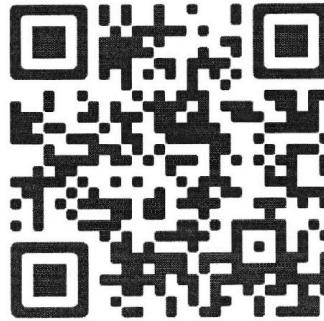




МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

11 КЛАСС. Вариант 3



- [3 балла] Найдите все тройки натуральных чисел $(A; B; C)$ такие, что:
 - A — четырёхзначное число, составленное из одинаковых цифр,
 - B — трёхзначное число, хотя бы одна из цифр которого равна 6,
 - C — двузначное число, хотя бы одна из цифр которого равна 3,
 - произведение $A \cdot B \cdot C$ является квадратом некоторого натурального числа.
- [3 балла] Положительные числа x и y таковы, что значение выражения $K = \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{5}{xy}$ не изменяется, если x уменьшить на 2, а y — увеличить на 2. Найдите все возможные значения выражения $M = x^3 - y^3 - 6xy$.
- [5 баллов] а) Найдите все пары действительных чисел $(x; y)$ такие, что $(\sin \pi x + \sin \pi y) \sin \pi x = (\cos \pi x - \cos \pi y) \cos \pi x$.
б) Сколько пар целых чисел (x, y) удовлетворяют одновременно этому уравнению и неравенству
$$\arcsin \frac{x}{6} + \arcsin \frac{y}{2} < \pi?$$
- [4 балла] В начале месяца было выделено 4 билета на праздничный концерт, которые планировалось случайным образом распределить между одиннадцатиклассниками. В конце месяца выяснилось, что будет выделено больше 4 билетов. Одиннадцатиклассники Петя и Вася вычислили, что вероятность им обоим вместе попасть на концерт в начале месяца была в 6 раз меньше, чем оказалась в конце месяца. Сколько всего было выделено билетов на концерт в конце месяца, если количество одиннадцатиклассников не изменилось?
- [5 баллов] Точка O — центр окружности ω_1 , описанной около остроугольного треугольника ABC . Окружность ω_2 , описанная около треугольника BOC , пересекает отрезок AB в точке P . Найдите площадь треугольника ABC , если $AP = 25$, $BP = 5$, $AC = 35$.
- [6 баллов] На координатной плоскости изображена фигура $\Phi(\alpha)$, состоящая из всех точек, координаты $(x; y)$ которых удовлетворяют системе неравенств
$$\begin{cases} (x + 5\sqrt{2} \cos \alpha)(y + 5\sqrt{2} \sin \alpha) \leq 0, \\ x^2 + y^2 \leq 169. \end{cases}$$

Найдите максимальное значение M периметра (длины границы) фигуры $\Phi(\alpha)$ и укажите все значения α , при которых оно достигается.

- [6 баллов] Шар Ω касается всех рёбер правильной усечённой пирамиды, а шар ω касается всех её граней. Пусть сторона верхнего основания меньше, чем сторона нижнего. Найдите отношение площади верхнего основания пирамиды к площади её боковой поверхности.



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи **отдельно**.

- | | | | | | | |
|---------------------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|
| <input checked="" type="checkbox"/> 1 | <input type="checkbox"/> 2 | <input type="checkbox"/> 3 | <input type="checkbox"/> 4 | <input type="checkbox"/> 5 | <input type="checkbox"/> 6 | <input type="checkbox"/> 7 |
|---------------------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|

СТРАНИЦА
1 из 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач **нумеруются отдельно**. Порча QR-кода недопустима!

1. Представим число 1111 в канонической записи! На простое $1111 = 101 \cdot 11$.

III.к. А состоит из одинаковых цифр, то $A \leq 1111$, то есть $A = 1111 \cdot a$ (где a -целое и $1 \leq a \leq 9$).

III.к. ABC - квадрат, а 101 входит в A в 1 степени (если же ма простое) то BC : 101, т.к. $C < 100$, то BC : 101.

III.к. В В есть цифра 6 и это трехзнач., то $B = 606$.

III.к. $B \neq 11$ и следственно, степ. бx. простое 11 в A'В равн. сомнож., а ABC - кв, то C : 11.

III.к. В C есть цифра 3, и это трехзнач., то $C = 33$.

