



МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

11 КЛАСС. Вариант 4



1. [3 балла] Найдите все тройки натуральных чисел $(A; B; C)$ такие, что:
 - A — четырёхзначное число, составленное из одинаковых цифр,
 - B — трёхзначное число, хотя бы одна из цифр которого равна 7,
 - C — двузначное число, хотя бы одна из цифр которого равна 1,
 - произведение $A \cdot B \cdot C$ является квадратом некоторого натурального числа.
2. [3 балла] Положительные числа x и y таковы, что значение выражения $K = \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{3}{xy}$ не изменяется, если x уменьшить на 4, а y — увеличить на 4. Найдите все возможные значения выражения $M = x^3 - y^3 - 12xy$.
3. [5 баллов] а) Найдите все пары действительных чисел $(x; y)$ такие, что $(\sin \pi y - \sin \pi x) \sin \pi y = (\cos \pi y + \cos \pi x) \cos \pi y$.
б) Сколько пар целых чисел (x, y) удовлетворяют одновременно этому уравнению и неравенству

$$\arccos \frac{x}{7} - \arcsin \frac{y}{4} > -\frac{\pi}{2}?$$

4. [4 балла] В начале месяца было выделено 4 билета на праздничный концерт, которые планировалось случайным образом распределить между одиннадцатиклассниками. В конце месяца выяснилось, что будет выделено больше 4 билетов. Одиннадцатиклассники Петя и Вася вычислили, что вероятность им обоим вместе попасть на концерт в начале месяца была в 11 раз меньше, чем оказалась в конце месяца. Сколько всего было выделено билетов на концерт в конце месяца, если количество одиннадцатиклассников не изменилось?
5. [5 баллов] Точка O — центр окружности ω_1 , описанной около остроугольного треугольника ABC . Окружность ω_2 , описанная около треугольника BOC , пересекает отрезок AB в точке P . Найдите площадь треугольника ABC , если $AP = 16$, $BP = 8$, $AC = 22$.
6. [6 баллов] На координатной плоскости изображена фигура $\Phi(\alpha)$, состоящая из всех точек, координаты $(x; y)$ которых удовлетворяют системе неравенств

$$\begin{cases} (x + 4 \sin \alpha)(y - 4 \cos \alpha) \leq 0, \\ x^2 + y^2 \leq 36. \end{cases}$$

Найдите максимальное значение M периметра (длины границы) фигуры $\Phi(\alpha)$ и укажите все значения α , при которых оно достигается.

7. [6 баллов] Шар Ω касается всех рёбер правильной усечённой пирамиды, а шар ω касается всех её граней. Найдите угол наклона боковой грани пирамиды к плоскости её основания.



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7
☒ ☐ ☐ ☐ ☐ ☐ ☐

СТРАНИЦА

1 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Заметим, что $A = 1111 \cdot a$, где a - цифра.

Тогда $A = 101 \cdot 11 \cdot a$, при этом 101 и 11 - простые числа $\Rightarrow$ т.к. $A \cdot B \cdot C$ - квадрат, то $A \cdot B$ и $A \cdot C$ и $A \cdot 11$.

$A \cdot B \cdot C : 11$ и $A \cdot B \cdot C : 101$, $\Rightarrow A \cdot B \cdot C = 101^2 \cdot 11^2 \cdot k$, где k - некое число также явл. квадратом.

Откуда $a \cdot B \cdot C = 101 \cdot 11 \cdot k$, т.к. a - цифра, то $a < 11 < 101$, т.к. C - двузнач. $C < 101$.

т.к. B - трехзначное $B < 11 \cdot 101 = 1111$. Заметим, что только B может делиться на 101 .

Тогда пусть $B = 101 \cdot b$, где $1 \leq b < 10$.

т.к. в записи числа B присутствует хотя бы 1 семерка, то $b = 7$, а иначе т.к. $b < 10$,

то $B = \overline{b0b}$ и цифры 7 нет. Откуда $B = 7 \cdot 101$.

Также заметим, что B не дел. на 11 , но тогда $C : 11$. Пусть $C = 11 \cdot c = \overline{cc}$, где c - цифра $1 \leq c < 10$.

