



МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ



11 КЛАСС. Вариант 12

- [3 балла] Дан приведённый квадратный трёхчлен $f(x)$ такой, что уравнение $f(x) = -2x^2$ имеет единственное решение, а также уравнение $f(x) = -6$ имеет единственное решение. Найдите сумму корней уравнения $f(x) = 0$.
- [3 балла] Сколькими способами можно представить число $n = 5^{151} \cdot 7^{600}$ в виде произведения двух натуральных чисел x и y , где y делится на x ?
- [5 баллов] Найдите количество пар целых чисел $(x; y)$, удовлетворяющих системе

$$\begin{cases} 3 \log_x 27 + \log_y 3 + 8 \log_{xy} \frac{1}{9} = 0, \\ \frac{3y+3}{y-1} < \frac{7x+7}{x-1}, \\ y \leq 24. \end{cases}$$

- [5 баллов] Найдите все пары натуральных чисел $(a; b)$ такие, что

$$\begin{cases} 4 \cdot \min(a; b) = 5(a - b)^2, \\ 5 \cdot \max(a; b) = \text{НОК}(a; b). \end{cases}$$

- [5 баллов] На сторонах BA и BC треугольника ABC с тупым углом B как на диаметрах построены окружности ω_1 и ω_2 соответственно, пересекающиеся в точках B и D . Хорда BE окружности ω_1 перпендикулярна BC , а хорда BF окружности ω_2 перпендикулярна CE и касается ω_1 . Найдите отношение $BF : BD$, если $\cos \angle BCE = \frac{3}{4}$.
- [5 баллов] При каких значениях параметра a система

$$\begin{cases} (y + x^2 - 4x + 1)(x^2 - 2xy + 3y^2)(y - 2x + 1) = 0, \\ y = (-2a + 4)x + a^2 - 1 \end{cases}$$

имеет ровно 2 решения?

- [6 баллов] В прямую четырёхугольную призму $ABCDA_1B_1C_1D_1$ вписана сфера ω . Луч с началом в точке A пересекает ω точках P и Q , а луч с началом в точке C пересекает ω в точках M и N . Пусть O — точка пересечения диагоналей четырёхугольника $ABCD$. Найдите объём призмы $ABCDA_1B_1C_1D_1$ и расстояние ρ от центра ω до плоскости PAC , если известно, что $AO = 1$, $BO = 2$, $CO = 11$, $AP = \frac{2}{\sqrt{5}}$, $AQ = 2\sqrt{5}$, $CM = 4\sqrt{5}$, $CN = 5\sqrt{5}$.



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

- | | | | | | | |
|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

СТРАНИЦА
1 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

№1

Пусть $f(x) = x^2 + ax + b$

$f(x) = -2x^2$ имеет ед. решение:

$$x^2 + ax + b = -2x^2;$$

$$3x^2 + ax + b = 0 \text{ - ед. решение.}$$

Тогда дискриминант этого кв. трёхчлена равен нулю:

$$\mathcal{D} = a^2 - 4 \cdot 3 \cdot b = 0 \Leftrightarrow a^2 = 12b \quad (1)$$

$f(x) = -6$ ед. решение:

$$x^2 + ax + b = -6;$$

$$x^2 + ax + b + 6 = 0 \text{ - ед. решение:}$$

Аналогично, $\mathcal{D} = a^2 - 4(b+6) = 0 \Leftrightarrow a^2 = 4b + 24 \quad (2)$

Получим: $\begin{cases} a^2 = 12b \\ a^2 = 4b + 24 \end{cases} \Rightarrow 12b = 4b + 24 \Rightarrow b = 3.$

Подставим b в (1): $a^2 = 36 \Rightarrow \begin{cases} a = 6 \\ a = -6 \end{cases}$

Подставив a в (2) $a = 6$ или $a = -6$ проверим выполнимость условие.

1. $a = 6, b = 3; f(x) = x^2 + 6x + 3$

$$1) 3x^2 + 6x + 3 = 0 \Leftrightarrow x^2 + 2x + 1 = 0 \Leftrightarrow (x+1)^2 = 0$$

$x = -1 \downarrow \text{ед. решение.}$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении **каждой задачи отдельно**.

- | | | | | | | |
|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

СТРАНИЦА
2 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$2) x^2 + 6x + 9 = 0 \Leftrightarrow (x+3)^2 = 0 \rightarrow x = -3 - \text{ег. решение}$$

Сумма корней по теореме Виетта ур-я $f(x) = 0$
по теореме Виетта равна $-a : -6$

Проверим, что корни есть:

$$\Delta = 6^2 - 4 \cdot 3 = 36 - 12 > 0 - \text{действ. два корня.}$$

$$2. a = -6, b = 3; f(x) = x^2 - 6x + 3 \rightarrow \Delta = 36 - 4 \cdot 3 > 0$$

$$1) 3x^2 - 6x + 3 = 0 \Leftrightarrow x^2 - 2x + 1 = 0 \quad \text{два корня}$$

$$(x-1)^2 = 0 \rightarrow x = 1 \text{ ег. корень}$$

$$2) x^2 - 6x + 9 = 0 \Leftrightarrow (x-3)^2 = 0 \rightarrow x = 3 \text{ ег. корень}$$

аналогично 1., сумма корней $-a : 6$

Оба трехчлена подходят.

Ответ: 6 или -6.



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

- | | | | | | | |
|----------------------------|---------------------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|
| <input type="checkbox"/> 1 | <input checked="" type="checkbox"/> 2 | <input type="checkbox"/> 3 | <input type="checkbox"/> 4 | <input type="checkbox"/> 5 | <input type="checkbox"/> 6 | <input type="checkbox"/> 7 |
|----------------------------|---------------------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|

СТРАНИЦА
1 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

№2

$$n = 5^{151} \cdot 7^{600} = x \cdot y \quad (x, y \in \mathbb{N}) ; \quad y : x$$

П.к. x и y - кратн. то ясно, что в разложении на простые множители со x и y содержат только 5 и 7 в каких-то степенях (возможно, нулевых)

Пусть $x = 5^{d_1} \cdot 7^{\beta_1}$ $(d_1, d_2, \beta_1, \beta_2 \in \mathbb{N} \cup \{0\})$

$$y = 5^{d_2} \cdot 7^{\beta_2}$$

$$y : x \Leftrightarrow \begin{cases} y : 5^{d_1} \\ y : 7^{\beta_1} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 5^{d_2} \cdot 7^{\beta_2} : 5^{d_1} \\ 5^{d_2} \cdot 7^{\beta_2} : 7^{\beta_1} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} d_2 \geq d_1 \\ \beta_2 \geq \beta_1 \end{cases}$$

$$\text{m.к. } (5, 7) = 1$$

$$n = 25^{151} \cdot 7^{600} = 5^{d_1} \cdot 7^{\beta_1} \cdot 5^{d_2} \cdot 7^{\beta_2} = 5^{d_1+d_2} \cdot 7^{\beta_1+\beta_2}$$

$$\begin{array}{l} \uparrow \\ \begin{cases} d_1 + d_2 = 151 \\ \beta_1 + \beta_2 = 600 \end{cases} \end{array}$$

По симметрии разделяем с показательными д. и.в.

$$1. \begin{cases} d_1 + d_2 = 151 \\ d_2 \geq d_1 \end{cases}$$

- найти кол-во решений в цеп. макс квадр.

$$d_1 = 151 - d_2$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1

2

3

4

5

6

7

СТРАНИЦА
2 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$d_2 \geq 151 - d_1 \Leftrightarrow d_2 \geq \frac{151}{2} = 75,5 \Rightarrow d_2 \geq 76$$

$(d_2 - \text{целое})$
 $(d_2 = 151 - d_1 \leq 151) \rightarrow$

Для каждого $d_2 \geq 76 \Leftrightarrow d_2 \in \{76, 77, \dots, 151\}$ возможное восстановливается $d_1 = 151 - d_2$, при этом d_1 .

