



МОСКОВСКИЙ  
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ  
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"  
ПО МАТЕМАТИКЕ

## 11 КЛАСС. Вариант 11



- [3 балла] Дан приведённый квадратный трёхчлен  $f(x)$  такой, что уравнение  $f(x) = 2x^2$  имеет единственное решение, а также уравнение  $f(x) = -8$  имеет единственное решение. Найдите сумму корней уравнения  $f(x) = 0$ .
- [3 балла] Сколькими способами можно представить число  $n = 2^{401} \cdot 3^{500}$  в виде произведения двух натуральных чисел  $x$  и  $y$ , где  $y$  делится на  $x$ ?
- [5 баллов] Найдите количество пар целых чисел  $(x; y)$ , удовлетворяющих системе

$$\begin{cases} \log_x 2 + 3 \log_y 8 + 4 \log_{xy} \frac{1}{16} = 0, \\ \frac{x-1}{x+1} > \frac{3y-3}{7y+7}, \\ x \leq 31. \end{cases}$$

- [5 баллов] Найдите все пары натуральных чисел  $(a; b)$  такие, что

$$\begin{cases} 4 \cdot \min(a; b) = 3(a - b)^2, \\ 3 \cdot \max(a; b) = \text{НОК}(a; b). \end{cases}$$

- [5 баллов] На сторонах  $BA$  и  $BC$  треугольника  $ABC$  с тупым углом  $B$  как на диаметрах построены окружности  $\omega_1$  и  $\omega_2$  соответственно, пересекающиеся в точках  $B$  и  $D$ . Хорда  $BE$  окружности  $\omega_1$  перпендикулярна  $BC$ , а хорда  $BF$  окружности  $\omega_2$  перпендикулярна  $CE$  и касается  $\omega_1$ . Найдите отношение  $BF : BD$ , если  $\cos \angle BCE = \frac{3}{5}$ .

- [5 баллов] При каких значениях параметра  $a$  система

$$\begin{cases} (y - x^2 - x - 1)(x^2 - 3xy + 4y^2)(y + x - 1) = 0, \\ y = (2a + 1)x - a^2 + 1 \end{cases}$$

имеет ровно 2 решения?

- [6 баллов] В прямую четырёхугольную призму  $ABCDA_1B_1C_1D_1$  вписана сфера  $\omega$ . Луч с началом в точке  $A$  пересекает  $\omega$  точках  $P$  и  $Q$ , а луч с началом в точке  $C$  пересекает  $\omega$  в точках  $M$  и  $N$ . Пусть  $O$  — точка пересечения диагоналей четырёхугольника  $ABCD$ . Найдите объём призмы  $ABCDA_1B_1C_1D_1$  и расстояние  $\rho$  от центра  $\omega$  до плоскости  $PAC$ , если известно, что  $AO = 1$ ,  $BO = 2$ ,  $CO = 4$ ,  $AP = \frac{\sqrt{5}}{3}$ ,  $AQ = \frac{5\sqrt{5}}{3}$ ,  $CM = \frac{10\sqrt{5}}{9}$ ,  $CN = 2\sqrt{5}$ .



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

- |                                     |                          |                          |                          |                          |                          |                          |
|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1                                   | 2                        | 3                        | 4                        | 5                        | 6                        | 7                        |
| <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

СТРАНИЦА  
1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач **нумеруются отдельно**. Порча QR-кода недопустима!

19

Нужно  $f(x) = x^2 + ax + b$

$$x^2 + ax + b - 2x^2 = x^2 + ax - b = 0 \quad \Delta = a^2 + 4b$$

если 1 корень, то  $\Delta = 0 \Rightarrow a^2 + 4b = 0$

$$x^2 + ax + b = -\Delta \Rightarrow x^2 + ax + b + \Delta = 0; \quad \Delta = a^2 + 4b - 32$$

если один корень, то  $\Delta = 0 \Rightarrow a^2 + 4b - 32 = 0$

$$\begin{cases} a^2 + 4b = 0 \\ a^2 + 4b - 32 = 0 \end{cases}$$

$$-4b + 4b - 32 = 0 \Rightarrow -4b = 32 \Rightarrow b = -8 \Rightarrow a^2 = 16$$

$$a = \pm 4$$

если  $a = 4$ :  $f(x) = x^2 + 4x - 8$

сумма корней по теореме Виетта:  $x_1 + x_2 = -a = -4$  (для приведения к общей форме)

если  $a = -4$ :  $f(x) = x^2 - 4x - 8$ , тогда  $x_1 + x_2 = -f(0) = 4$

Ответ:  $-8; 4$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

- |                          |                                     |                          |                          |                          |                          |                          |
|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1                        | 2                                   | 3                        | 4                        | 5                        | 6                        | 7                        |
| <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

СТРАНИЦА  
1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по **каждой из задач** нумеруются **отдельно**. Порча QR-кода недопустима!

№2

Пусть  $x = 2^a \cdot 3^b$ ;  $y = 2^c \cdot 3^d$  ( $x$  и  $y$  - натуральные,  $a, b, c, d$  могут быть 0)

$x$  и  $y$  кратны простым числам 2 и 3, следущие простые числа  $x$  и  $y$  не кратны, т.к.  $n/x$ ; и кратны только 2 и 3

$$y/x \Rightarrow 2^c \cdot 3^d : 2^a \cdot 3^b \Rightarrow c \geq a, d \geq b$$

$$\text{если } n=x-y \Rightarrow 2^{a+c} \cdot 3^{b+d} = 2^{a+c} \cdot 3^{500} \Rightarrow \begin{cases} a+c=401 \\ b+d=500 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} d=401-c \\ b=500-a \end{cases}$$

$$\begin{cases} c \geq 401-c \\ d \geq 500-d \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2c \geq 401 \\ 2d \geq 500 \end{cases}$$

$$\begin{cases} c \geq 200,5 \\ d \geq 250 \end{cases} \quad \text{также } x \text{ и } y \text{ - натуральные, но } c+d \in \mathbb{Z} \Rightarrow \begin{cases} c \geq 201 \\ d \geq 250 \end{cases}$$

если  $c \leq 401$  и  $d \leq 500$ , т.к. иначе  $x$ -то члене (а это будет  $< 0$ )

$\Rightarrow c \in [201; 401] - 200-201$  варианта различия  $c$ ;

$d \in [250; 500] - 251$  варианта  $\Rightarrow$  всего  $201 \cdot 251$  варианта  $y$

для каждого  $y$  есть только одно  $x \Rightarrow$  можно  $\times$  всего  $201 \cdot 251 = 50451$

вариантов представить  $n$

Ответ: 50451

На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.










СТРАНИЦА  
1 ИЗ 3

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

№3

$$\begin{cases} \log_x 2 + 3(\log_y 8 + 4(\log_{xy} \frac{1}{16}) = 0 \quad (1) \\ \frac{x-1}{x+1} > \frac{3y-3}{7y+7} \quad (2) \\ x \neq 1 \end{cases}$$

$\partial\Omega$ :  $x > 0, x \neq 1$   
 $y > 0, y \neq 1$   
 $xy > 0, xy \neq 1$   
 $x+1 \neq 0$   
 ~~$7y+7 \neq 0$~~   
 $7y+7 \neq 0$

$$(1) \log_2 + 9\log_2 - 16\log_{xy} 2 = 0$$

$$\frac{\ln x}{\ln 2} + \frac{g(\ln 2)}{\ln y} - \frac{16(\ln 2)}{\ln(xy)} = 0$$

$$\frac{1}{\ln x} + \frac{9}{\ln y} - \frac{16}{\ln x + \ln y} = 0$$

$$\frac{g(\ln x + \ln y)}{\ln x \cdot \ln y} - \frac{16}{\ln x + \ln y} = 0$$

$$g(\ln^2 x + g(\ln x)(\ln y) + \ln x \cdot \ln y + \ln^2 y - 16(\ln x)(\ln y) = 0$$

$$g(\ln^2 x - 6(\ln y)(\ln x) + (\ln^2 y) = 0$$

$$(3(\ln x - (\ln y))^2 = 0 \Rightarrow 3(\ln x - (\ln y) = 0)$$

$$(\ln x)^3 = (\ln y); y = f(x) = (\ln x)^{\frac{1}{3}} \text{ на всей области определения} \Rightarrow$$

$$x^3 = y$$

$$(2) \frac{x-1}{x+1} > \frac{3}{7} \cdot \frac{x^2-1}{7x^2+1}$$

$$7 \frac{x-1}{x+1} > 3 \frac{(x-1)(x^2+x+1)}{(7x^2+1)(x^2+x+1)}$$

На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.