т.к. в записи числа C есть хотя бы 1 единица, то $c = 1 \Rightarrow C = 11$. Значит $A \cdot B \cdot C = 101 \cdot 11 \cdot a \cdot 101 \cdot 7 \cdot 11 = 101^2 \cdot 11^2 \cdot 7 \cdot a = 101^2 \cdot 11^2 \cdot k$, т.к. k - квадрат, то



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

1
☒

2
☐

3
☐

4
☐

5
☐

6
☐

7
☐

СТРАНИЦА
2 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

7 - 9 - тоже квадрат, используя ограничение

$1 \leq a \leq 9$, получаем $a = 7$

Значит $A = 7777$, $B = 707$, $C = 11$

Ответ: 7777 , 707 , 11 .



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

1 ☐ 2 ☒ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА
1 из 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$K_1 = \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{3}{xy} = \frac{x+y+3}{xy}$$

$$K_2 = \frac{1}{x-4} + \frac{1}{y+4} + \frac{3}{(x-4)(y+4)} = \frac{x-4+y+4+3}{(x-4)(y+4)} = \frac{x+y+3}{(x-4)(y+4)}$$

По условию $K_1 = K_2$; тогда $\frac{x+y+3}{xy} = \frac{x+y+3}{(x-4)(y+4)}$

Значит, что $x \neq 4$, $x \neq 0$; $y \neq 0$; $y \neq -4$.

Тогда $xy = (x-4)(y+4)$ $xy = xy + 4x - 4y - 16$

$$4y = 4x - 16$$

$$y = x - 4. \quad \text{Т.к. } y \neq 0 \text{ и } y \neq -4, \text{ то}$$

$$x \neq 0 \text{ и } x \neq 4.$$

Подставим $y = x - 4$ в M :

$$M = x^3 - (x-4)^3 - 12x(x-4) = x^3 - x^3 + 12x^2 - 48x + 64 - 12x^2 + 48x = 64.$$

Значит, При любых x : $x \neq 0$ $x \neq 4$ $M = 64$.

Ответ: 64



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☒	☐	☐	☐	☐

СТРАНИЦА
1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$a) (\sin \pi y - \sin \pi x) \sin \pi y = (\cos \pi y + \cos \pi x) \cos \pi y.$$

$$\sin^2 \pi y - \sin \pi x \sin \pi y = \cos^2 \pi y + \cos \pi x \cos \pi y.$$

$$\cos^2 \pi y - \sin^2 \pi y + \cos \pi y \cos \pi x + \sin \pi y \sin \pi x = 0$$

$$\cos 2\pi y + \cos(\pi y - \pi x) = 0.$$

$$\cos 2\pi y = -\cos \pi(y-x) \neq 0$$

$$\cos 2\pi y = \cos \pi(y-x+1) \neq 0$$

$$2\pi y = \pi(y-x+1) + 2\pi k, \quad k \in \mathbb{Z}$$

$$2y = y - x + 1 + 2k$$

$$y = (2k+1) - x, \quad \text{где } k \in \mathbb{Z}$$

Или ~~$x+y=n$~~ $x+y=n$, где n - любое целое нечетное число

б) Запомним, что $\arccos \frac{x}{4} \geq 0$, т.к.

$\forall a \in \mathbb{R} : \arccos a \leq \pi$. Также $\arcsin \frac{y}{4} \leq \frac{\pi}{2}$, т.к.

$\forall b \in \mathbb{R} : -\frac{\pi}{2} \leq \arcsin b \leq \frac{\pi}{2}$.

Отсюда: $\arccos \frac{x}{4} - \arcsin \frac{y}{4} \geq -\frac{\pi}{2}$. Т.е., при

$\arccos \frac{x}{4} \neq 0$ и $\arcsin \frac{y}{4} \neq \frac{\pi}{2}$ - неравенство выполняется.

т.к. $\arccos \frac{x}{4} \neq 0$, то $\frac{x}{4} \neq 1 \Rightarrow x \neq 4$.

т.к. $\arcsin \frac{y}{4} \neq \frac{\pi}{2}$, то $\frac{y}{4} \neq 1 \Rightarrow y \neq 4$.

Ответ: а) $x+y=2k+1$, где $k \in \mathbb{Z}$ б) $x+y=2k+1$ при $x \neq 4$ $y \neq 4$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7
☐ ☐ ☐ ☒ ☐ ☐ ☐

СТРАНИЦА
 1 из 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Заметим, что если единиц классов x , то а Билета 4, то вероятность получения Билета П или В равно $\frac{4}{x}$, а второго $\frac{3}{x-1}$. Тогда вероятность того, что эти два билета равны $p_1 = \frac{4}{x} \cdot \frac{3}{x-1} = \frac{12}{x(x-1)}$.