Условие, что $d_2 \geq d_1$.

Число ин-вов $\{76, \dots, 151\}$ ровно 76

Итого 76 решений системы.

$$2. \begin{cases} \beta_1 + \beta_2 = 600 \\ \beta_2 \geq \beta_1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \beta_1 = 600 - \beta_2 \\ \beta_2 \geq \beta_1 \end{cases}$$

$$\beta_2 \geq 600 - \beta_1 \Leftrightarrow \beta_2 \geq 300$$

$$\beta_2 = 600 - \beta_1 \leq 600$$

т.е. $\beta_2 \in \{300, 301, \dots, 600\}$ - 301 число

Для каждого β_2 возможн. всп. $\beta_1 = 600 - \beta_2$, при этом выполняется кр-во. Итого 301 решение системы.

Решения каждой из систем выбираются независимо, поэтому общее число решений есть

$$76 \cdot 301 = 22876$$

Ответ: 22876 способов.



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

- | | | | | | | |
|----------------------------|----------------------------|---------------------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|
| <input type="checkbox"/> 1 | <input type="checkbox"/> 2 | <input checked="" type="checkbox"/> 3 | <input type="checkbox"/> 4 | <input type="checkbox"/> 5 | <input type="checkbox"/> 6 | <input type="checkbox"/> 7 |
|----------------------------|----------------------------|---------------------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|

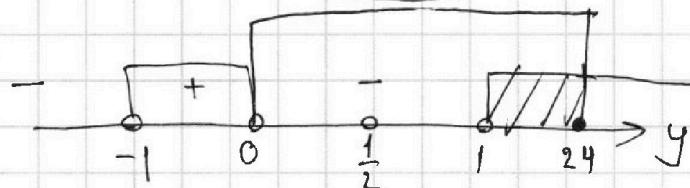
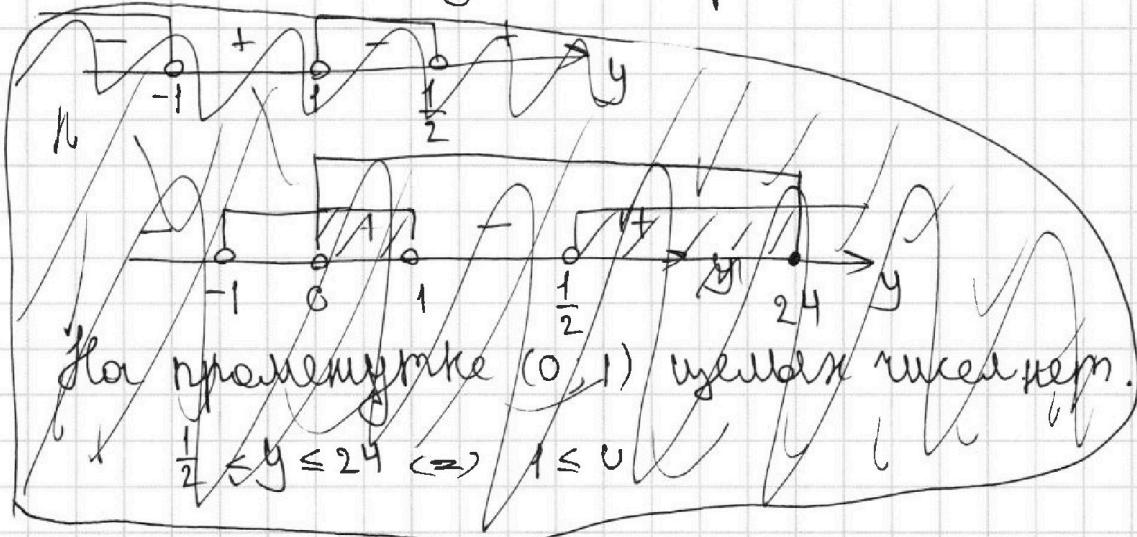
СТРАНИЦА
3 из 3

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\frac{(y+1)(y-\frac{1}{2})(y-2)}{(y-1)(y^2+y+1)} \geq 0 \quad \left. \begin{array}{l} \\ \end{array} \right\} \cdot (y^2+y+1) > 0$$

$$\frac{(y+1)(y-\frac{1}{2})}{(y-1)} \geq 0 \quad \begin{array}{l} \mathcal{D} = 1 - 4 = -3 < 0 \\ \uparrow \end{array}$$

Решим методом интервалов.



Получим, что $\begin{cases} 1 < y \leq 24 \\ y^3 = x \end{cases}$

Числа на промежутке $(1; 24]$, являющиеся корнями:

$y = 8 \Rightarrow x = 2$ — это решение.

Ответ: $x = 2; y = 8$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

- | | | | | | | |
|----------------------------|----------------------------|---------------------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|
| <input type="checkbox"/> 1 | <input type="checkbox"/> 2 | <input checked="" type="checkbox"/> 3 | <input type="checkbox"/> 4 | <input type="checkbox"/> 5 | <input type="checkbox"/> 6 | <input type="checkbox"/> 7 |
|----------------------------|----------------------------|---------------------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|

СТРАНИЦА
2 из 3

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач **нумеруются отдельно**. Порча QR-кода недопустима!

Чтак, система равенствка слвг. :

$$\begin{cases} y^3 = x \\ x, y > 0; xy \neq 1 \end{cases}$$

1) x и y члены,
то $xy \neq 1$ - миннее
условие неравенства $x, y \neq 1$

$$3 \frac{y+1}{y-1} \leq \frac{x+1}{x-1} \quad (2)$$

$$y \leq 24$$

Представим $y^3 = x$ в (2):

$$3 \frac{y+1}{y-1} \leq \frac{y^3+1}{y^3-1}$$

$$\frac{y^3+1}{y^3-1} = \frac{(y+1)(y^2-y+1)}{(y-1)(y^2+y+1)}$$

$$\frac{3(y+1)}{y-1} - \frac{7(y^3+1)}{(y-1)(y^2+y+1)} < 0$$

$$\frac{3(y+1)(y^2+y+1) - 7(y+1)(y^2-y+1)}{(y-1)(y^2+y+1)} < 0$$

$$\underline{(y+1)(3y^2+3y+3-7y^2+7y-7)} < 0$$

- // -

$$\underline{(y+1)(-4y^2+10y-4)} < 0 \quad | : -2$$

- // -

$$\underline{(y+1)(2y^2-5y+2)} > 0 \quad | : 2$$

(y-1)(y^2+y+1)

$$2y^2-5y+2 = 2(y-\frac{1}{2})(y-2)$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

- | | | | | | | |
|----------------------------|----------------------------|---------------------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|
| <input type="checkbox"/> 1 | <input type="checkbox"/> 2 | <input checked="" type="checkbox"/> 3 | <input type="checkbox"/> 4 | <input type="checkbox"/> 5 | <input type="checkbox"/> 6 | <input type="checkbox"/> 7 |
|----------------------------|----------------------------|---------------------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|