- |                          |                          |                                     |                          |                          |                          |                          |
|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |
|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|

СТРАНИЦА  
2 ИЗ 3

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\frac{7(x-1)(x^2-x+1)}{(x+1)(x^2-x+1)} - \frac{3(x-1)(x^2+x+1)}{(x+1)(x^2-x+1)} > 0$$

$$\frac{(x-1)(7x^2-7x+7-3x^2-3x-3)}{x^3+1(x^2-x+1)} > 0$$

$$\frac{(x-1)(4x^2-10x+4)}{x+1} > 0 \quad (x^2-x+1 > 0 \text{ при } x \neq -1 \Rightarrow x > 1 \cup x < 0)$$

$$4x^2-10x+4=0 \Rightarrow D=100-64=36 \Rightarrow x = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a} = \frac{10 \pm 6}{8} = \begin{cases} 2 \\ \frac{1}{2} \end{cases}$$

$$\frac{(x-1)(x-2)(x-\frac{1}{2})}{x+1} \cdot 4 > 0$$

$$\begin{array}{c|ccccc} & + & - & + & - & + \\ \hline -1 & & & & & \\ \frac{1}{2} & & & & & \\ 1 & & & & & \\ 2 & & & & & \end{array} \quad x \in (-\infty; -1) \cup (\frac{1}{2}; 1) \cup (2; +\infty)$$

нк  $x \neq -1$  (такие задачи), а нк  $x \neq \frac{1}{2}$  и  $x \neq 2$  (такие задачи),

$$\text{то } x \in (-\infty; -1) \cup (2; +\infty)$$

$$x \in \mathbb{R} \Rightarrow x \in (-\infty; -1) \cup (2; +\infty)$$

$$\cancel{x \neq 1}, x > 0; x \neq 1 \Rightarrow x^3 > 0; x \neq 2 \Rightarrow x > 0; x \neq 2 \Rightarrow x^3 > 0 \Rightarrow x > 0;$$

$$\left\{ \begin{array}{l} x \neq 1 \\ x \neq 2 \end{array} \right. \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} x^3 \neq 1 \\ x^3 \neq 8 \end{array} \right. \Rightarrow x \neq 1; 2 \notin (-\infty; -1) \cup (2; +\infty)$$

$$x \neq 1, \text{ нк } x > 0 \Rightarrow x^4 > 0, \text{ нк } x > 0, \text{ нк } x^4 > 0$$

$$x \neq 1, \text{ нк } x = 1 \Rightarrow x^3 = 1 \Rightarrow x \neq 1; 1 \notin (-\infty; -1) \cup (2; +\infty)$$

На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.



- |                          |                          |                                     |                          |                          |                          |                          |
|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1                        | 2                        | 3                                   | 4                        | 5                        | 6                        | 7                        |
| <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

СТРАНИЦА  
3 ИЗ 3

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\begin{cases} x+1 \neq 0 \\ 7y+7 \neq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \neq -1 \\ y \neq -1 \end{cases} \Rightarrow x \in (-\infty; -1) \cup (2; 31]$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x \in (-\infty; -1) \cup (2; 31] \\ x > 0 \end{cases} \Rightarrow x \in (2; 31] \Rightarrow x \in [3; 31] \quad (x - \text{целое})$$

$y = x^3$ , при  $x \in \mathbb{Z}$   $x^3 \in \mathbb{Z} \Rightarrow y \in \mathbb{Z}$

Для каждого  $x$  есть одно значение  $x^3 \Rightarrow$  есть одно значение  $y$ ,

$$\text{с тем } y_1 = y_2 \wedge x_1^3 = x_2^3 \Rightarrow (x_1 - x_2)(x_1^2 + x_1 x_2 + x_2^2) = 0$$

$\Rightarrow x_1 = x_2 \quad (x_1^2 + x_1 x_2 + x_2^2 > 0 \text{ при } x_1 \neq x_2 \text{ так как ненулевой квадрат})$

$\Rightarrow$  с тем  $y_1 = y_2$ , но  $x_1 \neq x_2 \Rightarrow$

таких различных пар  $(xy)$  столько, сколько различных  $x$

$x \in [3; 31] \Rightarrow$  есть  $31 - 3 + 1 = 29$  различных целых  $x$

Ответ: 29



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

- |                            |                            |                            |                                       |                            |                            |                            |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|---------------------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|
| <input type="checkbox"/> 1 | <input type="checkbox"/> 2 | <input type="checkbox"/> 3 | <input checked="" type="checkbox"/> 4 | <input type="checkbox"/> 5 | <input type="checkbox"/> 6 | <input type="checkbox"/> 7 |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|---------------------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|

СТРАНИЦА  
1 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

№

Решение  $a \geq b$ ;  $a = a_1 \cdot d$ ;  $b = b_1 \cdot d$ , где

$d = \text{НОД}(a, b)$ ; т.к.  $d = \text{НОД}(a_1, b_1)$ , т.е.  $a_1$  ~~единично~~ просто с  $b_1$

\*  $\text{НОД}(a, b) = a_1 \cdot d \cdot \frac{d}{a_1 \cdot b_1 + d}$  (доказательство на стр. 2)

$$\min(a, b) = b \quad (\text{из } 3) \quad \text{т.к. } \text{НОД}(a, b) = a$$

$$3 \cdot b = 3(a - b)^2$$

$$\left\{ \begin{array}{l} 3a = a_1 \cdot b_1 \cdot d \Rightarrow 3a = a \cdot b_1 \Rightarrow b_1 = 3 \Rightarrow b = 3d \\ 3 \cdot b = 3(a - b)^2 \end{array} \right.$$

$$72d = 3 \cdot (a_1 d - 3d)^2$$

$$72 \cdot d = a_1^2 d^2 + 9d^2 - 6a_1 d^2$$

$$a_1^2 d^2 - 6a_1 d^2 + 9d^2 - 4 = 0$$

$$d^2 = 36d^2 - 4(9d^2 - 4) = 36d^2 - 936d^2 + 16d \approx 76d$$

$$a_1 = \frac{6d \pm 4\sqrt{d}}{2d} = 3 \pm \frac{2}{\sqrt{d}}, \text{ т.к. } a_1 \in \mathbb{Z}, \text{ то } 3 \pm \frac{2}{\sqrt{d}} \in \mathbb{Z}$$

$$\frac{2}{\sqrt{d}} \in \mathbb{Z} \Rightarrow \sqrt{d} \text{-делимое } 2 \text{ и } \sqrt{d} > 0 \Rightarrow \sqrt{d} = 1 \text{ или } 2$$

~~$$\sqrt{d} = 1 \Rightarrow d = 1 \Rightarrow a_1 = 5 \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} a = 5 \\ b = 3 \end{array} \right.$$~~

$$\sqrt{d} = 2 \Rightarrow d = 4 \Rightarrow a_1 = \begin{cases} 5 \\ 2 \end{cases} \Rightarrow a = \begin{cases} 5 \\ 8 \end{cases} \Rightarrow b = \begin{cases} 3 \\ 12 \end{cases} \quad 1 < 3 \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} a = 5 \\ b = 12 \end{array} \right.$$

$$\sqrt{d} = 2 \Rightarrow d = 4 \Rightarrow a_1 = \begin{cases} 5 \\ 2 \end{cases} \Rightarrow a = \begin{cases} 16 \\ 8 \end{cases}; \quad 8 < 12 \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} a = 16 \\ b = 12 \end{array} \right.$$

На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.



