR-кода недопустима!

$$9) \triangle BFC \text{ - прямоугольник } (\angle BFC = 90^\circ) \quad BF = BC \sin \angle = \frac{82 \cdot 4}{5} = \frac{82}{5}$$

$$10) \triangle KBC \text{ - прямоугольник } (\angle KBC = 90^\circ) \quad EB \perp BC; \quad BD \text{ - высота к гипotenу-} \\ \text{зе} \rightarrow BD = \frac{BK \cdot BC}{KC} \quad ; \quad BC = 82; \quad KC = AK; \quad KB = \frac{BE}{2};$$

$$11) \triangle BEA \text{ - прямоугольник } (\angle BEA = 90^\circ); \quad \angle BAE = 2 \Rightarrow BE = AB \sin \angle = \frac{AB \cdot 4}{5} = \\ = \frac{8R}{5} \quad ; \quad \cos \angle \overset{?}{=} \frac{AK}{AE} \rightarrow \frac{2R}{82} = \frac{3}{5} \quad \cos \angle = \frac{AC}{AB} = \frac{3}{5} \Rightarrow \frac{82}{2R} = \frac{3}{5}$$

$$12) AE = 82; \quad BK = \frac{BE}{2} = \frac{4R}{5} \neq \frac{4 \cdot 52}{5 \cdot 3} = \frac{4}{3} 2 \Rightarrow \text{ткн. г. } \text{Пиратка!}$$

$$13) \quad AE = \sqrt{AE^2 + EK^2} : \quad \sqrt{42^2 + \frac{16}{9} 2^2} = ? \frac{\sqrt{552}}{3} = \frac{22\sqrt{13}}{3}$$

$$14) \quad \frac{BF}{BD} = \frac{\sqrt{13} \cdot 22 \cdot 3}{42 \cdot 5} = \frac{2\sqrt{13}}{10} \quad \text{Однако } \frac{BF}{BD} = \frac{3\sqrt{13}}{10}$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.



- 1      2      3      4      5      6      7

СТРАНИЦА  
4 ИЗ 3

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач **нумеруются отдельно**. Порча QR-кода недопустима!

№ 6

$$\begin{cases} (y - b^2 - a^2 - 1) (b^2 - 3by + 4y^2) (y + b - 1) = 0 \\ y^2(a^2 + 1) b - a^2 + 1 \quad (1) \end{cases}$$

$$\begin{cases} y = b^2 + a^2 + 1 \\ y^2 + 3by + 4y^2 = 0 \\ y = -b + 1 \\ y = (a+1)b - a^2 + 1 \end{cases}$$

$$b^2 - 3by + 4y^2 = 0 \quad (2)$$

$$\begin{cases} b > 0 \\ y > 0 \\ b < 0 \\ y < 0 \\ b^2 - 3by + 4y^2 = 0, \quad \begin{cases} b > 0 \\ y > 0 \end{cases} \\ b^2 - 3by + 4y^2 = 0, \quad \begin{cases} b < 0 \\ y < 0 \end{cases} \\ b^2 - 3by + 4y^2 = 0, \quad \begin{cases} b > 0 \\ y < 0 \end{cases} \end{cases}$$

относительно у уравнение  
меньшее и не имеет решений,

$$D = y^2 - 4 \cdot 4 < 0 \Rightarrow$$

$$b^2 - 3by + 4y^2 = 0 \quad (2)$$

$$\begin{cases} b > 0 \\ y > 0 \end{cases}$$

Получаем совпадение с выше полученной by —

— обработка первого y = b^2 + a^2 + 1; получим y = b - a^2 + 1 = max(0; 0).

y = (a+1)b - a^2 + 1 — это же, соответственно, второе значение y, которое должно совпадать с первым.