СТРАНИЦА
1 из 3

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

N^3

$$\left\{ \begin{array}{l} 3 \log_x 27 + \log_y 3 + 8 \log_{xy} \frac{1}{9} = 0 \quad (1) \\ \frac{3y+3}{y-1} < \frac{7x+7}{x-1} \end{array} \right.$$

$$y \leq 2^4$$

$$\text{ОДЗ: } \begin{cases} x > 0, x \neq 1 \\ y > 0, y \neq 1 \\ xy > 0, xy \neq 1 \end{cases}$$

Перебираем с ур. (1) исходные:

$$3 \log_x 3^3 + \log_y 3 + 8 \log_{xy} 3^2 = 0$$

$$9 \log_x 3 + \log_y 3 - 16 \log_{xy} 3 = 0$$

$$\text{Пусть } \log_3 x = a, a \neq 0, \log_3 y = b, b \neq 0$$

также $a+b=0$,
т.к. $xy \neq 1$

$$\frac{9}{\log_3 x} + \frac{1}{\log_3 y} - \frac{16}{\log_3 x + \log_3 y} = 0$$

$$\frac{9}{a} + \frac{1}{b} = \frac{16}{a+b} \quad | \cdot ab(a+b) \neq 0$$

$$9ab + 9b^2 + a^2 + ab = 16ab$$

$$9b^2 - 6ab + a^2 = 0$$

$$(3b-a)^2 = 0$$

$$3b = a \Leftrightarrow 3 \log_3 y = \log_3 x \Leftrightarrow y^3 = x$$

+ ОДЗ выполнено.



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1

2

3

4

5

6

7

СТРАНИЦА
1 из 3

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\begin{cases} 4 \cdot \min(a; b) = 5(a-b)^2 \\ 5 \cdot \max(a; b) = \text{НОК}(a; b) \end{cases} \quad a, b \in \mathbb{N}$$

Заметим, что при перестановке a и b местами, система не меняется, поскольку НОД супр. обнуляется при $a \leq b$.

$$1) a=b: \quad 4a=0 \Rightarrow a=0 \notin \mathbb{N}$$

$$2) a < b:$$

$$\begin{cases} 4a = 5(a-b)^2 \quad (1) \\ 5b = \text{НОК}(a; b) \quad (2) \end{cases}$$

Пусть $a = x \cdot d$, $b = y \cdot d$, где $d = \text{НОД}(a; b)$
и $(x; y) = 1$.

Воспользуемся тождеством:

$$\text{НОД}(a; b) \cdot \text{НОК}(a; b) = ab \Rightarrow \text{НОК}(a; b) = \frac{ab}{\text{НОД}(a; b)}$$

$$(2): 5b = \frac{ab}{\text{НОД}(a; b)} \Leftrightarrow 5d = x \cdot d \Rightarrow x = 5$$

$$a = 5d$$

$$(1): 4 \cdot 5d = 5(5d - yd)^2 \mid :5$$

$$4d = d^2(5-y)^2 \mid :d$$

$$4 = d^2(5-y)^2 \cancel{\mid d^2} \Leftrightarrow (2-d(5-y))(2+d(5-y)) = 0$$

$$2-d(5-y) = 0 \Rightarrow d = 2/y$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1

2

3

4

5

6

7

СТРАНИЦА
2 ИЗ 3

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Решение для случая:

$$1) d = 1:$$

$$2 = 5 - y \Rightarrow y = 3 \Rightarrow a = 5 \\ b = 3$$

Проверкой убеждаешься, что пара подходит.

$$2) d = 2:$$

$$1 = 5 - y \Rightarrow y = 4 \Rightarrow a = 10 \\ b = 8$$

Проверка:

$$4 \cdot 10 = 5(10 - 8)^2$$

$$40 = 5 \cdot 4 = 20$$

$$40 \neq 20$$

- не подходит

$$\text{Вернёмся к } 4 = d^2(5 - y)$$

$$\begin{cases} 2 = d(5 - y) (*) \\ 2 = d(y - 5) (**) \end{cases}$$

$$(*) : 2 : d \Rightarrow d = 1 \text{ или } d = 2$$

$$d = 1: 2 = 5 - y \Rightarrow y = 3 \Rightarrow a = 5 \\ b = 3 \rightarrow a > b$$

Проверкой убеждаешься что подходит.

$$d = 2: 1 = 5 - y \Rightarrow y = 4 \Rightarrow a = 10 \\ b = 8$$

Проверка:



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1

2

3

4

5

6

7

СТРАНИЦА
3 ИЗ 3

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$d=2: 1 = 5 - y \Rightarrow y = 4 \Rightarrow \begin{matrix} a = 10 \\ b = 8 \end{matrix} \rightarrow a > b$$

(*) Аналогично $d=1$ или $d=2$ не подходит.

$$d=1: 2 = y - 5 \Rightarrow y = 7 \Rightarrow \begin{matrix} a = 5 \\ b = 7 \end{matrix}$$

Проверкой убеждаемся, что пара подходит

$$d=2: 1 = y - 5 \Rightarrow y = 6 \Rightarrow \begin{matrix} a = 10 \\ b = 12 \end{matrix}$$

Проверка: $4 \cdot 10 = 5(10 - 12)^2$

$$40 = 5 \cdot 4 = 20$$

$40 \neq 20$ — не подходит

Ответ: $(5; 7)$.



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1

2

3

4

5

6

7

СТРАНИЦА
4 из 4

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\sin \angle B_1 B C_2 = \sin(180^\circ - \alpha) = \sin \alpha = \sqrt{1 - \frac{9}{16}} = \frac{\sqrt{7}}{4} \quad \text{отв. } \frac{\sqrt{7}}{4}$$

$$\frac{\sqrt{43}x}{3} BH = \frac{2x^2 \cdot \sqrt{7}}{3 \cdot 4}$$

$$BH = \frac{3 \cdot \sqrt{43} \cdot 2x}{\sqrt{43} \cdot 3} = 2\sqrt{\frac{7}{43}}x$$

$$BD = 2 \cdot BH$$

$$BF \perp BD \Rightarrow \text{из } \triangle BCF \text{ по т. Пифагора:}$$

$$BF = \sqrt{16x^2 - 9x^2} = x\sqrt{7}$$

$$\frac{BF}{BD} = \frac{x\sqrt{7}}{4 \cdot \frac{\sqrt{43}}{4}x} = \frac{\sqrt{43}}{4}$$

$$\text{Ответ: } \frac{\sqrt{43}}{4}.$$



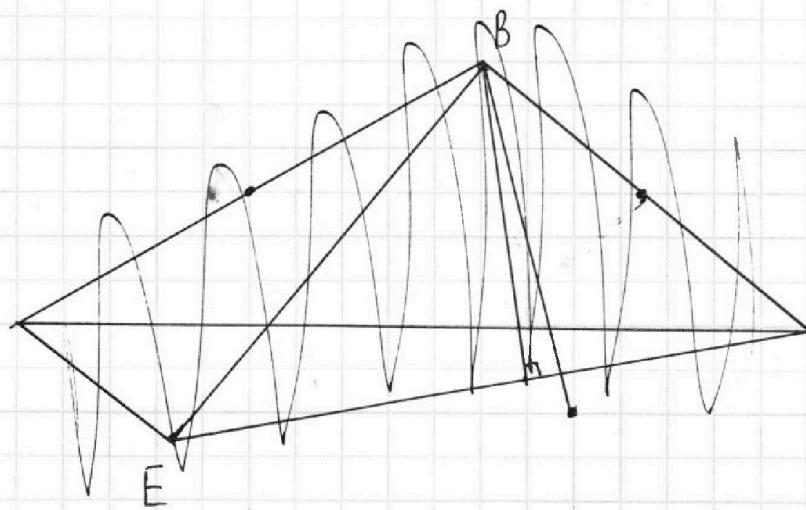
На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