III.к. есть, $ABC = (1111a) \cdot (606) \cdot (33) = (1111)^2 \cdot 3^2 \cdot 2a - кв. \Rightarrow 2a \text{ может идти в квадрат, причем } 1 \leq a \leq 9 \Rightarrow a = \begin{cases} 2 \\ 8 \end{cases}$.

$$A = \begin{cases} 2222 \\ 8888 \end{cases}, \quad (A; B; C) = \begin{cases} (2222; 606; 33) \\ (8888; 606; 33) \end{cases}$$

Ответ: $(A; B; C) = \begin{cases} (2222; 606; 33) \\ (8888; 606; 33) \end{cases}$.



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1

2

3

4

5

6

7

СТРАНИЦА

1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

2. Из условия следует, что

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{5}{xy} = \frac{1}{x-2} + \frac{1}{y+2} + \frac{5}{(x-2)(y+2)}.$$

Заменим все под один знаменатель:

$$\frac{(x-2)(y+2)(x+y+5)}{xy(x-2)(y+2)} - \frac{xy(x+y+5)}{xy(x-2)(y+2)} = 0.$$

$$\frac{(x+y+5)(xy+2x-2y-4-xy)}{xy(x-2)(y+2)} = 0.$$

ограничения: $\begin{cases} x \neq 0 \\ y \neq 0 \\ x \neq 2 \end{cases}$; $\begin{cases} x > 0 \\ y > 0 \end{cases}$

Исходя из ограничений, $x+y+5 \neq 0 \Rightarrow$

$$xy+2x-2y-4-xy = 2x-2y-4 = 0$$

$$x-y=2 \text{ и } x=y+2.$$

$$M = x^3 - y^3 - 6xy = (y+2)^3 - y^3 - 6(y+2)y = \\ 6y^2 + 12y + 8 - 6y^2 - 12y = 8.$$

Ответ: $M = 8$.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.



- | | | | | | | |
|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |
|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|

СТРАНИЦА
1 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач **нумеруются отдельно**. Порча QR-кода недопустима!

$$3. \text{ a) } (\sin \pi x + \sin \pi y) \sin \pi x = (\cos \pi x - \cos \pi y) \cos \pi x$$

$$\sin^2 \pi x + \sin \pi x \sin \pi y = \cos^2 \pi x - \cos \pi x \cos \pi y$$

Перенесем влево и скрепляем:

$$(\cos^2 \pi x - \sin^2 \pi x) - (\cos \pi x \cos \pi y + \sin \pi x \sin \pi y)$$

$$\cos(2\pi x) = \cos(\pi x - \pi y).$$

Значим,

$$\begin{cases} 2\pi x = \pi x - \pi y + 2\pi k \\ 2\pi x = \pi y - \pi x + 2\pi k \end{cases} \quad (k \in \mathbb{Z})$$

Следовательно,

$$\begin{cases} x + y = 2k \\ 3x - y = 2k \end{cases} \quad (k \in \mathbb{Z})$$

Значим, получаем все пары вида

$$y = 2k - x, (x, y) = (x, 2k - y) \text{ и } (x, y) = (x, 3x - 2k) \quad k \in \mathbb{Z}$$

Ответ: $(x, y) = (x, 2k - y)$ или $(x, y) = (x, 3x - 2k)$, где $k \in \mathbb{Z}$.

8) П.к. $1 \equiv 3 \pmod{2}$ и $(-1) \equiv 1 \pmod{2}$,
то $x+y \equiv 3x-y \pmod{2}$. Но если можно
считать, что обе корни уравнения
из пункта а) это пары (x, y) , что $x+y \equiv 2$.
(то есть $x+y$ четное)

Чтобы выражение $\arcsin \frac{x}{6} + \arcsin \frac{y}{2}$ имело
смысл, нужно чтобы $x \in [-6; 6]$, а $y \in [-2; 2]$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

- | | | | | | | |
|----------------------------|----------------------------|---------------------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|
| <input type="checkbox"/> 1 | <input type="checkbox"/> 2 | <input checked="" type="checkbox"/> 3 | <input type="checkbox"/> 4 | <input type="checkbox"/> 5 | <input type="checkbox"/> 6 | <input type="checkbox"/> 7 |
|----------------------------|----------------------------|---------------------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|

СТРАНИЦА
2 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

к тому же, $\arcsin : \mathbb{R} \setminus \{0\} \rightarrow [-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}]$.