- |                          |                          |                          |                                     |                          |                          |                          |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1                        | 2                        | 3                        | 4                                   | 5                        | 6                        | 7                        |
| <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

СТРАНИЦА  
2 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

⇒ есть 4 варианта  $(a; b)$ :  $(5; 3); (3; 5); (12; 16); (16; 12)$

Правильны:  $(3; 5)$ ;  $4 \cdot 3 = 3 \cdot 2^2$  - верно;  $3 \cdot 5 = 15$  - верно = недоказано  
 $(5; 3)$

$(12; 16)$ :  $12 \cdot 4 = 3 \cdot 4^2 \Rightarrow 48 = 48$  - верно;  $16 \cdot 3 = 48$  - верно.  
 $(16; 12)$

~~Доказать~~ \*  $a = a_1 d; b = b_1 d; d = \text{НДК}(a; b)$

дк  $d$ -наибольший общий делитель  $a$  и  $b \Rightarrow a_1$  взаимно прост с  $b$ ,

покажем, что  $\text{НДК}(a_1 b) = a_1 \cdot b_1 \cdot d$

Делю  $\text{НДК}(k \cdot a)$ , где  $k$ -натуральное:

$ak = k \cdot ad; ka_1 d; b = kd = m \cdot b \Rightarrow ka_1 d = m \cdot b \cdot d \Rightarrow$

$ka_1 = m \cdot b \Rightarrow ka_1; b_1$ , но  $a_1$  и  $b_1$  - взаимно просты (иначе был бы делитель

$p$ , что  $a_1; p; b_1; p$  и тогда  $\text{НДК}(a; b) = d \cdot p$ , но  $\text{НДК}(a; b) = d \Rightarrow p = 1$

⇒  $a_1, b_1$  - взаимно просты)

⇒  $k; b_1 \Rightarrow k$ -делит  $b_1$  (если  $b_1 = 1$   $\text{НДК}(a; b) = a$ ;

$a_1 \cdot d \cdot b_1 = a \cdot 1 = a \Rightarrow$  ~~а~~  $a_1 \cdot b_1 = 1$  тоже верно)

Ответ:  $(3; 5); (5; 3); (12; 16); (16; 12)$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

- |                            |                            |                            |                            |                                       |                            |                            |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|---------------------------------------|----------------------------|----------------------------|
| <input type="checkbox"/> 1 | <input type="checkbox"/> 2 | <input type="checkbox"/> 3 | <input type="checkbox"/> 4 | <input checked="" type="checkbox"/> 5 | <input type="checkbox"/> 6 | <input type="checkbox"/> 7 |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|---------------------------------------|----------------------------|----------------------------|

СТРАНИЦА  
1 из 4

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

№5

Рассмотрим  $\angle ADE$  — угол

$AB$ -диаметр  $\omega_1$ ;

$BC$ -диаметр  $\omega_2$

$\omega_1 \cap \omega_2 = B; D$

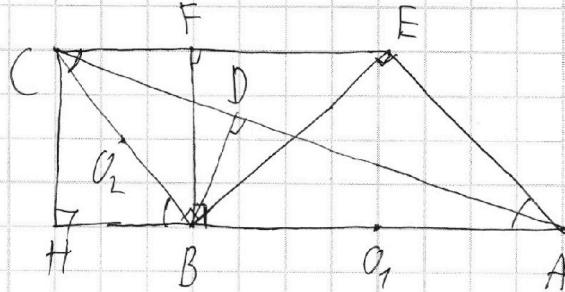
$E \in \omega_1; BE \perp BC$

$BF \perp CE; F \in \omega_2$

$BF$ -касательная к  $\omega_1$ ,

$$\cos \angle BCE = \frac{3}{7}$$

$$\frac{BF}{BD} = ?$$



Доказательство:

Пусть  $O_1$  — центр  $\omega_1$ ;  $O_2$  — центр  $\omega_2$ .

$O_1$  — середина  $AB$ ;  $O_2$  — середина  $BC$

Рассмотрим  $BD' \perp AC$  ( $BD'$  — высота)

$$\Rightarrow \triangle BOD' \text{ — прямоугольный} \Rightarrow O_1O' = \frac{AB}{2} = AO_1$$

$$\Rightarrow O' \in \omega_1 \quad (O'D' \text{ — медиана в } \triangle ABD')$$

Аналогично  $O_2O' = \frac{BC}{2}$ , т.к.  $\triangle BCD'$  — прямоугольный

$$\Rightarrow O' \in \omega_2 \Rightarrow O' = O_1 \cap O_2 \Rightarrow O' = O$$

Рассмотрим  $BF \cap CE = F'$ ;  $\angle BF'C = 90^\circ$  ( $CE \perp BF$ )

$$\Rightarrow \text{т.к. } \triangle BCF' \text{ — прямоугольный} \Rightarrow O_2F' = \frac{BC}{2} \quad (\text{медиана к гипotenузе } O_2E')$$

$$\Rightarrow O_2F' = O_2B = F'E \in \omega_2; FE \in \omega_2 \Rightarrow F = F' \Rightarrow FE \in CE$$

$BF$  — касательная к  $\omega_1$ ;  $O_1B$  — радиус в точке касания  $\Rightarrow$

$$O_1B \perp BF \Rightarrow AB \perp BF$$

$$BF \perp AB; BF \perp CE \Rightarrow AB \parallel CE$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

- |                            |                            |                            |                            |                                       |                            |                            |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|---------------------------------------|----------------------------|----------------------------|
| <input type="checkbox"/> 1 | <input type="checkbox"/> 2 | <input type="checkbox"/> 3 | <input type="checkbox"/> 4 | <input checked="" type="checkbox"/> 5 | <input type="checkbox"/> 6 | <input type="checkbox"/> 7 |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|---------------------------------------|----------------------------|----------------------------|

СТРАНИЦА  
2 ИЗ 4

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Впишем  $\triangle ABC$  в систему координат так, что  $B(0;0)$

$Ox \parallel BA$ ;  $Oy \parallel BC$  ( $OF \perp AO$ )

Пусть  $A(a;0)$  ( $A \in AB$ );  $C(c;b)$ ;  $D(x_0; y_0)$  ( $c < 0$  и  $b > 0$ )  
 $F(0; y_F)$ ;  $E(x_E; y_E)$  ( $a > 0$ ,  $b > 0$ )

$O_1$ -середина  $AB \Rightarrow O_1\left(\frac{a}{2}; 0\right) \Rightarrow$  радиус  $\omega_1 = BO_1 = \frac{a}{2}$ , то

$$\omega_1: \left(x - \frac{a}{2}\right)^2 + y^2 = \left(\frac{a}{2}\right)^2 \Rightarrow x^2 - ax + y^2 = 0$$

$O_2$ -середина  $BC \Rightarrow O_2\left(\frac{c}{2}; \frac{b}{2}\right)$ , радиус  $\omega_2$  радиус  $BO_2$

$$BO_2 = \sqrt{\left(\frac{c}{2}\right)^2 + \left(\frac{b}{2}\right)^2} \Rightarrow \omega_2: \left(x - \frac{c}{2}\right)^2 + \left(y - \frac{b}{2}\right)^2 = \left(\frac{c}{2}\right)^2 + \left(\frac{b}{2}\right)^2$$

$$\Rightarrow x^2 + y^2 - cx - by = 0$$

$CE \parallel AB$ ;  $AB \parallel Ox \Rightarrow CE \parallel Ox$

$y_C = y_E = y_F$ ;  $c, y_C = b \Rightarrow F(0; b)$ ;  $E(x_E; b)$

$$BF = \sqrt{(a-0)^2 + (b-0)^2} = b$$

$\angle ECB = \angle CBA$  т.к. наименование для  $EC \parallel AB$ , сек  $BC$

( $EH$ -биссектриса  $AB$ )

$CH \perp AB \Rightarrow CH \parallel Oy \Rightarrow H$ ,  $CH \perp H(0;0)$

~~$\sin \angle HBC = \sqrt{1 - \cos^2 HBC} = \sqrt{1 - \frac{9}{25}} = \frac{4}{5} \Rightarrow \operatorname{tg} \angle HBC = \frac{4}{3}$~~

$$y_B = BC: \operatorname{tg} \angle HBC = \frac{c}{H_B} = \frac{c}{b} \cdot \frac{b}{4} = \frac{c}{4} \quad (H = \sqrt{(c-0)^2 + (b-0)^2} = b)$$

$$\Rightarrow \frac{b}{4} = \frac{c}{3} \Rightarrow 12 = 3c \Rightarrow c = -\frac{3}{4}b \quad (c < 0)$$

На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

- |                          |                          |                          |                          |                                     |                          |                          |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|
| <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|

СТРАНИЦА  
3 ИЗ 4

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



$$\angle CBA = 120^\circ - \angle HBC = 180^\circ - \angle BCE$$

$$CB \perp BE \Rightarrow \angle EBA = \angle CBA - 90^\circ = 120^\circ - 90^\circ = 30^\circ$$