- | | | | | | | |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|---------------------------------------|----------------------------|----------------------------|
| <input type="checkbox"/> 1 | <input type="checkbox"/> 2 | <input type="checkbox"/> 3 | <input type="checkbox"/> 4 | <input checked="" type="checkbox"/> 5 | <input type="checkbox"/> 6 | <input type="checkbox"/> 7 |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|---------------------------------------|----------------------------|----------------------------|

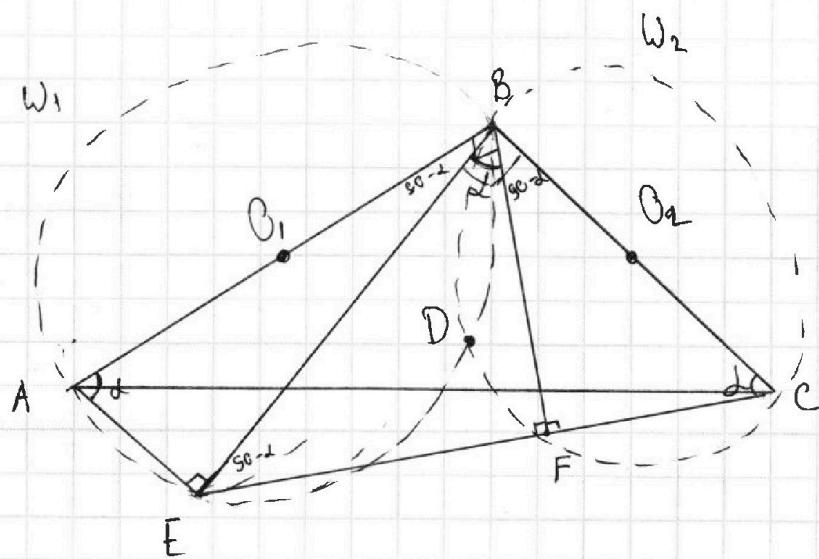
СТРАНИЦА
1 из 4

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

№5



№5



Вспомогательный перпендикуляр BF' на CE . $\angle BFC = 90^\circ$

$\Rightarrow F'$ лежит на окружности с диаметром BC

$\Rightarrow F' = F$

$\angle AEB = 90^\circ$, т.к. AB -диаметр w_1 , $\angle EBC = 90^\circ$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

- | | | | | | | |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|---------------------------------------|----------------------------|----------------------------|
| <input type="checkbox"/> 1 | <input type="checkbox"/> 2 | <input type="checkbox"/> 3 | <input type="checkbox"/> 4 | <input checked="" type="checkbox"/> 5 | <input type="checkbox"/> 6 | <input type="checkbox"/> 7 |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|---------------------------------------|----------------------------|----------------------------|

СТРАНИЦА
3 из 4

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\frac{9}{16} + 1 = 3 \left(\frac{x}{AB} \right)^2$$

$$\frac{25}{16 \cdot 3} = \frac{x^2}{AB^2} \Rightarrow AB = \sqrt{\frac{16 \cdot x^2}{25 \cdot 3}} = \frac{4x}{5\sqrt{3}} = \frac{4\sqrt{43}x}{15}$$

Пусть B_1 и B_2 - центры окружностей W и W_2 соответ. Тогда B_1 и B_2 - середины AB и BC соответ.

По теореме Косинусов $AC = AB + BC$ найдём AC :

$$AC = \sqrt{AB^2 + BC^2 - 2 \cdot AB \cdot BC \cdot \cos(180^\circ - \alpha)} =$$

$$= \sqrt{\frac{16^2}{9}x^2 + 16x^2 + 2 \cdot \frac{16}{3} \cdot 4 \cdot x^2 \cos \alpha} =$$

$$= x \sqrt{\frac{256}{9} + 16 + \frac{32 \cdot 128}{3} \cdot \frac{x}{4}} =$$

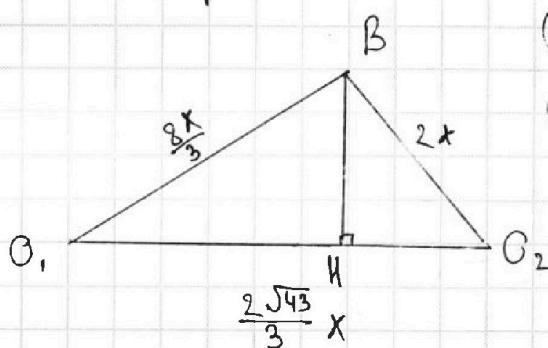
$$= x \sqrt{\frac{256 + 16 \cdot 9 + 32 \cdot 9}{9}} = x \sqrt{\frac{x}{3} \sqrt{16 \cdot 16 + 16 \cdot 9 + 16 \cdot 18}} =$$

$$= \frac{4x}{3} \sqrt{16 + 9 + 18} = \frac{4\sqrt{43}x}{3}$$

$$B_1, B_2 - \text{ср. линии } \triangle ABC \Rightarrow B_1, B_2 = \frac{1}{2} AC = \frac{2\sqrt{43}}{3} x$$

Рассмотрим $\triangle BB_1B_2$. Известно, что $B, B_1, B_2 \perp BD$

и B, B_1, B_2 пересекают BD в середине - в точке H .



$$B_1B = \frac{1}{2} AB = \frac{8x}{3}$$

$$B_2B = \frac{1}{2} BC = 2x$$

Площадь $\triangle BB_1B_2$:
 $S = \frac{\sqrt{43}}{3} x \cdot BH = \frac{8x^2}{3} \sin \angle B_1B_2$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

- | | | | | | | |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

СТРАНИЦА
2 из 4

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Заметим, что отсюда следует $AE \parallel BC$

BF — касательная к W . По теореме об угле между касательной и секущей $\angle ABF$ равен наименьшему дуге AB . $\Rightarrow \angle ABF = 90^\circ$

$AB \perp BF, CE \perp BF \Rightarrow AB \parallel CE$. Тогда $ABCE$ — параллелограмм. $\Rightarrow AE = BC, AB = EC$.