Найдем максимум в системе координат (x, y) :

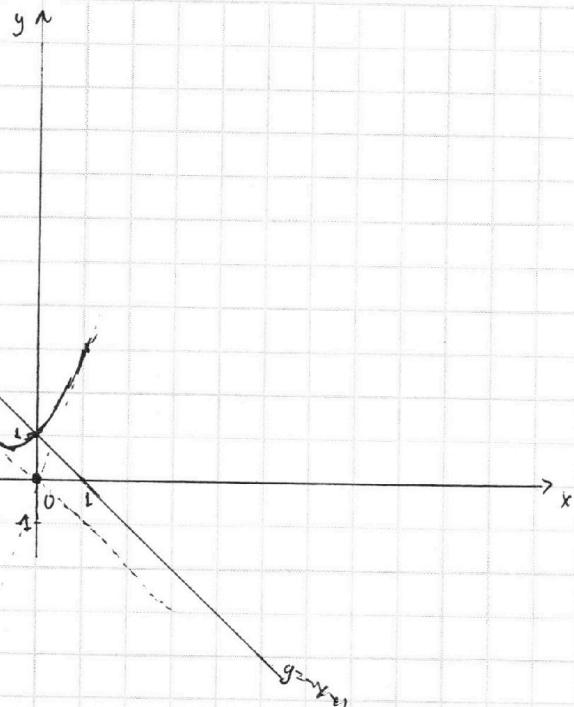


На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

- |                          |                          |                          |                          |                          |                                     |                          |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|
| <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|

СТРАНИЦА  
2 ИЗ 3

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



Чтобы найти, когда прямая (1) проходит через точку координат, т.е.  $a^2 + b + 1 = 0$

$$a = \pm 1 \quad \text{т.к. } a = 1 \quad y = bx; \quad \text{т.к. } a = -1 \quad y = -bx, \quad \text{в обоих случаях}$$

значение  $b$  неизвестно. Так как прямая проходит через точку  $(0, 1)$ , то  $b = 1$ . Тогда  $a = -1$ .

$$y = -x \text{ параллельна } y = -b + 1; \quad \text{а пасека } y = b^2 + b + 1, \text{ т.к. } (-1; 1)$$

$$\text{значит и параллельна } y = -b; \quad \text{т.к. } (-1) = -2x + 1 \\ -1 = -1 \quad (2x + 1 = (x + b + 1)^2)$$

$a = -1$  подходит, и это единственные значение параметра, при котором прямая (1) параллельна  $y = -b + 1$ .

Можно рассмотреть случайно, когда  $a \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}$ , в таком случае прямая (1) не параллельна линии  $y = -b + 1$  и не проходит через  $(0; 0) \Rightarrow$  она пересекает  $S_2$  ячейку, когда



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

- |                            |                            |                            |                            |                            |                                       |                            |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|---------------------------------------|----------------------------|
| <input type="checkbox"/> 1 | <input type="checkbox"/> 2 | <input type="checkbox"/> 3 | <input type="checkbox"/> 4 | <input type="checkbox"/> 5 | <input checked="" type="checkbox"/> 6 | <input type="checkbox"/> 7 |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|---------------------------------------|----------------------------|

СТРАНИЦА  
3 ИЗ 3

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

решение  $y = (2a+1)b + a^2 + 1$  (это же число будем брать  
с первых строк (одна строка, т.к. уравнение  $y = (2a+1)b + a^2 + 1$   $y = -b + 1$   
переведено)

$$\begin{cases} (2a+1)b + a^2 + 1 = b^2 + b + 1 \\ (2a+1) = 2b + 1 \end{cases} \quad \begin{cases} (2b+1)b + a^2 + 1 = b^2 + b + 1 \\ a = x \end{cases}$$

$$(a+1) = (2b+1) = (b^2 + b + 1)^{\frac{1}{2}} - \text{решение в виде корня}$$

$$\begin{cases} 2b^2 + b + 1 - b^2 + 1 = x^2 + x + 1 \\ a = x \end{cases} \quad \begin{cases} b^2 + b^2 \\ a = x \end{cases} \quad \text{т.к. } a \in \mathbb{R}$$

Система имеет решение для решения, когда  $a \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$

Однако система имеет решение для решения  
при  $a \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$

На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

- |                          |                          |                          |                          |                          |                          |                                     |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|
| <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|

СТРАНИЦА  
1 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



№7

Решение:

① Дано:

сфера  $(T; R)$

бисектриса

$\Delta ABCMND$

$MN \subset \Delta ABCMND$

- прямая пересекает

множество

$$[PQ] \cap \text{сфера } (T; R) = \\ = [P; Q]$$

$$[CN] \cap \text{сфера } (T; R) =$$

$$= [C; N]$$

$$AC \perp BC \Rightarrow 0$$

$$AO = OB = OC$$

$$OC = 4$$

$$MR = \frac{\sqrt{5}}{3}$$

$$AQ = \frac{5\sqrt{5}}{3}$$

$$CM = \frac{10\sqrt{5}}{9}$$

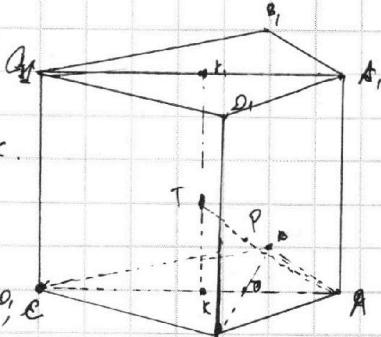
$$CN = 2\sqrt{5} \\ g(T; (PNC)) = 8$$

Коин:

Вариант - 1

гд?

1) Три сферы касаются  
внешне  $ABC$  ( $AB$ ) в точке  $K$ .



2) Три сферы касаются  
внешне призмы  $MNCD$ ,  $C$  - вершина  
призмы,  $MN$  - диаметр сферы  $(K = 2R)$ ;  
в основании  $ABCD$  бисектриса опущена с вершины  
 $K$  к ребру  $BC$

3) По формуле аксиоматики отрезков симметрии.

$$AK = \sqrt{AP \cdot AQ} = \frac{\sqrt{5}}{3}; CK = \sqrt{CM \cdot CN} = \frac{4\sqrt{5}}{3}$$

$$1) AK + KC = \frac{\sqrt{5}}{3} + \frac{10}{3} = 5; AC = AO + OC = 1 + 4 = 5 \Rightarrow \\ AK + KC = AC \Rightarrow AK = AC, \text{ т.к.}$$

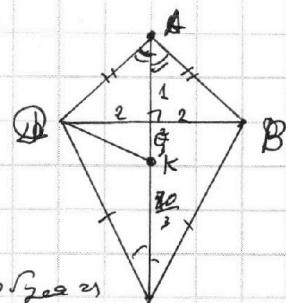
$$AO = 1; OK = \sqrt{AK^2 - AO^2} = \frac{2}{3}; KC = \frac{10}{3}$$

5)  $K$  - точка пересечения бисектрис

в  $\angle CAB$  и  $\angle BCD$ ;  $KC \neq KC \Rightarrow$

$\angle OAC = \angle OCA$ ;  $\angle BDC = \angle DCA \Rightarrow$   $AC = CB$  (из  $\triangle OAC \cong \triangle OCB$ )

$\angle ADC = \angle ABC$  в глубинах, глубина



$D$  и  $B$  симметричны относительно  $AC \Rightarrow DB \perp AC$

6)  $R^2 = RF \cdot FD$ ;  $RF \perp AD$ , т.к.  $F$  - бисектриса в  $\angle A$ ;  $RF = R$

$$2) RF \cdot FD = OD \cdot DK \quad (\text{т.к. } \angle ODK \cong \angle FAD); DK = \sqrt{DO^2 + OK^2} \\ = \sqrt{5}; DK = DO = 2; DK = \frac{5}{3} \Rightarrow R = \frac{2 \cdot 5}{3 \cdot \sqrt{5}} = \frac{2\sqrt{5}}{3}$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

- |                            |                            |                            |                            |                            |                            |                                       |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|---------------------------------------|
| <input type="checkbox"/> 1 | <input type="checkbox"/> 2 | <input type="checkbox"/> 3 | <input type="checkbox"/> 4 | <input type="checkbox"/> 5 | <input type="checkbox"/> 6 | <input checked="" type="checkbox"/> 7 |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|---------------------------------------|

СТРАНИЦА  
2 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$8) V_{\text{аналогия}} = S_{\text{плоск}} \cdot H = \frac{R \cdot P_{\text{анал}}}{2} \cdot 2R = R^2 \cdot P_{\text{анал}} = \\ = R^2 (20 + 20c); DC = \sqrt{0D^2 + 0C^2} = \sqrt{4 + 16} = 2\sqrt{5};$$

$$V_{\text{аналогия}} = \frac{40}{9} \cdot (2\sqrt{5} + 4\sqrt{5}) = \frac{20 \cdot 6\sqrt{5}}{9} = \frac{40\sqrt{5}}{3}$$