Но если, если хочется одно число $y = \frac{x}{6}$ и $\frac{y}{4}$ четные, чем 1, то $\arcsin \frac{x}{6} + \arcsin \frac{y}{4} < \pi$ и обратное утв.

$$x = \{-6, -5, -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6\}$$

$$y = \{-2, -1, 0, 1, 2\}.$$

• Если y - четное, $y \neq 0$, то есть 4 вариантов выбора x , x чётное от 0 до 6 вкл. и нерав. (таких вариантов 2·4)

• Если $y = 2$ то есть 6 вариантов выбора $x \setminus \{y \text{чел } x; x \neq 0\}$ (таких вариантов 6)

• Если y - нечетное, то есть 6 вариантов выбора x , чётные варианты урав. и нерав. (x -неч). (таких вариантов 2·6).

Всего вариантов $2 \cdot 4 + 6 + 2 \cdot 6 = 14 + 18 = 32$

Ответ: 32.

На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.



- | | | | | | | |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

СТРАНИЦА
1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

4. Решим такую задачу:

Классу из N человек было выделено k билетов. Найдите вероятность, что и Тима, и Вася достанутся билеты (Петя, Вася и Коля).

Число элементарных исходов — где Тима и Вася получили билеты — C_{N-2}^{k-2} .
(м.к. ост. $k-2$ билетов можно распред. между $N-2$ людьми).

Всех Число элементарных исходов — C_N^k .

Ит. к. все исходы равновероятны, то

$$P = \frac{C_{N-2}^{k-2}}{C_N^k} = \frac{k(k-1)}{N(N-1)}.$$

Умножим вероятность, что Тима и Вася попали на концерт в один и тот же день:

$$= \frac{4 \cdot 3}{N(N-1)}.$$

$$\text{В концерте} = \frac{k(k-1)}{N(N-1)} \cdot \frac{4 \cdot 3}{N(N-1)} \cdot 6 = \frac{k(k-1)}{N(N-1)} \cdot$$

$$4 \cdot 3 \cdot 6 = k(k-1) \Rightarrow (k-9)(k+8) = 0$$

$$k=9. \quad \text{Ответ: 9 билетов}$$



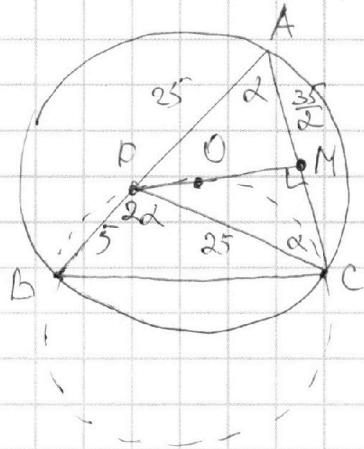
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

- | | | | | | | |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|---------------------------------------|----------------------------|----------------------------|
| <input type="checkbox"/> 1 | <input type="checkbox"/> 2 | <input type="checkbox"/> 3 | <input type="checkbox"/> 4 | <input checked="" type="checkbox"/> 5 | <input type="checkbox"/> 6 | <input type="checkbox"/> 7 |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|---------------------------------------|----------------------------|----------------------------|

СТРАНИЦА
1 из 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

5.



Мн. к. B, P, O, C лежат на одной окр. и P и O лежат на одн. сторожу от BC (мн. P на BC) $\angle BPC = \angle BOC = 2x$ ($x = \angle A$, мн. O -центр $\triangle ABC$). $\triangle ACP$ - равносес. ($AP = PC$). $\angle A + \angle ACP = \angle BPC \Rightarrow \angle ACP = 2x - x = x = 25$. $\angle ACP$ - острый.

Опустим высоту PM на AC из P .