Пусть $\angle BCF = \alpha \Rightarrow \angle CBF = \alpha, \angle BPF = 90 - \alpha$.

$$\angle EBC = 90^\circ \Rightarrow \angle EBF = \alpha, \angle BPF = 90 - \alpha$$

$$\angle ABF = 90^\circ \Rightarrow \angle ABE = 90 - \alpha, \angle BAE = \alpha$$

$$\text{Из } \triangle BFC \cos \angle BCF = \cos \angle BCF = \frac{CF}{BC} = \frac{3}{4}$$

$$\text{Пусть } CF = 3x, BC = 4x$$

$$\text{Из } \triangle BEC \cos \alpha = \frac{BC}{EC} = \frac{4x}{EC} = \frac{3}{4} \Rightarrow EC = \frac{16x}{3} = AB$$

$$\Rightarrow EF = EC - CF = \frac{16x}{3} - 8\frac{x}{3} = \frac{8x}{3}$$

$$\text{Из } \triangle BPF \cos \alpha = \frac{BF}{BE}$$

$$\text{По м. Тибронора из } \triangle BPC: BE = \sqrt{x^2 \left(\frac{16^2}{9} - 16 \right)} =$$

$$= x \sqrt{\frac{16 \cdot 16 - 16 \cdot 9}{9}} = \frac{x}{3} \sqrt{16 \cdot 7} = \frac{4\sqrt{7}}{3}x$$

$$\text{Из } \triangle BEF \cos \alpha = \frac{BF}{BE} = \frac{\frac{8x}{3}}{\frac{4\sqrt{7}}{3}x} = \frac{2}{\sqrt{7}} \Rightarrow BF = \sqrt{3}x$$

$$\text{Из } \triangle AEB \cos \alpha = \frac{AE}{AB} = \frac{3}{4} \text{ а также } AE^2 + AB^2 = 3x^2 \therefore AB^2$$

На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.



- | | | | | | | |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|
| <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|

СТРАНИЦА
1 из 5

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

№6

$$\left\{ \begin{array}{l} (y+x^2-4x+1)(x^2-2xy+3y^2)(y-2x+1)=0 \\ y = (-2a+4)x + a^2 - 1 \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} y = -(x-2)^2 + 3 \\ (x-y)^2 + 2y^2 = 0 \\ y = 2x - 1 \\ y = -2(a-2)x + a^2 - 1 \end{array} \right.$$

- ровно два решения?

Решим задачу графически:

1) $y = -(x-2)^2 + 3$ - парабола, ветви вниз, координаты вершины $(2; 3)$

$$2) (x-y)^2 + 2y^2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x=y \\ 2y=0 \end{cases} \Leftrightarrow x=y=0$$

Это есть точка $A(0, 0)$

3) $y = 2x - 1$ - прямая.

4) $y = -2(a-2)x + a^2 - 1$ - семейство прямых.

Графика: ...

Заметим что графики $y = -(x-2)^2 + 3$ и $y = 2x - 1$ имеют две общие точки: $(2; 3)$ и $(0; -1)$

B A

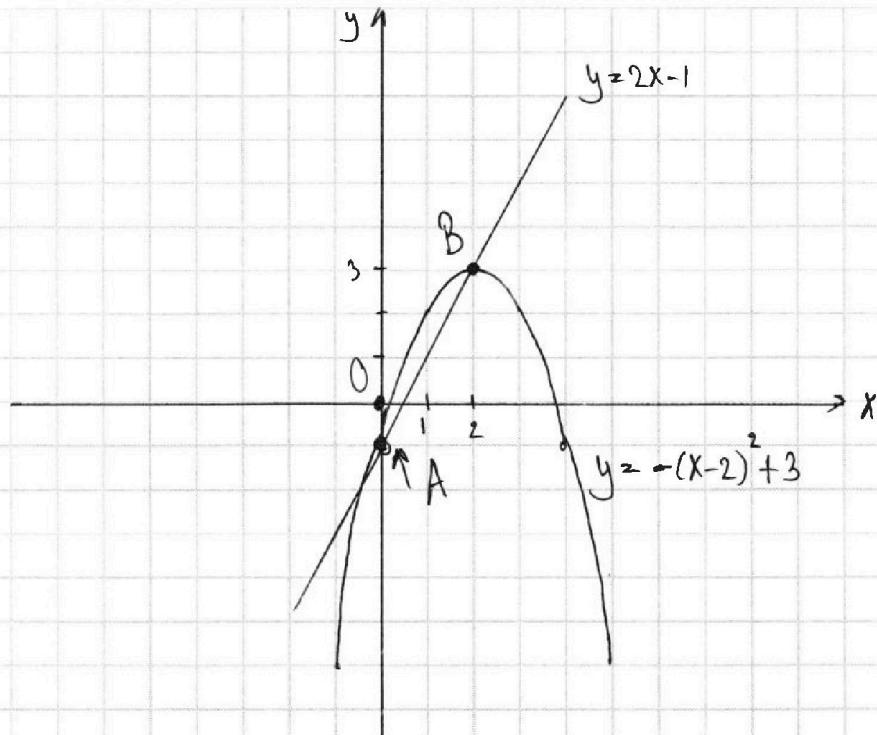


На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

- | | | | | | | |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|---------------------------------------|----------------------------|
| <input type="checkbox"/> 1 | <input type="checkbox"/> 2 | <input type="checkbox"/> 3 | <input type="checkbox"/> 4 | <input type="checkbox"/> 5 | <input checked="" type="checkbox"/> 6 | <input type="checkbox"/> 7 |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|---------------------------------------|----------------------------|

СТРАНИЦА
2 из 5

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



Найдем 1) $y = (-2a+4)x + a^2 - 1$ параллельна $y = 2x - 1$

$$\Leftrightarrow -2a+4=2 \Leftrightarrow a=1$$

$y = 2x$ — проходит через $O(0,0)$ — 1ое реш.

Далее найдём решения $2x = -x^2 + 4x - 1$

$$x^2 - 2x + 1 = 0$$

$$(x-1)^2 = 0 \rightarrow x = 1 — 2-е решения.$$

$y = 2x$ не пересекает $y = 2x - 1$

$a=1$ — подходит

2) $y = (-2a+4)x + a^2 - 1$ не параллельна $y = 2x - 1$

\Rightarrow пересекают прямую $2x - 1$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

- | | | | | | | |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|---------------------------------------|----------------------------|
| <input type="checkbox"/> 1 | <input type="checkbox"/> 2 | <input type="checkbox"/> 3 | <input type="checkbox"/> 4 | <input type="checkbox"/> 5 | <input checked="" type="checkbox"/> 6 | <input type="checkbox"/> 7 |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|---------------------------------------|----------------------------|

СТРАНИЦА
3 из 5

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Значит график $y = (-2a+4)x + a^2 - 1$ состоит из двух линий (точки 0 и параболы) при $a \neq 1$

Должна иметь одну общую точку, отличную от первой (пересечение)

1) y проходит через $O(0;0)$: $c y=2x-1$

$$0 = a^2 - 1 \Rightarrow a = \pm 1 \Rightarrow a = -1$$

($a \neq 1$)

Проверить, нет ли пересечения с параболой:

$$\begin{cases} y = 6x \\ y = -x^2 + 4x - 1 \end{cases}$$

$$-x^2 + 4x - 1 = 6x$$

$$x^2 + 2x + 1 = 0$$

$$(x+1)^2 = 0$$

$x = -1$ — пересечение с параболой

в точках, отличных от A и B — обе общие точки $y = -x^2 + 4x - 1$ и $y = 2x - 1$.

При решении $\Rightarrow a \neq -1$

2) y не проходит через $O(0;0)$.

Тогда y и парабола имеют ровно одну общую точку, отличную от первой, пересечение с $y = 2x - 1$.

Это означает, что $y = (-2a+4)x + a^2 - 1$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

- | | | | | | | |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

СТРАНИЦА
4 из 5

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Двигаемся касательной к графику параболы.

Предположим, что если касание проходит в сжатой из точек A или B, то у системы одно решение. Исключим эти случаи (Эти а).