Аналогично для y Билетов: для первого x , для второго $\frac{y-1}{x}$, и тогда $p_2 = \frac{y}{x} \cdot \frac{y-1}{x-1} = \frac{y(y-1)}{x(x-1)}$.

По условию $\frac{p_2}{p_1} = 11 \Rightarrow \frac{y(y-1)}{12} = 11$.

$$y^2 - y = 11 \cdot 12.$$

По ∇ обратной ∇ Билета $\begin{cases} y_1 \cdot y_2 = 11 \cdot 12 \\ y_1 + y_2 = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = 12 \\ y = -11 \end{cases}$ не подходит, т.к. $y \in \mathbb{N}$.

$y = -11$ не подходит, т.к. количество Билетов ≥ 0 .

Значит $y = 12$.

Ответ: 12



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☒ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА
1 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Дано:

$\triangle ABC$.

ω_1 - внутр. окружн.

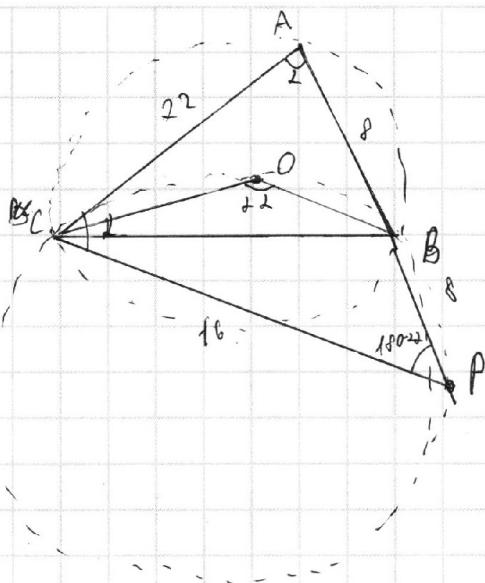
ω_2 - внутр. окружн.

$\omega_2 \cap AB = P$

$AP = 16, BP = 8$

$AC = 22, \omega_2$ - внутр. окружн.

Найти S_{ABC} .



Т.к. $AP = 16$ и $BP = 8$,
то $AB = AP + BP$
 $AB = 24$.

Пусть $\angle A = 2$.

Т.к. $\angle BOC$ - центральный,
а $\angle BAC$ - впис., то

$$\angle BOC = 2\angle BAC = 22$$

Т.к. $\angle BOC = 22$, $\angle BPC = 180 - 22$,
то $COBP$ - впис. четырехугол.

По св-ву впис. четырехугольника $\angle BOC + \angle BPC = 180$
 $\angle BPC = 180 - 22$.

$$\triangle ACP: \angle APC = 180 - 22, \angle A = 2$$

По сумме углов в $\triangle ACP$: $\angle A + \angle P + \angle C = 180$
 $\angle ACP = 2$.

Т.к. $\angle ACP = \angle CAP$, то $\triangle ACP$ - р/д $\Rightarrow PC = AP = 16$.

$$\text{По синусов: } \frac{AC}{\sin 180 - 22} = \frac{PC}{\sin 2} \Rightarrow \frac{22}{\sin 22} = \frac{16}{\sin 2}$$

$$\frac{\sin 22}{\sin 2} = \frac{22}{16} \quad \frac{2 \cos 2 \sin 2}{\sin 2} = \frac{22}{16} \quad \cos 2 = \frac{11}{16}$$

По основному тригонометрическому тождеству $\sin^2 2 + \cos^2 2 = 1$.

$$\sin 2 = \sqrt{1 - \frac{121}{256}} = \sqrt{\frac{135}{256}} = \frac{3\sqrt{15}}{16}$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении **каждой задачи отдельно**.

1
☐

2
☐

3
☐

4
☐

5
☒

6
☐

7
☐

СТРАНИЦА

2 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\sin 2 = \frac{3\sqrt{5}}{16}$$

По формуле площади треугольника:

$$S_{ABC} = \frac{1}{2} AC \cdot AB \cdot \sin \angle A = \frac{1}{2} AC \cdot AB \cdot \sin 2.$$

$$S_{ABC} = \frac{1}{2} \cdot 22 \cdot 8 \cdot \frac{3\sqrt{5}}{16} = \frac{33\sqrt{5}}{2}$$

Ответ: $\frac{33\sqrt{5}}{2}$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☒ 7 ☐

СТРАНИЦА
1 из 3

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\begin{cases} (x+4\sin 2)(y-4\cos 2) \leq 0 & (1) \\ x^2 + y^2 \leq 36 & (2) \end{cases}$$

Заметим, что 2-й пер-во ~~является~~ ^{решением} окруж.,
центр в Т. $(0; 0)$ и $R=6$.