9) ~~Но син~~

9)  $\ell$  (top) no clearly seen now.

$$AT^2 - R^2 = AK^2$$

$$AT^2 = \frac{20}{9} + \frac{15}{9}$$

$$AT^2 = 5 \quad \text{или} \quad AT = \sqrt{5}$$

$$AT = \sqrt{5}$$

$$10) \Delta ATP; AP = \frac{\sqrt{5}}{3}; TP = R = \frac{2\sqrt{5}}{3}; AT = \sqrt{5} \Rightarrow AP + PT = AT \Rightarrow$$

~~Are {P; Q} ⊂ AT?~~

$$11) \overline{AT} \in \Gamma \subset AP, \text{ но } \Gamma \subset (APC) \Rightarrow g(\Gamma; (AP)) = 0; g \neq 0$$

$$\text{Однако } V_{\text{аналогия}} = \frac{40\sqrt{5}}{3}; g \neq 0$$

I-

I-



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении **каждой** задачи **отдельно**.

1

2

3

4

5

6

7

СТРАНИЦА

\_ ИЗ \_

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. **Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно.** Порча QR-кода недопустима!

I-

I-

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.



- |                          |                          |                          |                          |                          |                          |                          |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| <input type="checkbox"/> |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|

СТРАНИЦА  
\_ ИЗ \_

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$4 \cdot \min(a; b) = 3(a-b)^2$$

$$3 \cdot \min(a; b) = \operatorname{KOK}(a; b)$$

$$\frac{\sqrt{3}C}{3} = a - b$$

$$a = b + \frac{\sqrt{3}}{3}C$$

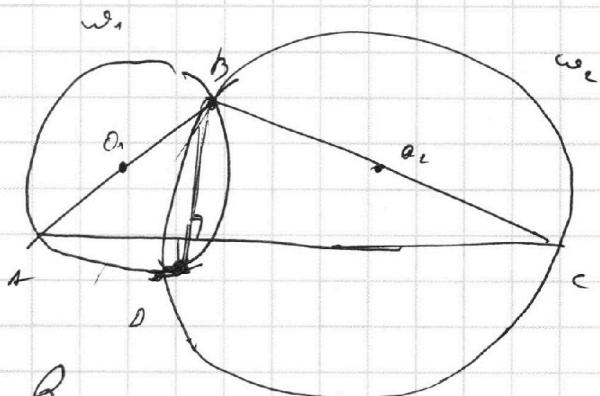
$$\begin{cases} a \geq b \\ 4b = 3(a-b)^2 \\ 3a = \operatorname{KOK}(a; b) \end{cases}$$

$$a < b$$

$$4a = 3(a-b)^2$$

$$3b = \operatorname{KOK}(a; b)$$

$$3a = b$$



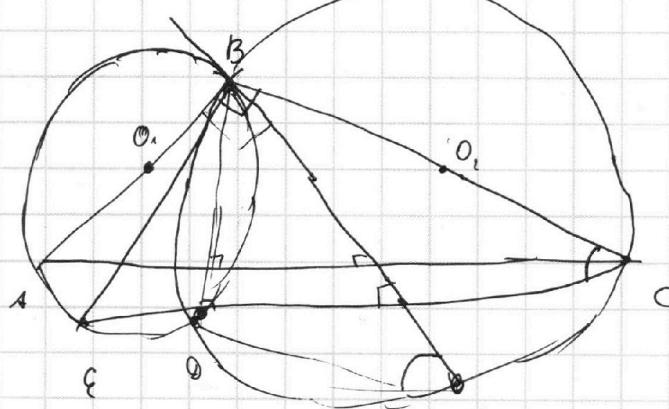
$$4b = 3a^2 + b^2 - ab$$

$$3a = \sqrt{3}b$$

$$a \geq b$$

$$4b = 3(a-b)^2$$

$$3a = \operatorname{KOK}(a; b)$$



$$3a = (a-b)k$$

$$a-b = \frac{k}{4}$$

$$4b = \frac{3a^2}{k^2}$$

$$4a^2 = 4b^2 + b^2$$

$$\frac{1}{\log_{10}b} - \frac{9}{\log_{10}j} + \frac{46}{\log_{10}y} = 0$$

$$\frac{1}{a} + \frac{9}{b} = \frac{10}{ab}$$

$$\frac{1}{\log_{10}b} - \frac{9}{\log_{10}j} = \frac{26}{\log_{10}k + \log_{10}y}$$