Касание в точке B:

$$y = (-2a+4)x + a^2 - 1 \text{ параллельна } y = x^2 + 4x - 1 \text{ сдвигаем}$$

$$\text{с } y = 3 \Leftrightarrow \begin{cases} -2a+4=0 \\ a^2-1=3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=2 \\ a=\pm 2 \end{cases} \Rightarrow a=2$$

Касание в точке A:

$$\begin{cases} (-2a+4)x + a^2 - 1 = -x^2 + 4x - 1 & -\text{лг. решение} \\ A(0; -1) : -1 = a^2 - 1 \end{cases}$$

↑

$$\begin{cases} a=0 \\ 4x-1 = -x^2 + 4x - 1 \end{cases}$$

$$x^2 = 0 \Rightarrow x=0 - \text{действ. лг. решение}$$

Значит не подходит $a=2$ и $a=0$

В остальных случаях необходимо и доказать:

$$\begin{cases} (-2a+4)x + a^2 - 1 = -x^2 + 4x - 1 & -\text{лг. решение} \\ a \notin \{0; 2; 1; -1\} \end{cases}$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

- | | | | | | | |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

СТРАНИЦА
5 ИЗ 5

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$x^2 - 2ax + a^2 = 0 \quad -\text{eq. решения} \Leftrightarrow D \geq 0$$

$$D = 4a^2 - 4a^2 = 0 \quad -\text{верно } \forall a$$

Чтобы неожиданно $a \neq 0; 1; 2; -1$ ^{или} $a = 1$

Ответ: $a \neq 0; 2; -1$.

I-

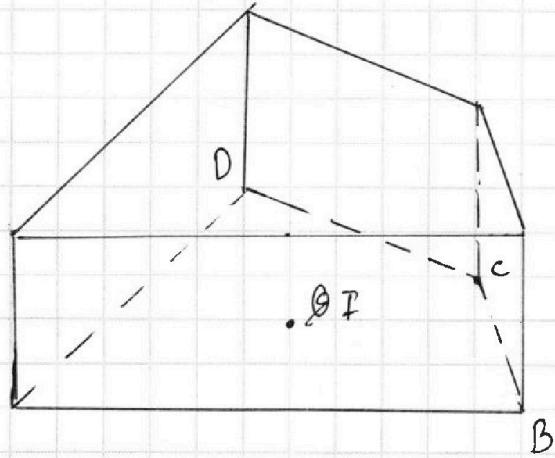


На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

- | | | | | | | |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> |

СТРАНИЦА
1 из 4

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



Если сphere вписана в призму, то основание такой призмы – четырехугольник.

Высота призмы – две радиуса сферы.

Пусть сphere касается основания в точке β .

При $\angle A\beta C = \angle C\beta C'$ – касательные к сфере.

Проведем сечение $APQ\beta^T$ и $CMN\beta^T$. Впишем окружности. Применим

Песчинар в своих случаях спрашивала метод

Чек А и С:

$$1) A\beta^2 = AP \cdot AQ = \frac{2}{\sqrt{5}} \cdot 2\sqrt{5} = 4 \Rightarrow A\beta^2 = 2$$

$$2) C\beta^2 = CM \cdot CN = 4\sqrt{5} \cdot 5\sqrt{5} = 4 \cdot 5 \cdot 5 = 10^2 \Rightarrow C\beta^2 = 10$$

Строим окружность ω на диаметре ABC .

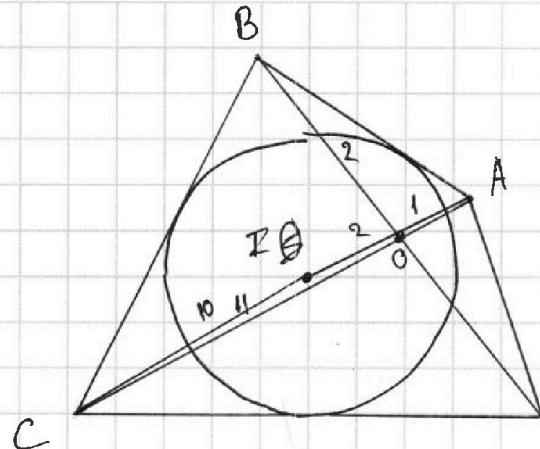


На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отмечте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

- | | | | | | | |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|---------------------------------------|
| <input type="checkbox"/> 1 | <input type="checkbox"/> 2 | <input type="checkbox"/> 3 | <input type="checkbox"/> 4 | <input type="checkbox"/> 5 | <input type="checkbox"/> 6 | <input checked="" type="checkbox"/> 7 |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|---------------------------------------|

СТРАНИЦА
2 из 4

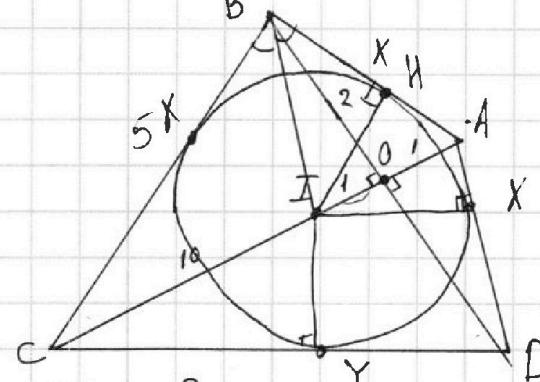
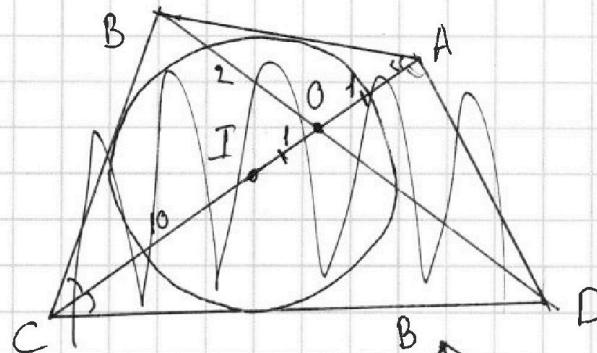
Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по **каждой из задач** нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



$$AO = 1, CO = 11, AB + CO = 12$$

$$AI = 2, CI = 10, AI + CI = 12$$

$AB + CO = AI + CI \Rightarrow$ точка I лежит на AC.



Рассм. $\triangle ABC$: BI -биссектриса.

По свойству биссектрисы: $\frac{BC}{AI} = \frac{BC}{AB} = \frac{10}{2} = 5$

Тогда $BC = 5X$, $AB = X$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

- | | | | | | | |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|---------------------------------------|
| <input type="checkbox"/> 1 | <input type="checkbox"/> 2 | <input type="checkbox"/> 3 | <input type="checkbox"/> 4 | <input type="checkbox"/> 5 | <input type="checkbox"/> 6 | <input checked="" type="checkbox"/> 7 |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|---------------------------------------|

СТРАНИЦА
3 из 4

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

По формуле длины биссектрисы:

$$BI = \sqrt{5x^2 - 10 \cdot 2} = \sqrt{5(x^2 - 4)}$$

$B \Delta BIA$ BC -медиана.