Рассмотрим 1-й пер-во:

$$(x+4\sin 2)(y-4\cos 2) \leq 0$$

$$\begin{cases} x \leq -4\sin 2 & \text{т.е. левая часть } x < -4\sin 2 \\ y \geq 4\cos 2 & \text{верхняя часть } y > 4\cos 2 \\ x \geq -4\sin 2 & \text{правая часть } x > -4\sin 2 \\ y \leq 4\cos 2 & \text{нижняя часть } y < 4\cos 2 \\ x = -4\sin 2 & \\ y = 4\cos 2 & \end{cases}$$

Т.е. если рассмотреть Т. пересеч.

$x = -4\sin 2$ и $y = 4\cos 2$, то ~~решением~~ ^{на графике} явл.

II и IV четверти, т.е. левый верхний ~~и правый~~ ^{нижний} квадрант.

Заметим, что если $x = -4\sin 2 \cap y = 4\cos 2$, то в
точке $(x_1; y_1)$ то $x_1^2 + y_1^2 = 16$, т.к. $16\sin^2 2 + 16\cos^2 2 = 16$.

Тогда график решения будет выглядеть

следующим образом:

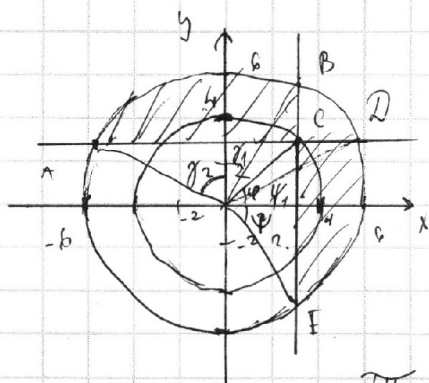


На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☒ 7 ☐

СТРАНИЦА
2 ИЗ 3

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



$$\text{где } \varphi = -2.$$

$$\text{Тогда } P = AC + BC + \sqrt{AB} + CD + CE + \sqrt{DE}$$

$$P = AD + BE + \sqrt{AB} + \sqrt{DE}.$$

Пусть у т. C коорд $(x_1; y_1)$,

$$\text{Тогда } A(\sqrt{36 - y_1^2}; y_1)$$

$$D(\sqrt{36 - y_1^2}; y_1) \quad B(x_1; \sqrt{36 - x_1^2}) \quad E(x_1; -\sqrt{36 - x_1^2})$$

$$AD = 2\sqrt{36 - y_1^2}$$

$$BE = 2\sqrt{36 - x_1^2}$$

$$\tan \gamma_1 = \frac{\sqrt{36 - x_1^2}}{x_1}$$

$$\tan \gamma_2 = \frac{\sqrt{36 - y_1^2}}{y_1}$$

$$\sin \gamma_1 = \frac{x_1}{6} \quad \cos \gamma_1 = \frac{y_1}{6}$$

$$\tan \psi_1 = \frac{\sqrt{36 - y_1^2}}{y_1}$$

$$\tan \psi_2 = \frac{\sqrt{36 - x_1^2}}{x_1}$$

$$\sin \psi_1 = \frac{y_1}{6} \quad \cos \psi_2 = \frac{x_1}{6}$$

$$\sqrt{AB} = 6(\gamma_1 + \gamma_2)$$

$$\sqrt{DE} = 6(\psi_1 + \psi_2)$$

$$P = 2\sqrt{36 - y_1^2} + 2\sqrt{36 - x_1^2} + 6\left(\arcsin \frac{x_1}{6} + \arccos \frac{x_1}{6} + \arcsin \frac{y_1}{6} + \arccos \frac{y_1}{6}\right) = 2(\sqrt{36 - y_1^2} + \sqrt{36 - x_1^2}) + 6 \cdot \left(\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2}\right)$$

$$= 2 \cdot (\sqrt{36 - y_1^2} + \sqrt{36 - x_1^2}) + 6\pi. \quad \text{т.к. } \gamma \text{ лев. на}$$

окружности с $r = 6$, то $x_1^2 + y_1^2 = 36$.