она разделяет AC пополам (мн. $\triangle ACP$ -равносес.). Значит $AM = \frac{35}{2}$. Изв. м. Фигарова:

$$PM = \sqrt{AP^2 - AM^2} = \sqrt{25^2 - \left(\frac{35}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{15 \cdot 85}{4}} = \frac{5\sqrt{51}}{2}$$

$$\text{Значит, } \sin \angle A = \frac{\frac{5\sqrt{51}}{2}}{25} = \frac{\sqrt{51}}{10}$$

$$\text{Значит, } S_{\triangle ABC} = \frac{AB \cdot AC \cdot \sin \angle A}{2} = \frac{(AP+BP)AC \cdot \frac{\sqrt{51}}{10}}{2} = \frac{30 \cdot 35 \cdot \sqrt{51}}{20} = \frac{105\sqrt{51}}{2}$$

$$\text{Объем: } S_{\triangle ABC} = \frac{105\sqrt{51}}{2}$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.



- | | | | | | | |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|
| <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|

СТРАНИЦА
1 из 3

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

6. $\varphi(\alpha) : \begin{cases} (x + 5\sqrt{2} \cos \alpha)(y + 5\sqrt{2} \sin \alpha) \leq 0 \\ x^2 + y^2 \leq 169 \end{cases}$ (1)

(2) задаем круг с центром в начале координат и радиусом 13.

(1) выполняется, если $\begin{cases} x \leq -5\sqrt{2} \cos \alpha = u \\ y \leq -5\sqrt{2} \sin \alpha = v \end{cases}$ или

$$\begin{cases} x \geq -5\sqrt{2} \cos \alpha \\ y \geq -5\sqrt{2} \sin \alpha \end{cases}$$

Нарисуем $\varphi(\alpha)$: $l_u : x = u$; $l_v : y = v$.

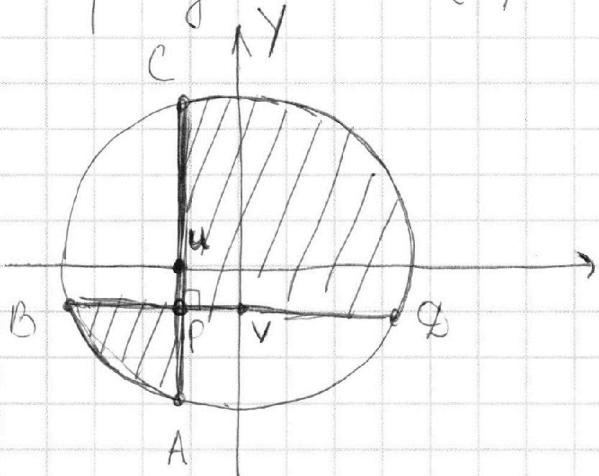
(они обязательно не-пересекут $\Omega = \{(x,y) | x^2 + y^2 \leq 169\}$)

м.к. $u = -5\sqrt{2} \cos \alpha$,

$$v = -5\sqrt{2} \sin \alpha$$

лежат на отрезке

$$[-5\sqrt{2}; 5\sqrt{2}] \subseteq [-15; 15].$$



$$l_u \cap \Omega = \{A, C\}$$

(A - ма, у коорд. по x лежит в 3-й четверти, коорд. по y лежит в 1-й четверти; C - у которой коорд. по x лежит в 3-й четверти, по y - в 2-й)

$$l_v \cap \Omega = \{B, D\}$$

(B - ма, у которой коорд. по x лежит в 4-й четверти, по y - в 3-й; D - ма, у которой коорд. по x лежит в 1-й четверти, по y - в 4-й)

D = l_u \cap l_v. Тогда $\varphi(\alpha)$ - фигура, abi.

(пересек, м.к. $l_u \parallel$ ось x \perp ось y (лии))

следим. фигуры фигуры фигуры ограниченной $ABC \in \Omega$, ограниченной $CDE \in \Omega$, ограниченной $ABP \in \Omega$ и $BPD \in \Omega$; и ограниченной, ограниченной $CDE \in \Omega$, ограниченной $CPI \in \Omega$.



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

- | | | | | | | |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

СТРАНИЦА
2 ИЗ 3

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

JM-k. lu llv, mo $\overline{AB} + \overline{CD} = \overline{JT}$ no m.
o бимармал 'gye. 

$$CD = 13\pi \cdot (\text{m.k. paguyub} - \pi)$$

Берн-
штадт Нервичемпра $Q(\alpha) = P_{qp}(\alpha)$ өкілец. Бе білесін
сүйкіту ғанаңын $\text{snm}(\alpha)$ жүр и ғанаңын $AC +$
~~BS~~.