По формуле длины медианы:

$$BO^2 = \frac{BI^2 + BA^2}{2} - \frac{AI^2}{4}$$

$$4 = \frac{5x^2 - 20 + x^2}{2} - 1$$

$$10 = 6x^2 - 20$$

$$BI = \sqrt{5(5-4)} = \sqrt{5}$$

$$6x^2 = 30 \Rightarrow x^2 = \frac{30}{6} = 5, x = \sqrt{5}$$

Вспомнил высоту III. в этом $\triangle I$, I -радиус

в. $S_{BIA} = AB \cdot II \cdot \frac{1}{2}$

Заметил, что $BI = AB = \sqrt{5} \Rightarrow BC \perp AI$

$$S_{BIA} = AB \cdot II \cdot \frac{1}{2} = BO \cdot BC \cdot OF$$

$$\frac{\sqrt{5}}{2} II = 2 \Rightarrow II = \frac{4}{\sqrt{5}} - \text{радиус.}$$

$$S_{ABCD} = R \cdot r = \frac{AB+BC+CD+DA}{2} \cdot \frac{4}{\sqrt{5}} = (AB+BC) \frac{4}{\sqrt{5}} =$$

$$6\sqrt{5} \cdot \frac{4}{\sqrt{5}} = 24$$

$$\cancel{AB+BC} \quad AB+CD = AD+BC,$$

т.к. $ABCD$ выпуклый.



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

- | | | | | | | |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> |

СТРАНИЦА
Ч из Ч

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Аналогично б ΔADC :

$$DI = \sqrt{5y^2 - 20}, \text{ где } AD = y, CD = 5y$$

I X и I Y - высоты из I на AD и DC.

$$CY = \sqrt{100 - \frac{16}{25}} = \sqrt{\frac{2500 - 16}{100}} = \frac{\sqrt{2484}}{10}$$

Далее находит какодите и делимываемся
получаю ABCD по формуле $S = P \cdot \frac{4}{\sqrt{5}}$, где
 P - полупериметр

$$V = S \cdot h = \frac{4}{\sqrt{5}} \cdot 2 \cdot \frac{4}{\sqrt{5}} \cdot S = \frac{32}{5} S$$

$$\text{Объем: } p = 8 \frac{4}{\sqrt{5}}, V = \frac{32}{5} S.$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении **каждой задачи отдельно**.

1

2

3

4

5

6

7

СТРАНИЦА
_ ИЗ _

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. **Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно.** Порча QR-кода недопустима!



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1

2

3

4

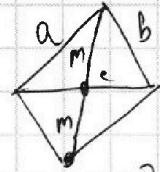
5

6

7

СТРАНИЦА
ИЗ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

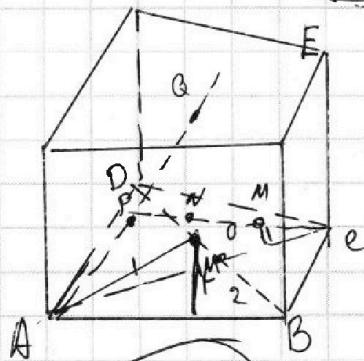
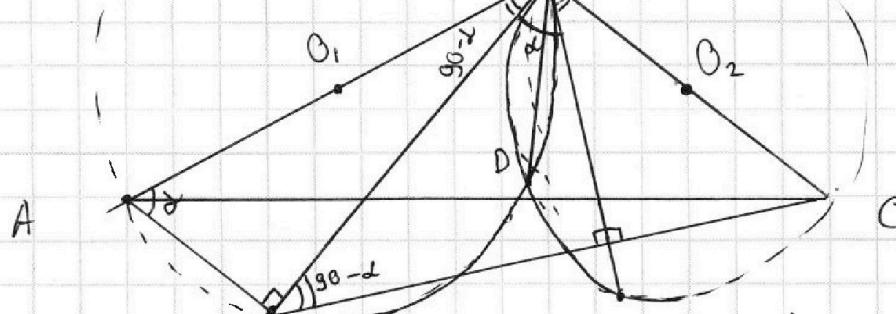


$$\cos \angle BCB = \frac{3}{4}$$

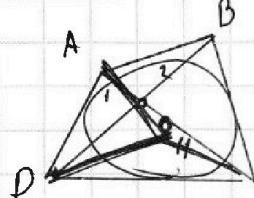
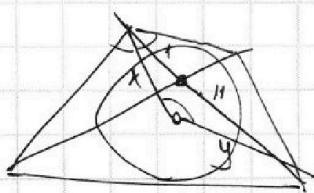
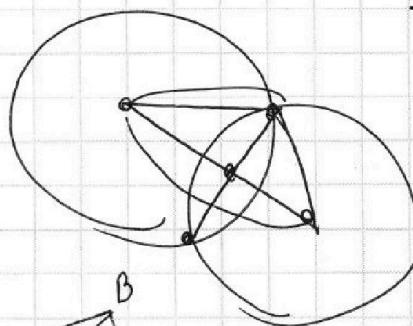
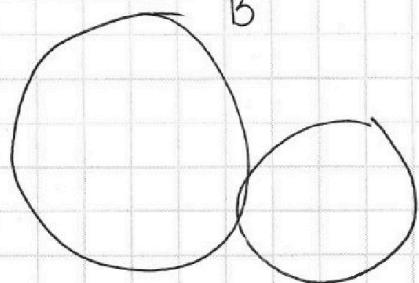
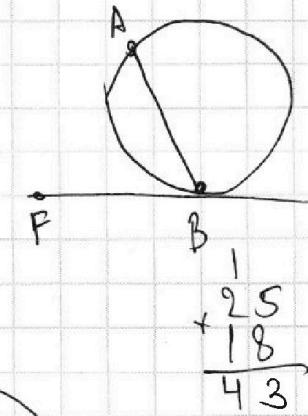
$$BF : BD = ?$$

$$4m^2 + c^2 = 2a^2 + 2b^2$$

$$m^2 = \frac{a^2 + b^2}{4} - \frac{c^2}{4}$$



$$\frac{\frac{3}{16}}{\frac{1}{16}} = \frac{3}{16}$$



$$AO^2 = AP \cdot AQ$$

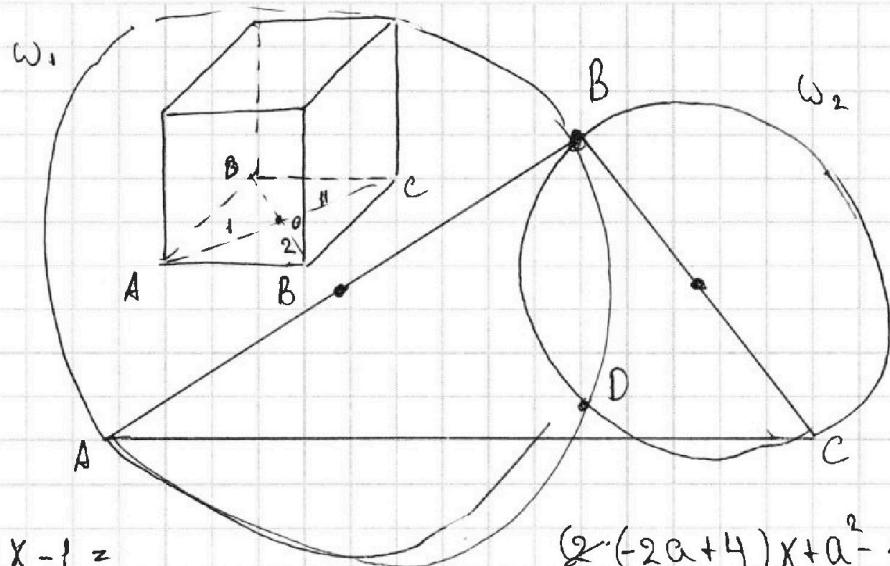


На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

- | | | | | | | |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|
| <input type="checkbox"/> 1 | <input type="checkbox"/> 2 | <input type="checkbox"/> 3 | <input type="checkbox"/> 4 | <input type="checkbox"/> 5 | <input type="checkbox"/> 6 | <input type="checkbox"/> 7 |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|