$E \in \omega_1$ ;  $AC$ -диаметр  $\omega_1 \Rightarrow \angle BEA = 90^\circ$

$\angle E \circ BEA$ ;  $\angle BAE = 120^\circ - 90^\circ + \angle BCE = \angle BCE$

$$\Rightarrow BE = AB \cdot \sin \angle BAE = AB \cdot \frac{4}{5} = \frac{4}{5}a \quad (AB = a)$$

$$E \in \omega_1 \Rightarrow \left( \begin{array}{l} x_E^2 + y_E^2 = a^2 \\ x_E^2 + y_E^2 - ax_E = 0 \end{array} \right)$$

$$\Rightarrow x_E^2 + b^2 - ax_E = 0$$

$$BE = \sqrt{b^2 + x_E^2} \Rightarrow x_E^2 + b^2 = \frac{16}{25}a^2 \Rightarrow x_E^2 = \frac{26}{25}a^2 - b^2$$

$$\Rightarrow \frac{26}{25}a^2 - b^2 + b^2 - ax_E = 0 \Rightarrow \frac{16}{25}a = x_E$$

$$\frac{16}{25}a^2 = b^2 + x_E^2 \Rightarrow \frac{16}{25}a^2 = b^2 + \frac{16}{25}a^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow b^2 = \frac{16}{25}a^2 \left( 1 - \frac{16}{25} \right) \Rightarrow b^2 = \frac{16}{25}a^2 \cdot \frac{9}{25} \Rightarrow b = \frac{4}{5} \cdot \frac{3}{5}a = \frac{12}{25}a$$

$$\Rightarrow d = \frac{25}{72}b$$

$$D \in \omega_1; \omega_2 \Rightarrow \begin{cases} x_D^2 + y_D^2 - ax_D = 0 \\ x_D^2 + y_D^2 - cx_D - by_D = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_D^2 + y_D^2 = ax_D \\ x_D^2 + y_D^2 = cx_D + by_D \end{cases}$$

$$ax_D - cx_D - by_D = 0 \Rightarrow y_D = \frac{a-c}{b}x_D$$

\* для прямой  $AC$ : \* к прямой  $y = kx + l (= 0)$

$$\begin{cases} 0 = kax + l \\ b = kc + l \end{cases} \Rightarrow b = k(c-a) \Rightarrow k = \frac{b}{c-a}; \quad l = -ka = -\frac{ab}{c-a}$$

На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

- |                          |                          |                          |                          |                                     |                          |                          |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|
| <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|

СТРАНИЦА  
4 ИЗ 4

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\Rightarrow AC; y = \frac{b}{c-a}x - \frac{ab}{c-a}$$

$$D \in AC \Rightarrow y_D = \frac{b}{c-a}x_D - \frac{ab}{c-a}; y_D = \frac{a-c}{b}x_D \Rightarrow$$

$$\frac{b}{c-a}x_D - \frac{ab}{c-a} = \frac{a-c}{b}x_D$$

$$x_D \left( \frac{b^2 + (a-c)^2}{b(c-a)} \right) = \frac{ab}{c-a} \Rightarrow x_D \cdot \frac{b^2 + (a-c)^2}{b} = ab \Rightarrow x_D = \frac{ab^2}{b^2 + (a-c)^2}$$

$$y_D = \frac{a-c}{b}x_D = \frac{(a-c)ab}{b^2 + (a-c)^2}$$

$$\Rightarrow BD = \sqrt{x_D^2 + y_D^2} = \sqrt{\frac{a^2 b^4}{(b^2 + (a-c)^2)^2} + \frac{(a-c)^2 a^2 b^2}{(b^2 + (a-c)^2)^2}} = \frac{ab \sqrt{b^2 + (a-c)^2}}{b^2 + (a-c)^2} =$$

$$= \frac{ab}{\sqrt{b^2 + (a-c)^2}}$$

$$\frac{BF}{BD} = \frac{b}{\frac{ab}{\sqrt{b^2 + (a-c)^2}}} = \frac{\sqrt{b^2 + (a-c)^2}}{a} = \frac{\sqrt{b^2 + \left(\frac{25}{72}b + \frac{3}{4}b\right)^2}}{\frac{25}{72}b} = \frac{\sqrt{1 + \left(\frac{25+9}{12}\right)^2}}{\frac{25}{72}} =$$

$$= \frac{\sqrt{1 + \frac{34^2}{12^2}}}{\frac{25}{72}} = \frac{\sqrt{36 + 289}}{6 \cdot \frac{25}{72}} = \frac{2\sqrt{325}}{25} = \frac{2\sqrt{13}}{5}$$

$$\text{Ответ: } \frac{2\sqrt{13}}{5}$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

- |                            |                            |                            |                            |                            |                                       |                            |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|---------------------------------------|----------------------------|
| <input type="checkbox"/> 1 | <input type="checkbox"/> 2 | <input type="checkbox"/> 3 | <input type="checkbox"/> 4 | <input type="checkbox"/> 5 | <input checked="" type="checkbox"/> 6 | <input type="checkbox"/> 7 |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|---------------------------------------|----------------------------|

СТРАНИЦА  
1 ИЗ 3

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

№6

$$\left\{ \begin{array}{l} (y - x^2 - x - 1)(x^2 - 3xy + 4y^2)(y + x - 1) = 0 \\ y = (2a+1)x - a^2 + 1 \end{array} \right. \text{ имеет 2 решения}$$

$$(y - x^2 - x - 1)(x^2 - 3xy + 4y^2)(y + x - 1) = 0$$

$$\left\{ \begin{array}{l} y = x^2 + x + 1 \\ x^2 - 3xy + 4y^2 = 0 \end{array} \right. \text{ } \textcircled{1}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} y = x^2 + x + 1 \\ y + x = 1 \end{array} \right. \text{ } \textcircled{2}$$

$$\textcircled{1} (2a+1)x - a^2 + 1 = x^2 + x + 1$$

$$x^2 + x - 2ax - x - a^2 + 1 = 0$$

$$x^2 - 2ax + 1 = 0 \Rightarrow (x-a)^2 = 0 \text{ тогда есть корень } a$$

$$x=a \Rightarrow y = a^2 + a + 1 \Rightarrow \text{без корней при } x=a \text{ или } y=a^2+a+1$$

$$\textcircled{2} x^2 - 3xy + 4y^2 = 0$$

$$t = yy' - 16y^2 = -7y^2 \text{ при } y \neq 0 \text{ и } t < 0 \Rightarrow \text{нет решений, при}$$

$$y=0 \quad x^2=0 \Rightarrow x=0 \Rightarrow a = (2a+1) \cdot 0 - a^2 + 1 \Rightarrow a = \pm 1$$

$$\Rightarrow \text{при } a = \pm 1 \text{ есть решение } (0; 0)$$

$$\textcircled{3} (2a+1)x - a^2 + 1 + x = 1$$

$$(2a+2)x = a^2$$

$$(a+1)x = \frac{a^2}{2}$$

$$\text{при } a=-1; \quad 0 = \frac{1}{2} \text{ неверно, при } a=-1 \text{ нет решений.}$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

- |                            |                            |                            |                            |                            |                                       |                            |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|---------------------------------------|----------------------------|
| <input type="checkbox"/> 1 | <input type="checkbox"/> 2 | <input type="checkbox"/> 3 | <input type="checkbox"/> 4 | <input type="checkbox"/> 5 | <input checked="" type="checkbox"/> 6 | <input type="checkbox"/> 7 |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|---------------------------------------|----------------------------|

СТРАНИЦА  
2 ИЗ 3

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

при  $a \neq -1$ :

$$x = \frac{a^2}{2(a+1)} \Rightarrow y = \frac{a^2}{2(a+1)} \cdot (2a+1) - a^2 + 1 = \frac{2a^3 + a^2 - 2a^3 - 2a^2}{3(a+1)} + 1 =$$

$$= \frac{-a^2}{2(a+1)} + 1 \Rightarrow \text{при } a \neq -1 \text{ решение } \left( \frac{a^2}{2(a+1)}, \frac{-a^2}{2(a+1)} + 1 \right)$$

$\Rightarrow$  при  $a \in (a; a^2 + a + 1)$

при  $a = \pm 1$   $(0; 0)$

при  $a \neq -1$   $\left( \frac{a^2}{2(a+1)}, \frac{-a^2}{2(a+1)} + 1 \right)$

при  $a = 1$ :

решения:  $(1; 3); (0; 0); \left(\frac{1}{9}; \frac{3}{9}\right)$  - 3 решения неподходящи

при  $a = -1$ :

решения:  $(-1; 1); (0; 0)$  - 2 решения, подходит

при  $a \neq -1; 1$

$(a; a^2 + a + 1)$  и  $\left( \frac{a^2}{2(a+1)}, \frac{-a^2}{2(a+1)} + 1 \right)$  - всего 2 решения