Исходим из уравн. окр.: $C = (u; \sqrt{13^2 - u^2})$;
 $A = (u; -\sqrt{13^2 - u^2})$; $B = (-\sqrt{13^2 - v^2}; v)$; $D = (\sqrt{13^2 - v^2}; v)$. Значим, $AC + BD = 2(\sqrt{13^2 - u^2} + \sqrt{13^2 - v^2})$

$$\begin{aligned}
 & \text{Две пересекающиеся прямые имеют максимум} \quad \max_{\alpha} (AC + BD) \\
 AC + BD &= 2\sqrt{13^2 - u^2} + 2\sqrt{13^2 - v^2} = 2\sqrt{(\sqrt{13^2 - u^2} + \sqrt{13^2 - v^2})^2} = \\
 &= 2\sqrt{2 \cdot 13^2 - u^2 - v^2 + 2\sqrt{(13^2 - u^2)(13^2 - v^2)}} = \\
 &= 2\sqrt{2 \cdot 13^2 - (5\sqrt{2})^2(\cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha)} + 2\sqrt{13^4 - 13^2 \cdot (5\sqrt{2})^2(\cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha)} + \\
 &\quad (5\sqrt{2})^4 \cos^2 \alpha \sin^2 \alpha = \\
 &= 2\sqrt{2 \cdot 13^2 - 50} + 2\sqrt{13^2(13^2 - 50)} + 5\sqrt{2} 25^2 (\sin 2\alpha)^2.
 \end{aligned}$$

Hanya, uno make. gocmuu. npu $(\sin 2x)^2 = 1 \Rightarrow$
 $\sin 2x = \pm 1$.
 $2x = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{2}k$ (nge $k \in \mathbb{Z}$).
 $x = \frac{\pi}{8} + \frac{\pi}{4}k$.

$$AC + BE = 2 \left(\sqrt{13^2 - u^2} + \sqrt{13^2 - v^2} \right) = 2 \left(\sqrt{13^2 - 25^2} + \sqrt{13^2 - 25} \right)$$

L



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1

2

3

4

5

6

7

СТРАНИЦА
3 ИЗ 3

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$= 2 \cdot 2 \cdot \sqrt{144} = 4 \cdot 12 = 48$$

$$\max_{\alpha} P_{\Phi}(\alpha) = 48 + 13\pi$$

Объем: $\max_{\alpha} P_{\Phi}(\alpha) = 48 + 13\pi;$

$$\arg \max_{\alpha} P_{\Phi}(\alpha) = \left\{ \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{2}k; k \in \mathbb{Z} \right\}$$

L

L

L



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи **отдельно**.

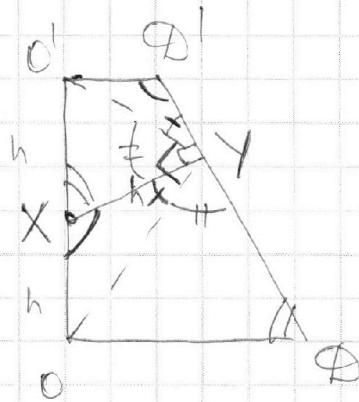
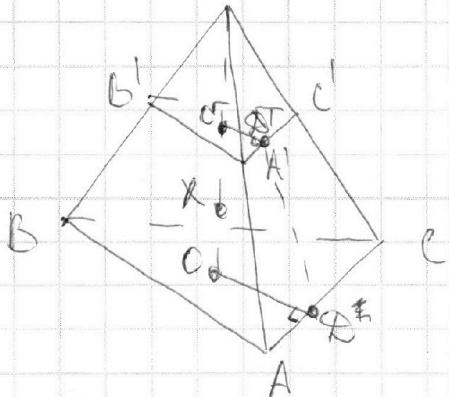
- | | | | | | | |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> |

СТРАНИЦА
1 из 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач **нумеруются отдельно**. Порча QR-кода недопустима!

4.

S



$ABCA'B'C'$ - усеч. пирамида $SABC$.

SO - биссектриса $SABC$.

Изображ., при поворотах на 60° отно.

SO $SABC$ переходит в седло \Rightarrow

$ABCA'B'C'$ переходит в седло \Rightarrow CJ

переходит в седло \Rightarrow SO проходит через центр X с \Rightarrow с \angle кас. (ABC) и $(A'B'C')$ в седл.