$$b^2 + a + a^2 + b = 10ab$$

$$4b \geq 3(a+b)$$

~~зато~~  $b = \operatorname{KOK}(a; b)$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

- |                            |                            |                            |                            |                            |                            |                            |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|
| <input type="checkbox"/> 1 | <input type="checkbox"/> 2 | <input type="checkbox"/> 3 | <input type="checkbox"/> 4 | <input type="checkbox"/> 5 | <input type="checkbox"/> 6 | <input type="checkbox"/> 7 |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|

СТРАНИЦА  
\_ ИЗ \_

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по **каждой из задач** нумеруются **отдельно**. Порча QR-кода недопустима!

$$f(b) = x^2 + px + q$$

$$y = v^2 + v - 1$$

$$x^2 + px + q = 2v^2$$

$$v_0 = \frac{-1}{1+1} = -\frac{1}{2}$$

$$\frac{1}{4} - \frac{1}{2} + 1 = \frac{1-2+4}{4} = \frac{3}{4}$$

$$x^2 + px + q = 0$$

$$p^2 + 4q = 0$$

$$-4q = 4q + 32$$

$$x^2 + px + q = -8$$

$$\left\{ \begin{array}{l} p^2 + 4q = 0 \\ p^2 - 4(q+8) = 0 \end{array} \right.$$

$$8q = -32$$

$$p^2 - 4(q+8) = 0$$

$$\left\{ \begin{array}{l} p^2 + 4q = 0 \\ p^2 - 4q - 32 = 0 \end{array} \right.$$

$$q = -4$$

$$-4q = 4(q+8)$$

$$p^2 = 16 ; p = \pm 4$$

$$-q = q + 8$$

$$y = -x$$

$$y^2 = 2v + 1$$

"

$$h = 2^{401} \cdot 3^{500}$$

$$h = b^y : y : y^2 : y = 60$$

$$-1 = -2 + 1$$

$$h = b^2 k$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \log_b k + 3 \log_b y^2 + 6 \log_b \frac{1}{k} = 0 \\ \frac{b-1}{b+1} > \frac{3y-3}{y+1} \end{array} \right.$$

$$\frac{1}{\log_b k} + \frac{3}{\log_b y^2} + \frac{6}{\log_b \frac{1}{k}} = 0$$

$$b = 31$$

$$a = b$$

$$4B = 3(a^2 + b^2 - ab)$$

$$3a : b$$

$$\left\{ \begin{array}{l} 4B = 3(a^2 + b^2 - ab) \\ 3a = k \omega(a, b) \end{array} \right.$$

$$4B = 3a^2 + 3b^2 - 6ab$$

$$-1/9$$

$$3a = \frac{ab}{k \omega(a, b)} B = j k \omega(a, b)$$

$$4B$$

$$a : b$$

$$3a : b$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

- |                            |                            |                            |                            |                            |                            |                            |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|
| <input type="checkbox"/> 1 | <input type="checkbox"/> 2 | <input type="checkbox"/> 3 | <input type="checkbox"/> 4 | <input type="checkbox"/> 5 | <input type="checkbox"/> 6 | <input type="checkbox"/> 7 |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|

СТРАНИЦА  
ИЗ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по **каждой из задач** нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

The page contains several handwritten geometric diagrams and calculations:

- Top Left:** A diagram of a trapezoid ABCD with parallel bases AB and CD. A point P is on AD, and a point Q is on BC. A line segment PQ is drawn. Handwritten text includes  $\beta = 3k^2$ ,  $3k = \alpha - 3c^2$ , and  $\ell(3b+2) = \alpha$ . Below these are two triangles sharing a common vertex at P.
- Top Right:** A diagram of a trapezoid ABCD with parallel bases AB and CD. A point P is on AD, and a point Q is on BC. A line segment PQ is drawn. Handwritten text includes  $\beta = 3k^2$ ,  $3k = \alpha - 3c^2$ , and  $\ell(3b+2) = \alpha$ .
- Middle Left:** A diagram of a triangle ABC with a point D on BC. A line segment AD is drawn. Handwritten text includes  $4a - b : (a - b)$ ,  $\frac{10}{5}$ ,  $\frac{5p \cdot 5}{9} \alpha + 3a - 3b : \frac{20 \cdot 5}{9}$ , and  $20 + 3a -$ .
- Middle Center:** A diagram of a triangle ABC with a point D on BC. A line segment AD is drawn. Handwritten text includes  $V = KS = 2RS$ .
- Middle Right:** A diagram of a triangle ABC with a point D on BC. A line segment AD is drawn. Handwritten text includes  $15 + 15 + 10 = 40$  and  $f_2 = 5$ .
- Bottom Left:** A diagram of a triangle ABC with a point D on BC. A line segment AD is drawn. Handwritten text includes  $\frac{20}{3}$ ,  $\frac{5p}{3}$ , and  $5 -$ .
- Bottom Right:** A diagram of a triangle ABC with a point D on BC. A line segment AD is drawn. Handwritten text includes  $15 + 15 + 10 = 40$  and  $f_2 = 5$ .

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

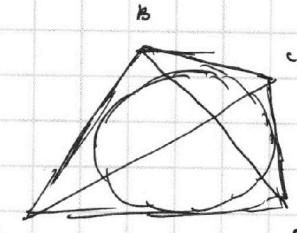
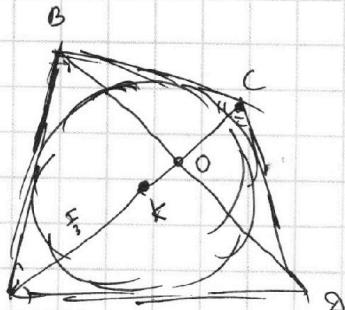




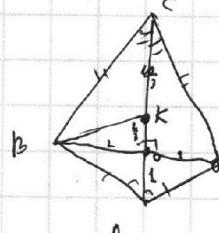
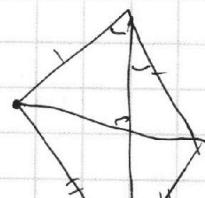
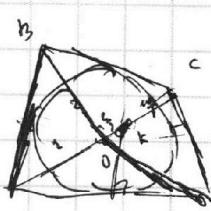



СТРАНИЦА  
ИЗ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач **нумеруются отдельно**. Порча QR-кода недопустима!



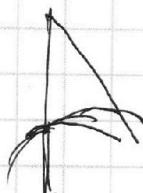
$$2 \cdot \frac{5}{3} = \frac{5\sqrt{5}}{3} = d$$



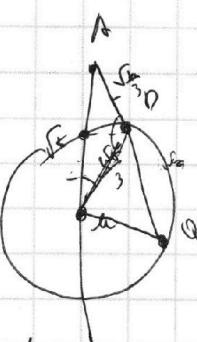
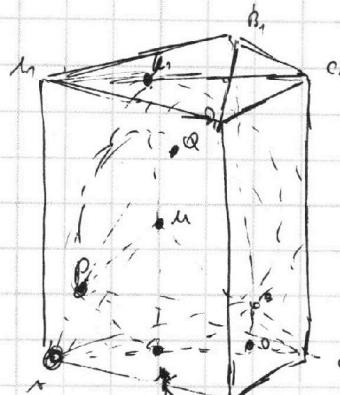
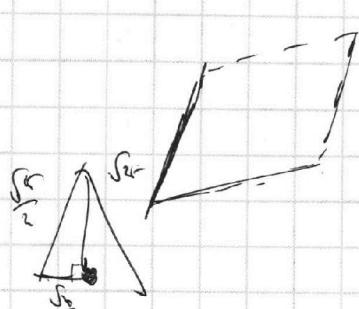
$$2 \cdot \frac{5}{3} = 5\sqrt{5} \cdot d$$