СТРАНИЦА
_ ИЗ _

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

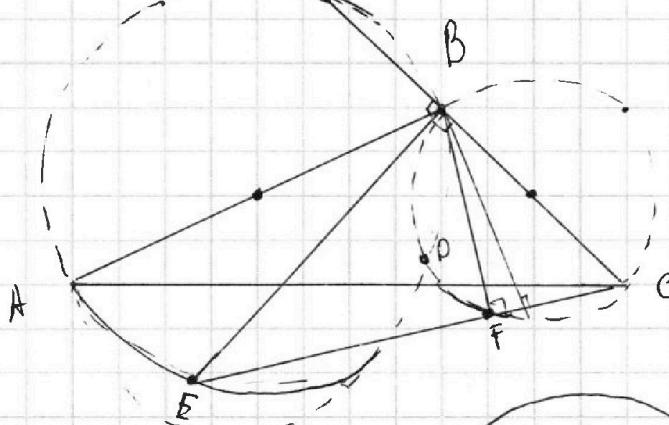


$$\begin{aligned} -x^2 + 4x - 1 &= \\ = -(x^2 - 4x + 1) &= -((x-2)^2 - 3) \end{aligned}$$

$$2(-2a+4)x + a^2 - 1 =$$

$$= -2(a-2)x + (a-1)(a+1)$$

$$-2ax + 4x + a^2 - 1 =$$



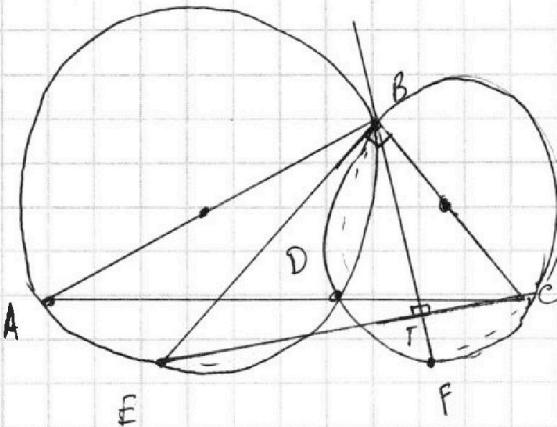
$$\cos \angle BCF = \frac{CT}{BC}$$

$$-2a + 4 = 2$$

$$a^2 - 1 = 1 \rightarrow \text{нет реш.}$$

$$-2a + 4 = 2$$

$$-2a = -2 \quad a = 1$$





На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

- | | | | | | | |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|
| <input type="checkbox"/> 1 | <input type="checkbox"/> 2 | <input type="checkbox"/> 3 | <input type="checkbox"/> 4 | <input type="checkbox"/> 5 | <input type="checkbox"/> 6 | <input type="checkbox"/> 7 |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|

СТРАНИЦА
ИЗ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач **нумеруются отдельно**. Порча QR-кода недопустима!

№1

$$f(x) = x^2 + px + q$$

$$3x^2 + px + q = 0$$

$$x^2 + px + q + 6 = 0$$

$$\mathcal{D}_1 = p^2 - 4 \cdot 3 \cdot q = 0 \quad (\Rightarrow) \quad p^2 = 12q$$

$$\mathcal{D}_2 = p^2 - 4(p+6) = 0 \quad (\Leftrightarrow) \quad p^2 = 4q + 24$$

$$12 |$$

$$-p = x_1 + x_2$$

$$(x-x_1)(x-x_2) = x^2 + x(-x_1 - x_2) + x_1 x_2$$

$$12q = 4q + 24$$

$$8q = 24 \quad q = \frac{24}{8} = 3$$

№2

$$h = 5^{151} \cdot 7^{600} = x \cdot y, \text{ где } y : x$$

$$x = 5^{\alpha_1} \cdot 7^{\beta_1}$$

$$y = 5^{\alpha_2} \cdot 7^{\beta_2}$$

$$y : x \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha_2 \geq \alpha_1 \\ \beta_2 \geq \beta_1 \end{cases}$$

$$\begin{array}{r} 151 \\ 76 \\ \hline 46 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 600 \\ 300 \\ \hline 300 \end{array}$$

$$5^{151} \cdot 7^{600} = 5^{\alpha_1 + \alpha_2} \cdot 7^{\beta_1 + \beta_2}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \alpha_1 + \alpha_2 = 151 \\ \beta_1 + \beta_2 = 600 \end{array} \right.$$

$$a, b \in \mathbb{N}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \alpha_2 \geq \alpha_1 \\ \beta_2 \geq \beta_1 \end{array} \right.$$

$$4 \cdot \min(a; b) = 5(a-b)$$

$$\begin{array}{r} 301 \\ 76 \\ \hline 1806 \\ 2107 \\ \hline 2287 \end{array}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \alpha_2 \geq \alpha_1 \\ \beta_2 \geq \beta_1 \end{array} \right.$$

$$5 \cdot \max(a; b) = \text{НОК}(a; b)$$

$$5b = \frac{ab}{\text{НОД}(a, b)}$$

$$5 \cdot \text{НОД}(a, b) = a$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

- | | | | | | | |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|
| <input type="checkbox"/> 1 | <input type="checkbox"/> 2 | <input type="checkbox"/> 3 | <input type="checkbox"/> 4 | <input type="checkbox"/> 5 | <input type="checkbox"/> 6 | <input type="checkbox"/> 7 |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|

СТРАНИЦА
ИЗ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$3 \log_x 27 + \log_y 3 + 8 \log_{xy} 8 = 0$$

$$9 \log_x 3 + \log_y 3 - 16 \log_{xy} 3 = 0$$

$$a = \frac{9}{\log_3 x}, b = \frac{1}{\log_3 y}, -\frac{16}{\log_x 3 + \log_y 3} = 0$$

$$\frac{9}{a} + \frac{1}{b} = \frac{16}{a+b} \quad | \cdot ab(a+b)$$

$$9ab + 9b^2 + a^2 + ab = 16ab$$

$$9b^2 + a^2 = 6ab$$

$$(3b)^2 - 3 \cdot 2ab + a^2 = 0$$

$$(3b-a)^2 = 0 \Rightarrow 3b = a$$

$$y^3 + 1 = (y+1)(y^2 - y + 1)$$

$$y^3 - 1 = (y-1)(y^2 + y + 1) \quad 2(-2 - \frac{1}{2}) = -4 - 1$$

$$2y^2 - 5y + 2 = 0 \quad | \cdot 2(y - \frac{1}{2})(y - 2)$$

$$\mathcal{D} = 25 - 4 \cdot 2 \cdot 2 = 25 - 16 = 3^2$$

$$y = \frac{5-3}{4} = \frac{1}{2}$$

$$y = \frac{5+3}{4} = 2$$

$$(y + \frac{1}{2})^2 + \dots$$

$$y^2 + y + 1 = 0 \quad | -1$$

$$\mathcal{D} = 1 - 4 < 0$$