они равны, если  $a = \frac{a^2}{2(a+1)} \cdot a^2 + a + 1 = \frac{-a^2}{2(a+1)} + 1$

$$\begin{cases} 2a^2 + 2a = a^2 \\ (a^2 + a) : 2(a+1) = -a^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a^2 + 2a = 0 \\ 2a^3 + 2a^2 + 2a^2 + 2a + a^2 = 0 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} a(a+2) = 0 \Rightarrow a = 0; -2 \\ a(2a^2 + 5a + 2) = 0 \end{cases}$$

при  $a = 0$ :  $a(2a^2 + 5a + 2) = 0$ , тут  $a = 0$

На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1

2

3

4

5

6

7

СТРАНИЦА  
3 ИЗ 3

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

при  $a = -2$ :

$$9(2a^2 + 5a + 2) = -2(y - 10 + 2) = 0$$

$\Rightarrow$  при  $a = 0; -2$  - 1 решение

при других  $a$  - 2 решения

$\Rightarrow$  при  $a \in \{-2; -1; 0\}$  - при  $a \in \{2; 0; 1\}$  - 1 решение

$$\Rightarrow a \in (-\infty; -2) \cup (-2; 0) \cup (0; 1) \cup (1; +\infty)$$

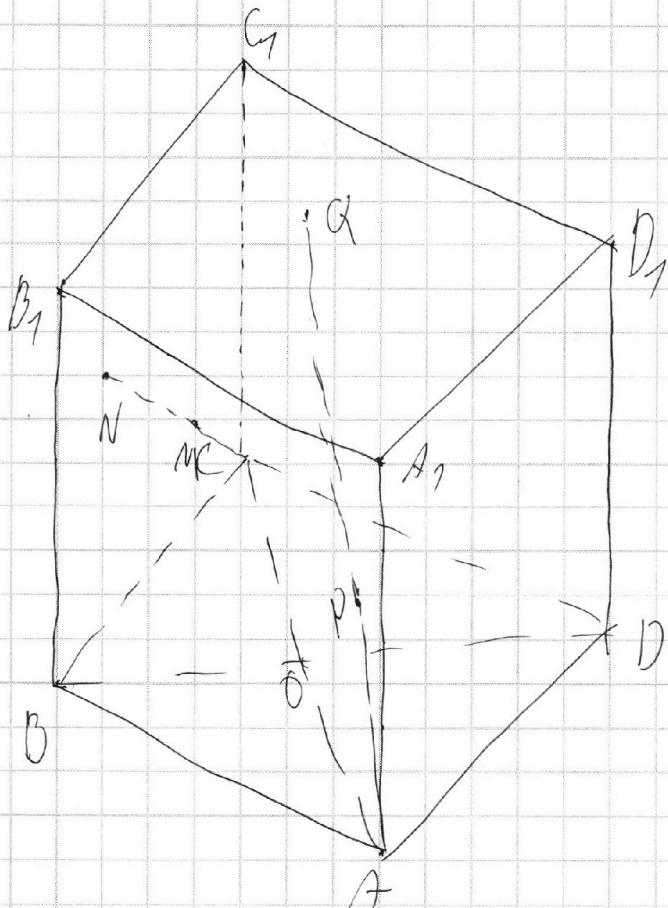
$$\text{Ответ: } a \in (-\infty; -2) \cup (-2; 0) \cup (0; 1) \cup (1; +\infty)$$

На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

- |                          |                          |                          |                          |                          |                          |                                     |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|
| <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|

СТРАНИЦА  
1 ИЗ 3

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



Дано: средняя линия в треугольнике

одна из трех

$AC \cap BD = P$

$$AO = 1; PO = 2; CO = 4$$

$$AP = \frac{\sqrt{5}}{3}; AQ = \frac{5\sqrt{5}}{3};$$

$$(M = \frac{10\sqrt{5}}{9}, N = 2\sqrt{5})$$

$V_{AKD} = V_{BCH}$  - ?

$P(k; Af(PAC))$  - ?

K-секущая

Решение:

Через точку A отложим касательную к окружности  $AP \cdot AQ = \frac{5 \cdot 5}{9} = \frac{25}{9}$

через точку C:  $CM \cdot CN = \frac{10 \cdot 2 \cdot 5}{9} = \frac{100}{9}$

Пусть O'-точка касания окружности  $(ABC)$

то  $O'$ -точка касания

$$AO' = \sqrt{\frac{25}{9}} = \frac{5}{3}; CO' = \sqrt{\frac{100}{9}} = \frac{10}{3}$$

$$AO' + OC = \frac{15}{3} = 5; AO' + OC = AC = 5$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

- |                            |                            |                            |                            |                            |                            |                                       |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|---------------------------------------|
| <input type="checkbox"/> 1 | <input type="checkbox"/> 2 | <input type="checkbox"/> 3 | <input type="checkbox"/> 4 | <input type="checkbox"/> 5 | <input type="checkbox"/> 6 | <input checked="" type="checkbox"/> 7 |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|---------------------------------------|

СТРАНИЦА  
2 ИЗ 3

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$AO' + CO' = AC \Rightarrow O' \in AC \not\subset AO$$

$$O' \not\in AC \Rightarrow AC -$$

и т.к. прямая прямая, то  $O'$ - проекция  $O$  на  $(AC)$

будет вписана в  $\angle AOC$ )

$$\text{знач} \quad O' = O'$$

$\Rightarrow AC$ -диагональ  $\angle BAC$  и  $\angle BDC$ )

$$\Rightarrow \angle BAC = \angle AOD; \angle ACD = \angle ACD; AC = AC \Rightarrow$$

$$\angle ABC = \angle ADC \Rightarrow ABCD\text{-действ.}$$

$$OD = BO = 2$$

$$S_{ACD} = AC \cdot BD \cdot \sin 90^\circ = 5 \cdot 4 = 20 \quad (\sin 90^\circ = 1 \text{ или } \sin 90^\circ = 1)$$

гладокий)

~~при проведении лежащей через то же самое  $AK$~~   
~~составь точки  $A; (AK-R); (AK+R)$ , и т.к.  $K$ -центр  $\omega; R$~~   
~~то радиус  $\Rightarrow AK^2 = R^2$~~

Несколько  $R$  радиус  $\omega$ ;  $ABCDAIBC$  - призма

$$p(f_1; f_{BC}) = 2R \Rightarrow V_{ABCDAIBC} = S_{ACD} \cdot 2R = 40R$$

радиус  $\omega$  радиус радиус  $\omega'$ ;  $R = 4$

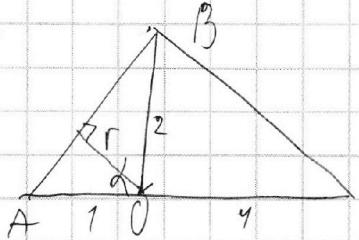
На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.



- 1      2      3      4      5      6      7

СТРАНИЦА  
3 ИЗ 3

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



Пусть  $\angle AOB = x$

~~угол AOB~~

C OB - биссектриса  $\angle ABC \Rightarrow$

$$\Rightarrow AO; BC = A0; OC = 1:4$$

$$\Rightarrow BC = 4AB$$

$$k_2 \circ ABO; AB^2 = 1+4-4\cos d;$$

$$k_2 \circ OBC; 16AB^2 = 16+9-16\cos(180-d) \Rightarrow AB^2 = \frac{5}{4} + \cos d$$

$$5-4\cos d = \frac{5}{4} + \cos d \Rightarrow \cos d = \frac{3}{4}$$

$$\Rightarrow \sin d = \frac{\sqrt{17}}{4} = \frac{\sqrt{17}}{4}; AB^2 = 5-3=2 \Rightarrow AB = \sqrt{2}$$

$$S_{AOB} = \frac{1}{2} \sin d \cdot AO \cdot OB = r \cdot AB \cdot \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{\sqrt{17}}{4} \cdot 1 \cdot 2 = r \cdot \sqrt{2}$$

$$\Rightarrow r = \frac{\sqrt{17}}{2\sqrt{2}} = R$$

$$\Rightarrow V_{ABCD A_1B_1C_1D_1} = \pi r \cdot \frac{\sqrt{17}}{2\sqrt{2}} = \frac{20\sqrt{17}}{2} = 10\sqrt{17}$$