Очевид. перп. OQ и $O'D'$ на AC и $A'C'$

Рассм. трапецию $OO'QD$. $O'X = XY = OX$ (Y - проекц. X на QD') как видно из сим. усло. ($YXO' \sim YQD$ и $YQX \sim YQD$)

Значим, $OQ = YD$; $O'D' = D'Y \Rightarrow QD' = DY$

$$\text{Значим } \frac{\frac{1}{2} AC}{S_{\text{бок}}} = \frac{A'C' \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}}{S \cdot \frac{AC + A'C'}{2} \cdot \frac{1}{2\sqrt{3}} (AC + A'C')} = \frac{A'C'}{AC + A'C'} \cdot \frac{1}{2}.$$

L

L



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

- | | | | | | | |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|
| <input type="checkbox"/> 1 | <input type="checkbox"/> 2 | <input type="checkbox"/> 3 | <input type="checkbox"/> 4 | <input type="checkbox"/> 5 | <input type="checkbox"/> 6 | <input type="checkbox"/> 7 |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|

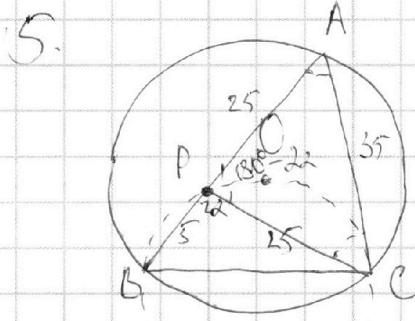
СТРАНИЦА
ИЗ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач **нумеруются отдельно**. Порча QR-кода недопустима!

4. $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$ инач.
~~3~~ ~~4~~ и ~~5~~ одн.

$$P(A) = \frac{4}{10} = \frac{2}{5}$$

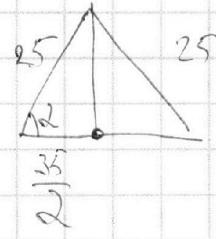
$$P(B) =$$



$$AP = 25, \quad BP = 5,$$

$$AC = 35.$$

SABC



$$\sin \alpha =$$

$$25^2 - \left(\frac{35}{2}\right)^2$$

$$\left(25 - \frac{35}{2}\right) \left(25 + \frac{35}{2}\right)$$

$$\left(\frac{15}{2}\right) \left(\frac{85}{2}\right)$$

$$\sqrt{\frac{3 \cdot 5 \cdot 14 \cdot 5}{2}} = \frac{5}{2} \sqrt{3 \cdot 14}$$

$$\frac{5}{2} \sqrt{51}$$

$$\frac{3 \cdot 35 \sqrt{51}}{2} = \frac{105 \sqrt{51}}{2}$$

$$\frac{15}{2}$$



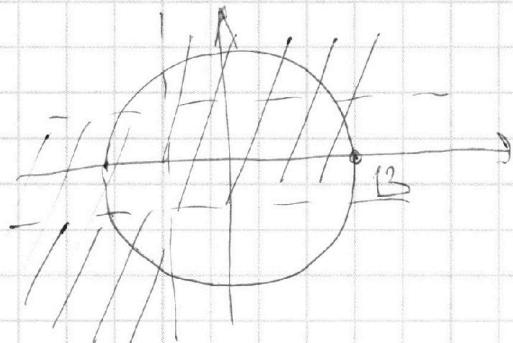
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

- | | | | | | | |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|
| <input type="checkbox"/> 1 | <input type="checkbox"/> 2 | <input type="checkbox"/> 3 | <input type="checkbox"/> 4 | <input type="checkbox"/> 5 | <input type="checkbox"/> 6 | <input type="checkbox"/> 7 |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|

СТРАНИЦА
ИЗ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач **нумеруются отдельно**. Порча QR-кода недопустима!