$$d = \frac{2\sqrt{5}}{3}$$



$$d = 2\sqrt{\frac{5}{3}}$$



$$\frac{25}{g} = R^2 - 1u^2$$

$$4R^2 = \frac{25}{g} + \frac{10}{g} = 5$$

$$\frac{25}{g} = \frac{20}{g} - 1u^2$$

$$1u^2 = \frac{5}{g} \cdot \frac{\sqrt{5}}{3}$$

$$\pi R^2 - R^2 = \pi k^2$$

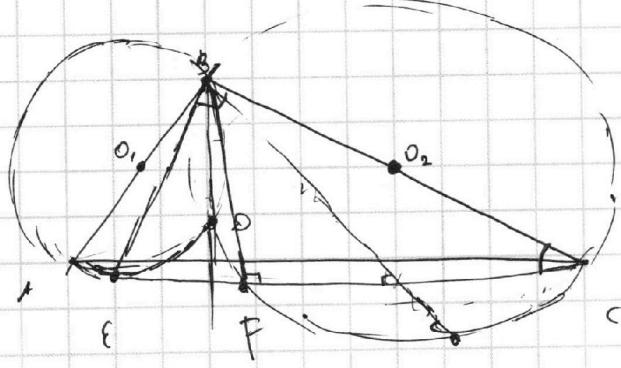


На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

- |                            |                            |                            |                            |                            |                            |                            |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|
| <input type="checkbox"/> 1 | <input type="checkbox"/> 2 | <input type="checkbox"/> 3 | <input type="checkbox"/> 4 | <input type="checkbox"/> 5 | <input type="checkbox"/> 6 | <input type="checkbox"/> 7 |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|

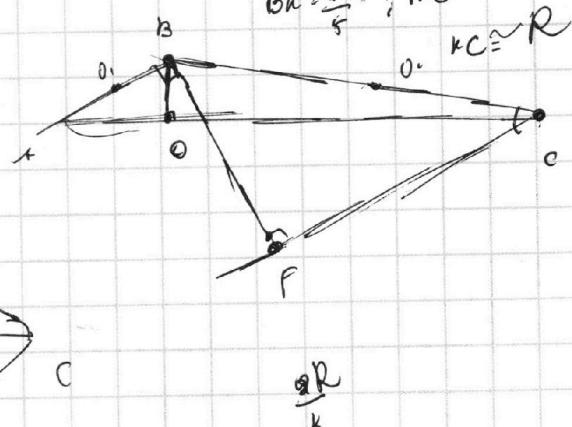
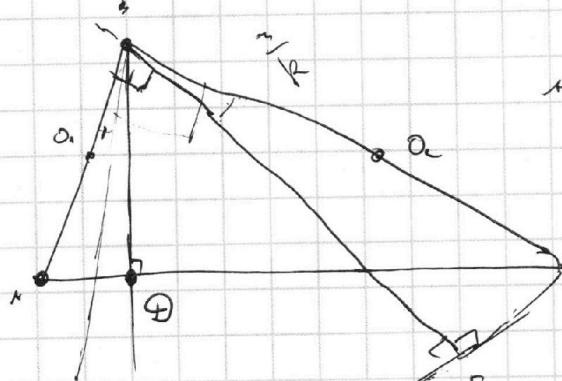
СТРАНИЦА  
ИЗ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по **каждой из задач** нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

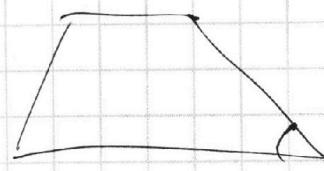
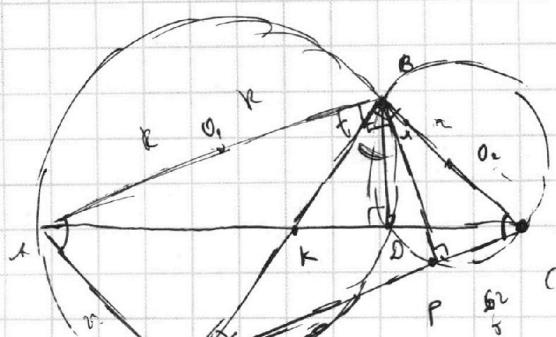
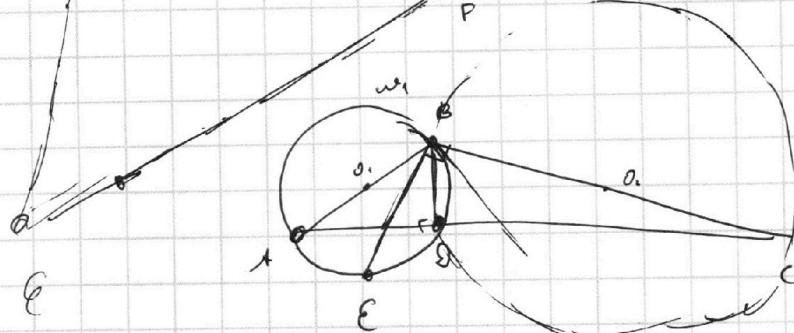