Ответ:  $10\sqrt{17}$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

 1 2 3 4 5 6 7СТРАНИЦА  
\_ ИЗ \_

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

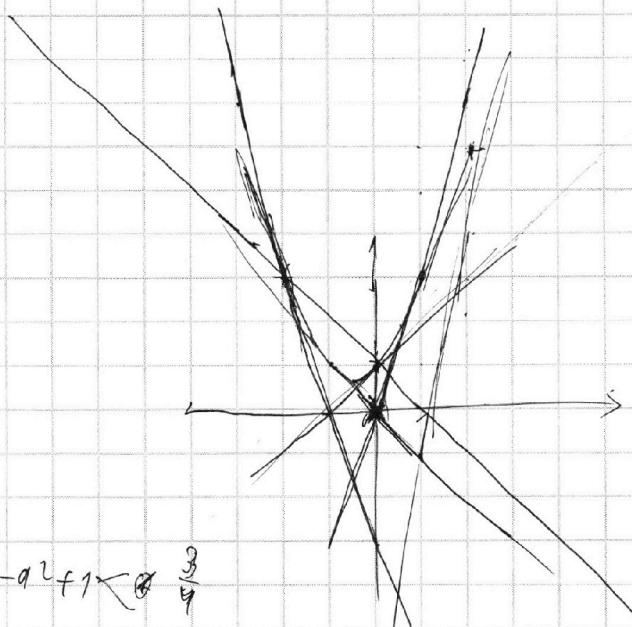
 $y$ 

$$y = -\sqrt{x-1} \quad , \quad -5x-1 + x-1 \geq 0$$

$$-5x = 2$$

$$-2x - 4 \geq 0$$

$$x = -2$$



$$(2a+1)x - a^2 + 1 < 0$$

$$a^2 - 2ax - x - 1 < 0$$

$$x^2 + ax + 1$$

$$(2a+1)x - a^2 + \frac{1}{4} < 0$$

$$2a^2 + a - a^2 + 1 = a^2 + a + 1 > 0$$

$$2ax + x - a^2 + x - x^2 > 0$$

$$-(a-x)^2 < 0$$

$$a = x$$

$$9 + 3a^2 = m$$

$$6 + 7x - 8$$

$$x = 2$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.



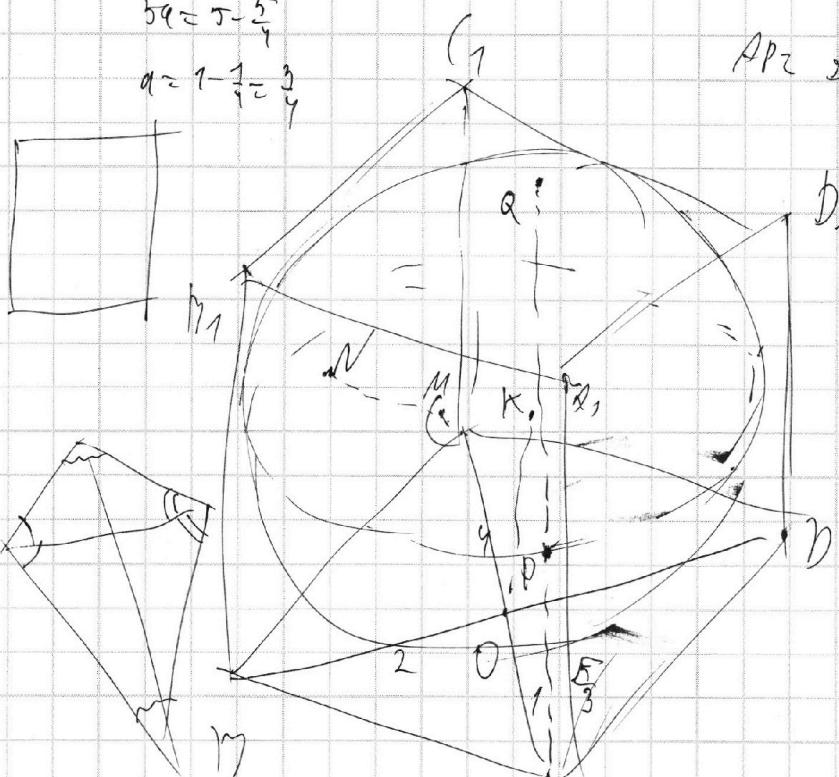
СТРАНИЦА  
ИЗ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. **Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно.** Порча QR-кода недопустима!

$$5 - 4a = \frac{5}{4} + a$$

$$5q = \tau - \frac{5}{q}$$

$$q = 1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$$



AG-1  
3

APZ 3

$$f_M = \frac{105}{\theta}$$

W 22

Chances of A;

$$\frac{5}{3} \sqrt{3} \cdot \sqrt{5} =$$

$$\frac{5}{9} = \frac{25}{45}$$

C,  $\frac{100}{9}$

$$(A_0 R)(A_0 + R) \approx A_0^2 - R^2 = \frac{25}{9}$$

$$1 \left( -\frac{5}{3} \right) L_2 = -\frac{10}{3}$$

Очень красив

$$1,5 = 5 \pi$$

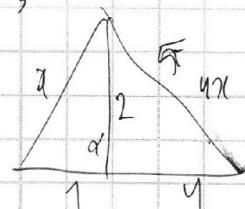
X<sup>2</sup>-5-41092

$$x = \frac{5}{y} \text{ rad}$$

$$x^2 = 1 - y - \frac{y}{4} \cos \alpha$$

$$26r^2 = 4 + 16 + 16 \cos \delta$$

$$\frac{17}{3} > 5$$





На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи **отдельно**.

СТРАНИЦА

— ИЗ —

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. **Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно.** Порча QR-кода недопустима!



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.



СТРАНИЦА  
— ИЗ —

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!





На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

- |                            |                            |                            |                            |                            |                            |                            |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|
| <input type="checkbox"/> 1 | <input type="checkbox"/> 2 | <input type="checkbox"/> 3 | <input type="checkbox"/> 4 | <input type="checkbox"/> 5 | <input type="checkbox"/> 6 | <input type="checkbox"/> 7 |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|

СТРАНИЦА  
ИЗ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по **каждой из задач** нумеруются **отдельно**. Порча QR-кода недопустима!

$$\frac{\ln x}{\ln y} + g \cdot \frac{\ln x}{\ln y} + \frac{1}{16} = 16^{-1} \quad 16 = 2^4 \Rightarrow \frac{1}{16} = 2^{-4} \quad \frac{x-1}{x+1} > \frac{3}{7} \frac{(x-1)(x^2+x+1)}{(x+1)(x^2-x+1)}$$

$$\frac{\ln x}{\ln y} + \frac{g \cdot \ln x}{\ln y} + \frac{-16 \cdot \ln x}{\ln x \cdot \ln y} \geq 0$$

$$y = x^3$$

$$\frac{1}{\ln x} + \frac{g}{\ln y} - \frac{16}{(\ln x \cdot \ln y)} = 0$$

$$\frac{x-1}{x+1} > \frac{3 \cdot \frac{3}{7}}{7 \cdot \frac{3}{7}} =$$

$$\frac{\ln y + g \cdot \ln x}{\ln x \cdot \ln y} - \frac{16}{\ln x \cdot \ln y} = 0$$

$$\frac{(x-1)}{(x+1)} (2x^2 - 5x + 2) > 0$$

$$\ln x \cdot \ln y + g(\ln^2 x + \ln^2 y) + g \cdot \ln x \cdot \ln y - 16 \cdot \ln x \cdot \ln y = 0$$

$$g = 25 - 4 \cdot 2 \cdot 2 = 9$$

$$\frac{9}{16}$$

$$3(\ln x - (\ln y))^2 \geq 0$$

2.