$$x_1^2 = 36 - y_1^2$$

$$P = 2(\sqrt{36 - y_1^2} + \sqrt{20 + y_1^2}) + 6\pi.$$

$$P' = (2(\sqrt{36 - y_1^2} + \sqrt{20 + y_1^2}) + 6\pi)' = -\frac{2y_1}{\sqrt{36 - y_1^2}} + \frac{2y_1}{\sqrt{20 + y_1^2}}$$

$$P' = 0 \quad -\frac{2y_1}{\sqrt{36 - y_1^2}} + \frac{2y_1}{\sqrt{20 + y_1^2}} = 0$$

$$\left[\frac{y_1^2}{\sqrt{36 - y_1^2}} = \sqrt{20 + y_1^2} \right]$$

$$\left[\begin{array}{l} y_1 = 0 \\ 2y_1^2 = 16 \end{array} \right]$$

$$\left[\begin{array}{l} y_1 = 0 \\ y_1^2 = 8 \end{array} \right]$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1
☐

2
☐

3
☐

4
☐

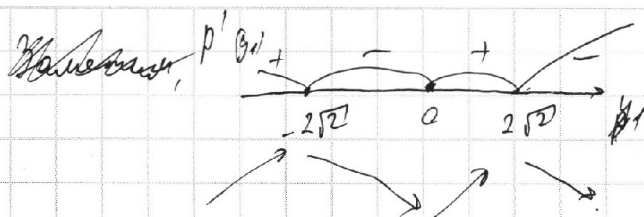
5
☐

6
☒

7
☐

СТРАНИЦА
3 из 3

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



P на максимум, при $y_1 = 2\sqrt{2}$ или $y_1 = -2\sqrt{2}$.

Тогда $y_1^2 = 8$ $x_1^2 = 18 - y_1^2 = 8$.

$$\frac{x_1^2}{y_1^2} = \operatorname{ctg}^2 \varphi = \operatorname{ctg}^2 2 = \operatorname{ctg}^2 2.$$

$$\operatorname{ctg}^2 2 = 1.$$

$$\begin{cases} \operatorname{ctg} 2 = 1 \\ \operatorname{ctg} 2 = -1. \end{cases}$$

$$2 = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi n}{2}, n \in \mathbb{Z}$$

$$M = P_{\max} = 2(\sqrt{36-8} + \sqrt{36-8}) + 6\pi = 8\sqrt{7} + 6\pi$$

Ответ: $M = 8\sqrt{7} + 6\pi$ $2 = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi n}{2}, n \in \mathbb{Z}$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☒

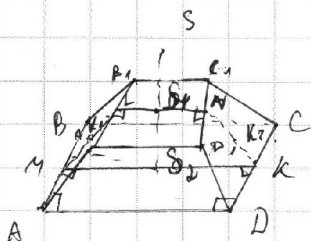
СТРАНИЦА
1 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Задача 2.

Дано:

$ABCDAB, C, D_1$ -
усл. пр. пирамиды
ср. ω - кас. всех
ребер.
ср. ω кас.
всех граней



Пусть точки S_1 и S_2
- центры оснований пирамиды

Доп. построения: $LN \perp AD, D_1$
 $LN \perp A, B, C,$
 $S_1 S_2 \in LN$

$MK: MK \parallel AD, S_2 \in MK$

Пусть $MK = 2R$, а $LN = 2r$.

Рассмотрим кас. сфер. ω : в силу симметрии:

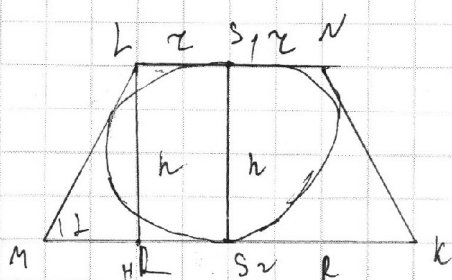
$S_1 S_2$ - Т. касания, S_2 - Т. касания, $K_1 \in ML$
 $K_2 \in MK$

Т.к. ω кас. $ML \parallel K_1 K_2$, $LN \parallel S_1 S_2$, $NK \parallel K_1 K_2$

и $MK \parallel S_1 S_2$, то $MLNK$ - параллелограмм.

При этом $LN \parallel AD, AD \parallel MK \Rightarrow MLNK$ - параллелограмм.

От $\angle KML = \angle$ - искомым.