$$kO = \frac{Bk + BC}{kC}$$

$$Bk = \frac{8R}{5}; BC = 2r; kC \approx R$$



$$\frac{8r}{5} \cdot 2R = B \cdot AC$$



$$\frac{8r}{5} \cdot 2R = 2R - \frac{6r^2}{5}$$

$$32r = 30R - 18r$$

$$30R = \frac{50r}{3}$$

I-



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

1

2

3

4

5

6

7

СТРАНИЦА  
ИЗ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по **каждой из задач** нумеруются **отдельно**. Порча QR-кода недопустима!

$$\left\{ \begin{array}{l} (y - v^2 - x - 1)(v^2 - 3v + 4y^2) (y - v - 1) = 0 \\ y = (2a+1)v - a^2 + 1 \end{array} \right.$$

$$y = (2a+1)v - a^2 + 1$$

$$y = v^2 + v + 1; \quad \begin{cases} v=0 \\ y=0 \\ y=-v-1 \end{cases} \quad \begin{aligned} & 9y^2 - 16y^2 \\ & \left(\frac{v}{y}\right)^2 - 3\left(\frac{v}{y}\right) + 4 = 0 \end{aligned}$$

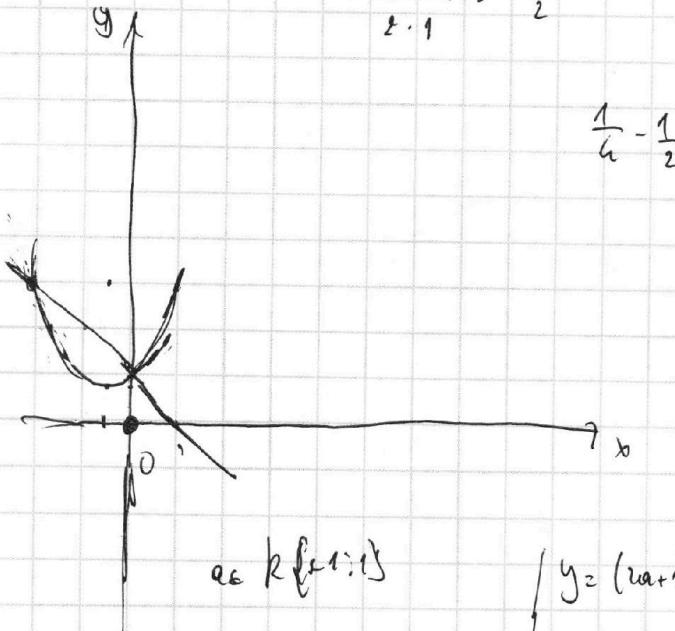
$$6^2 - 3t + 4$$

$$\frac{-1}{2 \cdot 1} = -\frac{1}{2} \quad 9 - 48 = -39$$

$$\frac{1}{4} - \frac{1}{2} + 1 = -\frac{1}{4} + 1 = \frac{3}{4}$$

$$a = \pm 1$$

~~ок~~  $\rightarrow f(-1; 1)$



$a \in K \{ -1; 1 \}$

$a_2 \neq 0$

$$ab = 8(a-b)^2$$

$$3a = k \omega k (a; b)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} y = (2a+1)v - a^2 + 1 \\ y = -v - 1 \end{array} \right.$$

$$(3a + 4b) : (a - b)$$

$$7b : (a - b)$$

I-

I-