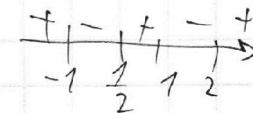
$$x = \frac{5+3}{4} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

$$3(\ln x - (\ln y))$$

$$\frac{7(x-1)}{x+1} > \frac{3(x-1)(x^2+x+1)}{(x+1)(x^2-x+1)}$$

$$\frac{(x-1)}{(x+1)} (2x^2 - 5x + 2) > 0$$

$$\frac{7(x-1)(x^2-x+1) - 3(x-1)x^2(x+1)}{x^3+1} > 0$$



$$\frac{(x-1)(-7x^2-7x+7 - 3x^2 - 3x + 3)}{x^3+1} > 0$$

$$\frac{(x-1)(4x^2 - 10x + 4)}{(x+1)} > 0$$

$$x(-\infty, -1)$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

- |                            |                            |                            |                            |                            |                            |                            |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|
| <input type="checkbox"/> 1 | <input type="checkbox"/> 2 | <input type="checkbox"/> 3 | <input type="checkbox"/> 4 | <input type="checkbox"/> 5 | <input type="checkbox"/> 6 | <input type="checkbox"/> 7 |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|

СТРАНИЦА  
ИЗ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по **каждой из задач** нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$f(x) = x^2 + ax + b$$

$$a^2 + 4b = 0$$

$$x^2 + 4x - 4 = 0$$

$$4 - 4 - 4 =$$

$$x^2 + 4x + b = 0$$

$$x^2 + ax + b = 0$$

$$x^2 - ax - b = 0$$

$$\beta = a^2 - 4b - 4, \beta = 0$$

$$1 - 4 - 4 = -7$$

$$\beta = a^2 + 4b = 0$$

$$a^2 - 4b - 32 = 0$$

$$a^2 - (-4)^2 = 16$$

$$a^2 = -4b$$

$$a = \pm 4$$

$$-4b - 4b - 32 = 0$$

$$x^2 + ax + b = 0$$

$$4b = -32$$

$$\frac{-a \pm \sqrt{D}}{2}$$

$$b = -4$$

$$x_1 + x_2 = -a$$

$$\begin{array}{|c|c|} \hline -4 & 4 \\ \hline \end{array}$$

$$2^{401} \cdot 3^{500} = x \cdot y$$

$$y : x$$

$$y = 2^a \cdot 3^b$$

$$a \geq c$$

$$c = 401 - a$$

$$a \geq 200,5$$

$$x = 2^c \cdot 3^d$$

$$b \geq d$$

$$a > 401 - a$$

$$b \geq 250$$

$$a + c = 401$$

$$a + d = 500$$

$$2a \geq 401$$

$$a \geq 201$$

$$b + d = 500$$

$$b \geq 500 - b$$

$$b \geq 250$$

$$2b \geq 500$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.








СТРАНИЦА  
\_ ИЗ \_

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач **нумеруются отдельно**. Порча QR-кода недопустима!

$$\frac{\ln x}{\ln x + \ln y} + \frac{9 \ln y}{\ln x + \ln y} + \frac{-16 \ln xy}{\ln x + \ln y} = 0$$

$$\frac{\ln y + \ln x}{\ln x + \ln y} + \frac{-16}{\ln x + \ln y} = 0$$

$$\ln x \ln y + \ln^2 y + 9 \ln^2 x + 9 \ln x \ln y - 16 \ln x \ln y = 0$$

$$(x^2 y + 9 x^3) - 6 \ln x \ln y = 0$$

$$(3 \ln x - \ln y)^2 = 0$$

$$\ln x x^3 = \ln y$$

$$y = x^3$$

$$\frac{x-1}{x+1} - \frac{3}{7} \frac{(x-1)(x^2+x+1)}{(x+1)(x^2-x+1)} > 0 \quad xy > 0$$

$$\frac{7(x-1)(x^2-x+1) - 3(x-1)(x^2+x+1)}{x+1} > 0$$

$$\frac{(x-1)}{(x+1)} (4x^2 - 16x + 4) > 0$$

$$\begin{array}{ccccccc} + & - & + & - & + & & \\ -1 & 1 & 2 & 1 & 2 & & \end{array}$$

$$x \in (-\infty; -1) \cup (1; 1) \cup (2; \infty)$$

$$\text{Обы: } x > 0; x \neq 1; y > 0; y \neq 1$$

$$xy > 0; xy \neq 1$$

$$x \neq -1; y \neq -1$$

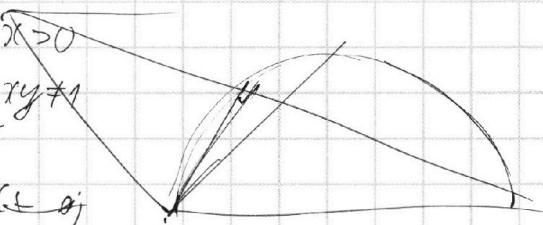
$$y \leq 31$$

$$x > 0$$

$$x \in \text{челн}$$

$$(1; 1) \text{ - нач челн}$$

$$x \in (-\infty; -1) \cup (2; 31]$$



$$x^2 > 0$$

$$x > 0$$

$$x^2 \neq 1$$

$$x \neq \pm 1$$

$$x \neq 1$$

$$x \in (2; 31]$$

$$x \in (2; 31)$$

$$x^2 \neq 1$$

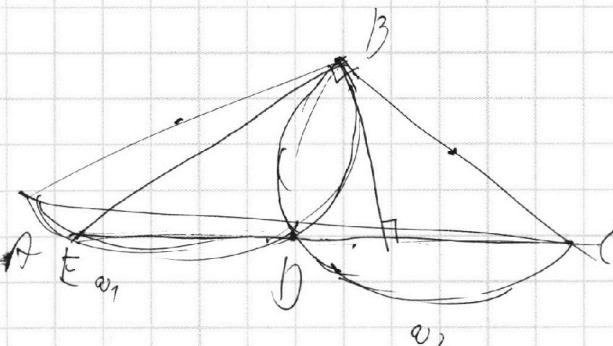
$$y = x^3$$

$$x^2 \neq 1$$

$$x \neq \pm 1$$

$$3; 4; 5. - 30; 31$$

$$31 - 3 \cdot 4 = 31 - 12 = 29$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.



- |                          |                          |                          |                          |                          |                          |                          |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| <input type="checkbox"/> |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|

СТРАНИЦА  
ИЗ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по **каждой из задач** нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$4. n \quad a \geq b$$

$$l = q_1 d \quad b = 3d$$

$$n_b = 3(a-b)^2 \quad b = b_1 d \quad a = q_1 d$$

$$3^a = a_1 b_1 d$$

$$12d = 3(q_1 d - 3d)^2 \quad 9:3 \quad q_1 d \cdot 3d \cdot 2 + 3$$

$$3q_1 d = q_1 d b_1$$

$$\underline{b_1 = 3}$$

$$12d = 3q_1^2 d^2 + 27d^2 - 27q_1 d^2$$

$$12 = 3q_1^2 + 27d - 27q_1 d$$

$$1 = q_1^2 d + 9d - 6q_1 d$$

$$q_1 = 5 \pm 2$$

$$q_1^2 d - q_1 \cdot 6d + 9d - 4 = 0$$

$$5 \pm 1$$

$$l = 36d^2 - 48(9d - 4) = 36d^2 - 36d^2 + 16d = 16d$$

$$q_1 = 5; 1; 2; 4$$

$$q_1 = \frac{6d \pm 4\sqrt{d}}{2d} = \frac{3d \pm 2\sqrt{d}}{d} = 3 \pm 2$$

$$q_1 = 5; 1;$$

$$(5; 3)(1; 3)(8; 12)(16; 12)$$

$$\begin{matrix} 5; 3 \\ \times \\ \checkmark \end{matrix} \quad \begin{matrix} 1; 3 \\ \times \\ \checkmark \end{matrix} \quad \begin{matrix} 8; 12 \\ \checkmark \\ \times \\ \checkmark \end{matrix} \quad \begin{matrix} 16; 12 \\ \checkmark \\ \checkmark \end{matrix}$$

$$1 \cdot 3 = 3 \cdot 4$$

$$3 \cdot 5 = 15$$

$$n = 2^2 \cdot 3 \cdot 4 = 48$$

$$4 \cdot 8 = 32$$

$$4 \cdot 12 = 48$$

$$4 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 4$$

$$4 \cdot 3 \cdot 4 = 48$$

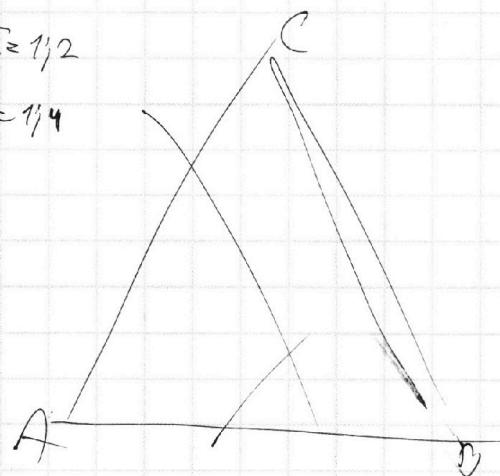
$$16 \cdot 3 = 48$$

$$\frac{2}{\sqrt{d}} + 8$$

$$d \in \mathbb{Z}$$

$$\sqrt{d} = 1/2$$

$$d = 1/4$$

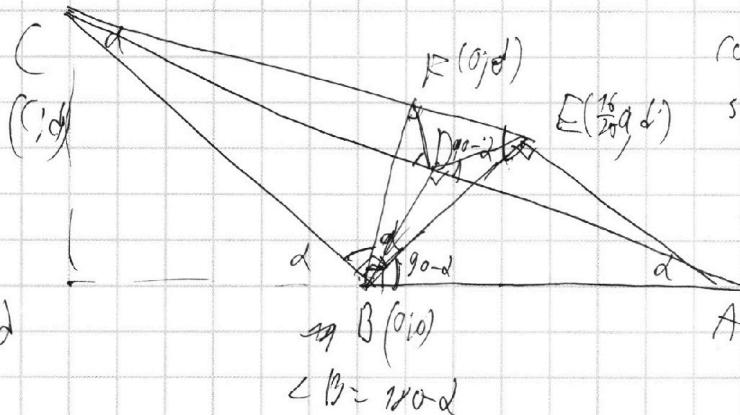


На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

- |                          |                          |                          |                          |                          |                          |                          |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| <input type="checkbox"/> |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|