Доп. построения: $LH \perp MK$.

$LH S_1 S_2$ - прямые $\Rightarrow S_2 H = r$,
 $LH = S_1 S_2$

$MH = MS_2 - S_2 H = R - r$.

По св-ву кас. сфер. ω и $MLNK$.

$ML + NK = LN + MK$. $ML = NK$ в силу симметрии.

$2 ML = 2R + 2r \Rightarrow ML = R + r$.

По теореме Пифагора
 $LH^2 + MH^2 = ML^2$

$LH = 2\sqrt{Rr}$

$\cos \angle = \frac{MR}{ML}$
 $\cos \angle = \frac{R-r}{R+r}$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☒

СТРАНИЦА
2 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Рассмотрим касание кр. Ω :

В силу симметрии (1) $M, L; N, K$ — точки касания

В данном случае трапеция $MLNK$ — вписанная.



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☒ 2 ☒ 3 ☒ 4 ☒ 5 ☒ 6 ☒ 7 ☒

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\sin^2 \pi y - \sin \pi x \sin \pi y - \cos^2 \pi y + \cos \pi y \cos \pi x =$$

$$= \sin^2 \pi y - \cos^2 \pi y$$

$$\Delta = 1111 \cdot A = 11 \cdot 101 \cdot a$$

$$B = 101 \dots \rightarrow B = 707$$

$$\sin \alpha \sin \beta + \cos \alpha \cos \beta = \cos(\alpha - \beta)$$

$$C = 11 \dots$$

$$\cos(2 - \beta) - \cos 22 = 0$$

$$\cos 22 = -\cos 2 - \beta$$

$$\cos 22 = \cos(2 - \beta + \pi)$$

$$22 = 2 - \beta + \pi$$

$$2\beta = \beta - x + 1$$

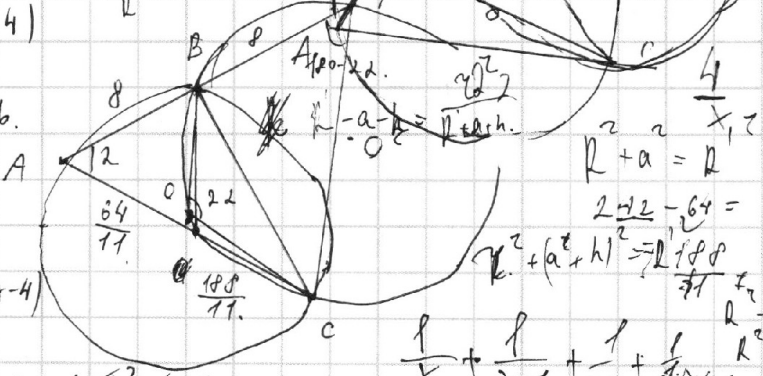
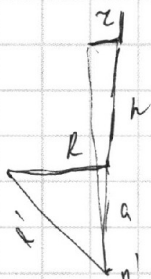
$$\beta = 1$$

$$16 \cdot 8 = 22 \cdot x$$

$$x = \frac{64}{11}$$

$$R = R + a^2$$

$$R^2 = R^2 + (a^2 + h^2)$$



$$x \cdot y = (x-4)(y+4)$$

$$xy = 4x - 4y - 16$$

$$4y = 4x - 16$$

$$y = x - 4$$

$$x \cdot (x-4) = 12(x-4)$$

$$+4x^2 = 48x + 64 = 12x^2 + 48x =$$

$$= 64$$

$$x^2 + \frac{x-1}{2} + \dots$$

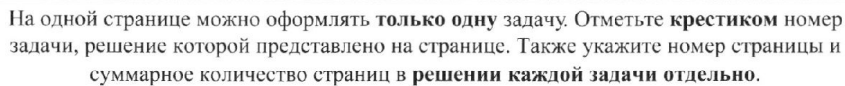
$$\frac{1}{x} + \frac{1}{x-1} + \frac{1}{x-2} + \frac{1}{x-3} + \dots$$

$$\forall a, \arccos \in [0; \pi] \geq 0$$

$$\forall b, \arcsin \in [-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}] \leq \frac{\pi}{2}$$

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{x-1} + \frac{1}{x-2} + \frac{1}{x-3} = a = \frac{12x}{2} \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{x-1} - 2 \right)$$

$$\frac{12x^2 - 12x - 12x + 12}{2x^2} = a$$



1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
ИЗ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. **Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!**