6. $q(\alpha)$



$$(\cos^2 \alpha)' = -2 \sin \alpha \cos \alpha$$

$$(\sin^2 \alpha)' = 2 \cos \alpha \sin \alpha$$

$$(x + 5\sqrt{2} \sin \alpha)(y + 5\sqrt{2} \cos \alpha) \leq 0$$

$$x, y \leftarrow -5\sqrt{2} \sin \alpha$$

$$13^2 - 50 +$$

$$\sqrt{13^2(13^2-50)} + 2500 \sin^2 \alpha \cos^2 \alpha = u$$

$$5\sqrt{2} \sin \alpha = v$$

$$13^2 - 50 + \sqrt{13^2(13^2-50) + (25 \sin^2 \alpha)^2}$$

$$u = 5\sqrt{2} \sin \alpha$$

$$v = 5\sqrt{2} \cos \alpha$$



$$13^2 - 50 + \frac{1}{2} \sqrt{2 \sqrt{13^2 - u^2} + 2 \sqrt{13^2 - v^2}}$$

$$(\sqrt{13^2 - v^2}, v)$$

$$(u, \sqrt{13^2 - u^2})$$

$$(13^2 - 50 \sin^2 \alpha)(13^2 - 50 \cos^2 \alpha)_{\max}$$

$$2 \sqrt{13^2 - 50 \sin^2 \alpha}_{\max}$$

$$\sqrt{13^2 - 50 \cos^2 \alpha}$$

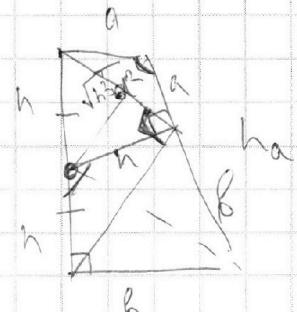
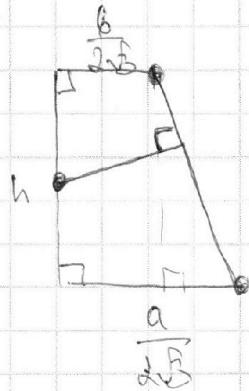
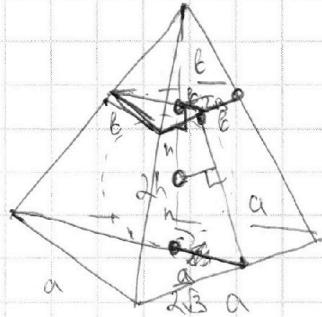


На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

 1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
_ ИЗ _

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



$$a+b$$

$$h_a = a+b$$

$$\frac{b^2 \sqrt{3}}{4}$$

$$3 \cdot \frac{a+b}{2} \cdot h_a$$

$$\frac{b^2}{2}$$

$$\frac{b^2}{a+b} \cdot h_a$$

$$h_a = \sqrt{(b-a)^2 + 4h^2}$$

На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

- | | | | | | | |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| <input type="checkbox"/> |

СТРАНИЦА
_ ИЗ _

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$xy + x - y = 4.$$

$$\cancel{xy} \neq$$

$$M = x^3 - y^3 - 6xy.$$

$$xy = 4 + y - x$$

y

$$- 6xy = 6(x - y - 4)$$

u

$$6(x - y) = 24$$

$$(x - y)(x^2 + y^2 + xy + 6) = 1$$

P

S

m.

P (Или B попадут, если число одн.- N,
число двоич-
ных - k).

$$P = P(\text{иногда тема}) \cdot P($$

N-2 k-2

$$\frac{\binom{N-2}{k-2}}{\binom{N}{k}} = \frac{k(k-1)}{N(N-1)}$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

- | | | | | | | |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|
| <input type="checkbox"/> 1 | <input type="checkbox"/> 2 | <input type="checkbox"/> 3 | <input type="checkbox"/> 4 | <input type="checkbox"/> 5 | <input type="checkbox"/> 6 | <input type="checkbox"/> 7 |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|

СТРАНИЦА
ИЗ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются **отдельно**. Порча QR-кода недопустима!