СТРАНИЦА  
ИЗ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по **каждой из задач** нумеруются **отдельно**. Порча QR-кода недопустима!



$$\cos \alpha = \frac{3}{5}$$

$$\sin \alpha = \frac{4}{5}$$

$$BF = BC \cdot \sin \alpha = \frac{4}{5} BC$$

$$90 - \alpha + 90 - \alpha$$

$$BF = d$$

$$\angle B = 180 - \alpha$$

$$A(0; 0)$$

$$\angle A + \angle C = 2$$

$$BC^2 - CD^2 = AB^2 - AD^2 = BF^2$$

$$(CD^2 + DA)^2 = AB^2 + BC^2 + 2AB \cdot BF \cdot \frac{3}{5}$$

$$AD \perp AC$$

$$AB \cdot BC \cdot \sin \alpha = BD \cdot AC$$

$$\omega_1: 4^2 + y^2 - dx = 0$$

$$\omega_2: x^2 + y^2 - xc - yd = 0$$

$$dx = \frac{d}{c} = \frac{1}{3}$$

$$d = \frac{4}{3} c$$

$$c = \frac{3}{4} d$$

$$a = p -$$

$$b = \frac{n}{14} \cdot \sqrt{a^2 - y}$$

$$a \neq y$$

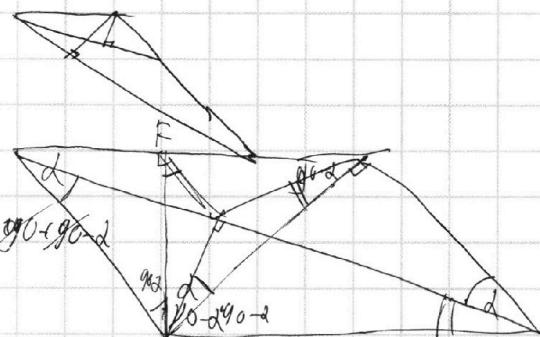
$$l \approx 3$$

$$90 - (90 - \alpha)$$

$$90 - 2\alpha$$

$$90 - 2\alpha + x = 90 - 90 - \alpha$$

$$x = 2\alpha$$



$$y = \frac{a-c}{d} x$$

$$y = \frac{a-c}{d} \cdot \frac{d^2 a}{d^2 (c-a)^2}$$

$$\frac{AC}{PE} = ?$$

$$ax = xc + yd$$

$$yd = x(a-c)$$

$$y = \frac{a-c}{d} \frac{a-c}{d}$$

$$y = \frac{(a-c) \cdot ad}{d^2 f(c-a)^2}$$

$$y = \frac{d}{c-a} x - \frac{da}{c-a} = x \frac{a-c}{d}$$

$$x \left( \frac{d}{c-a} + \frac{c-a}{d} \right) = \frac{da}{c-a}$$

$$x \left( \frac{d^2 + (c-a)^2}{(c-a)d} \right) = \frac{da}{c-a} \quad x = \frac{d^2 a}{d^2 + (c-a)^2}$$

$$BD = \frac{\sqrt{d^2 + (c-a)^2}}{a}$$

$$BD = \frac{\sqrt{(ad^2)^2 + (a-c)^2(d^2)^2}}{d^2 + (c-a)^2} = \frac{ad \sqrt{d^2 + (a-c)^2}}{d^2 + (c-a)^2} \approx \sqrt{\frac{ad}{d^2 + (a-c)^2}}$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи **отдельно**.



- |                          |                          |                          |                          |                          |                          |                          |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| <input type="checkbox"/> |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|

СТРАНИЦА  
ИЗ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач **нумеруются отдельно**. Порча QR-кода недопустима!

$$x^2 + y^2 - ax = 0$$

$$\beta E = \frac{y}{x} a$$

$$\frac{16}{25} a^2 = \frac{16}{25} a^2 d^2$$

$$25f = 7,15$$

$$y = d$$

$$\frac{4}{5} a \sqrt{d^2 + x^2}$$

$$\frac{16}{25} a^2 \left( \frac{76}{75} - 1 \right) = 4d^2$$

$$25 \cdot 6 = 9$$

$$y^2 + d^2 - ax = 0$$

$$\frac{16}{25} a^2 = d^2 + x^2$$

$$x^2 = \frac{16}{25} a^2 - d^2$$

$$12 = a^2 \frac{46}{25} \cdot \frac{1}{25}$$

$$\frac{\frac{16}{25}}{12} = \frac{16}{75}$$

$$\frac{6}{\sqrt{425}} = \frac{1}{5}$$

$$\frac{16}{25} a^2 = -9x^2 + d^2 = 0$$

$$\frac{16+9}{25} = \frac{25}{25} = 1$$

$$d = \frac{4 \cdot 3}{25} a = \frac{12}{25} a$$

$$\frac{8 \cdot 25}{5} = \sqrt{25^2 + 1} = \frac{50}{\sqrt{25}}$$

$$\frac{16}{25} a = x$$

$$\frac{\sqrt{325}}{2}$$

$$\frac{15+9}{12} = \frac{34}{12} = \frac{17}{6}$$

$$c = \frac{3}{4} d$$

$$\frac{25}{72} - \frac{3}{4} = \frac{25}{72} - \frac{9}{72} =$$

$$= \frac{25-9}{72} = \frac{16}{72} = \frac{4}{9}$$

$$\sqrt{d^2 + (a-c)^2}$$

$$= \frac{\sqrt{d^2 + (\frac{25}{72} - \frac{3}{4})^2 d^2}}{\frac{25}{72} d}$$

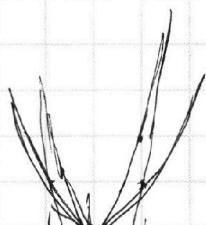
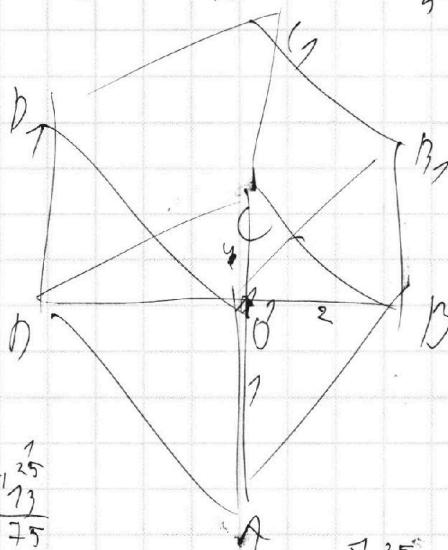
$$\sqrt{1 + \frac{16}{9}} = \frac{25}{72}$$

$$2 \cdot a = \frac{\sqrt{25}}{\frac{25}{72}} = \frac{5}{\frac{25}{72}} =$$

$$\frac{5 \cdot 25}{3 \cdot 25} = \frac{25}{3}$$

$$16-8=8$$

$$\frac{25}{325}$$



$$\frac{25}{72} + \frac{9}{72}$$

$$\frac{36+25}{6^2}$$

$$1 + \left(\frac{34}{72}\right)^2 = 1 + \left(\frac{17}{36}\right)$$

$$\frac{50200}{50451}$$

$$\frac{16+16}{25} = \frac{96}{25}$$

$$\frac{251}{251}$$

$$\frac{325}{65} = \frac{5}{13} = \frac{251}{5}$$

$$\begin{aligned} & \frac{\sqrt{25}}{75} \\ & \frac{25}{75} \\ & \frac{12}{75} \\ & \frac{9}{75} \end{aligned}$$

$$\frac{25}{73}$$

$$\frac{92}{\sqrt{25}} = \frac{\sqrt{3 \cdot 7125}}{100} \sqrt{10}$$