$$3. \quad x, y \in \mathbb{R}$$

$$(\sin \pi x + \sin \pi y) \sin \pi x = (\cos \pi x - \cos \pi y) \cos \pi x$$

$$\arcsin \frac{x}{\sqrt{2}} + \arcsin \frac{y}{\sqrt{2}} < \pi.$$

$$\sin^2 \pi x + \sin \pi y \sin \pi x = \cos^2 \pi x - \cos \pi y \cos \pi x$$

$$\cos(2\pi x) = \cos(\pi x - \pi y) = 0.$$

$$\cos 2\pi x = \cos(\pi x - \pi y)$$

$$\bullet 2\pi x = \pi x - \pi y + 2\pi k$$

$$\bullet 2\pi x = \pi y - \pi x + 2\pi k$$

$$\bullet \pi x + \pi y = 2\pi k$$

$$(x+y) = 2k$$

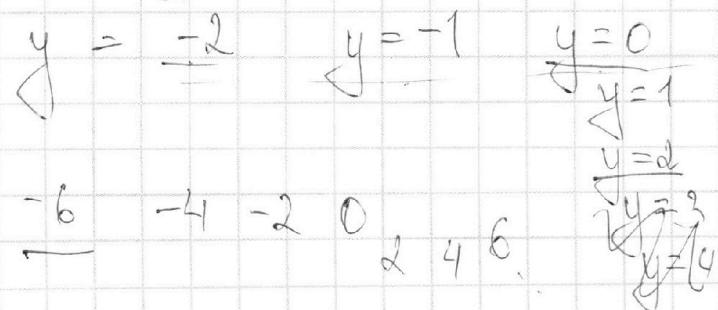
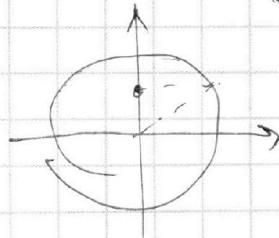
$$y = \frac{1}{2}$$

$$\bullet 3\pi x - \pi y = 2\pi k$$

$$(3x - y) = 2k$$

$$\frac{\pi}{6}$$

$$\arcsin \frac{x}{\sqrt{2}} + \arcsin \frac{y}{\sqrt{2}} < \pi$$





На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении **каждой задачи отдельно**.

- | | | | | | | |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|
| <input type="checkbox"/> 1 | <input type="checkbox"/> 2 | <input type="checkbox"/> 3 | <input type="checkbox"/> 4 | <input type="checkbox"/> 5 | <input type="checkbox"/> 6 | <input type="checkbox"/> 7 |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|

СТРАНИЦА
ИЗ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач **нумеруются отдельно**. Порча QR-кода недопустима!

$$1. (A, B, C) \in \mathbb{N}^3$$

$$A = \overbrace{\text{aaaa}}$$

$$B = \overbrace{\text{b}}^3 \text{ есть}$$

$$(x-1)(y+x) = 3 \quad C = \underbrace{\frac{3}{3}}$$

$$xy + x - y = 4$$

$A B C$ — квадрат

$$(x-y)(x^2+y^2+4+y-x)$$

$$x=5-y \quad \begin{array}{r} 1111 \\ - \quad \cancel{4} \\ \hline 1111 \end{array} \quad 1111 = 11 \cdot 101 - 6xy$$

$$y = -5+x$$

$$\cancel{x^3 + (5+x)^3 + 6x(x+5)} = \cancel{35} \quad \begin{array}{r} 1111 \\ - \quad \cancel{4} \\ \hline 1111 \end{array}$$

$$y+x = \frac{3}{x-1} \quad \text{нет}$$

$$y = \frac{3}{x-1} - x \quad : 101 \Rightarrow B = 606$$

$$y+x = -5$$

$$\cancel{xy + 5x - y - 4 = 0}$$

$$C = \underbrace{11 \cdot 6}_6 = 66$$

$$x, y > 0$$

$$k = \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{5}{xy}$$

$$\begin{array}{l} x=2 \\ y=2 \end{array}$$

$$\left(2x - \frac{3}{x-1}\right) \begin{array}{l} | \\ x^2 \end{array}$$

$$xy = 4 + y - x$$

$$M = x^3 - y^3 - 6xy$$

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{5}{xy} = \frac{1}{x-2} + \frac{1}{y+2} + \frac{5}{(x-2)(y+2)} \quad \text{бес. возмож.}$$

$$\cancel{y(x-2)(y+2) + x(x-2)(y+2) + 5xy(x-2)(y+2)} = 0$$

$$\cancel{xy(x-2)(y+2)}$$

$$\cancel{(x-2)(y+2)(y+x+5) + xy(y+x+5)}$$

$$\cancel{xy(x-2)(y+2)}$$

$$\cancel{(y+x+5)(xy+2x-2y+xy-4)} = 0$$

$$\cancel{xy(x-2)(y+2)}$$