



МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

11 КЛАСС. Вариант 12



1. [3 балла] Дан приведённый квадратный трёхчлен $f(x)$ такой, что уравнение $f(x) = -2x^2$ имеет единственное решение, а также уравнение $f(x) = -6$ имеет единственное решение. Найдите сумму корней уравнения $f(x) = 0$.
2. [3 балла] Сколькими способами можно представить число $n = 5^{151} \cdot 7^{600}$ в виде произведения двух натуральных чисел x и y , где y делится на x ?
3. [5 баллов] Найдите количество пар целых чисел $(x; y)$, удовлетворяющих системе

$$\begin{cases} 3 \log_x 27 + \log_y 3 + 8 \log_{xy} \frac{1}{9} = 0, \\ \frac{3y+3}{y-1} < \frac{7x+7}{x-1}, \\ y \leq 24. \end{cases}$$

4. [5 баллов] Найдите все пары натуральных чисел $(a; b)$ такие, что

$$\begin{cases} 4 \cdot \min(a; b) = 5(a - b)^2, \\ 5 \cdot \max(a; b) = \text{НОК}(a; b). \end{cases}$$

5. [5 баллов] На сторонах BA и BC треугольника ABC с тупым углом B как на диаметрах построены окружности ω_1 и ω_2 соответственно, пересекающиеся в точках B и D . Хорда BE окружности ω_1 перпендикулярна BC , а хорда BF окружности ω_2 перпендикулярна CE и касается ω_1 . Найдите отношение $BF : BD$, если $\cos \angle BCE = \frac{3}{4}$.
6. [5 баллов] При каких значениях параметра a система

$$\begin{cases} (y + x^2 - 4x + 1)(x^2 - 2xy + 3y^2)(y - 2x + 1) = 0, \\ y = (-2a + 4)x + a^2 - 1 \end{cases}$$

имеет ровно 2 решения?

7. [6 баллов] В прямую четырёхугольную призму $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ вписана сфера ω . Луч с началом в точке A пересекает ω в точках P и Q , а луч с началом в точке C пересекает ω в точках M и N . Пусть O — точка пересечения диагоналей четырёхугольника $ABCD$. Найдите объём призмы $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ и расстояние ρ от центра ω до плоскости PAC , если известно, что $AO = 1$, $BO = 2$, $CO = 11$, $AP = \frac{2}{\sqrt{5}}$, $AQ = 2\sqrt{5}$, $CM = 4\sqrt{5}$, $CN = 5\sqrt{5}$.



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7
☒ ☐ ☐ ☐ ☐ ☐ ☐

СТРАНИЦА
1 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

№1

$$\text{Пусть } f(x) = x^2 + ax + b$$

$$f(x) = -2x^2 \text{ имеем ед. решение:}$$

$$x^2 + ax + b = -2x^2;$$

$$3x^2 + ax + b = 0 - \text{ед. решение.}$$

Тогда дискриминант этого кв. трёхчлена равен нулю:

$$D = a^2 - 4 \cdot 3 \cdot b = 0 \Leftrightarrow a^2 = 12b \quad (1)$$

$$f(x) = -6 \text{ ед. решение:}$$

$$x^2 + ax + b = -6;$$

$$x^2 + ax + b + 6 = 0 - \text{ед. решение:}$$

$$\text{Аналогично, } D = a^2 - 4(b+6) = 0 \Leftrightarrow a^2 = 4b + 24 \quad (2)$$

$$\text{Получим: } \begin{cases} a^2 = 12b \\ a^2 = 4b + 24 \end{cases} \Rightarrow 12b = 4b + 24 \Rightarrow b = 3.$$

$$\text{Подставим } b \text{ в (1): } a^2 = 36 \Rightarrow \begin{cases} a = 6 \\ a = -6 \end{cases}$$

Подстановками $a = 6$ или $a = -6$ проверим выполнение условия.

$$1. a = 6, b = 3; f(x) = x^2 + 6x + 3$$

$$1) 3x^2 + 6x + 3 = 0 \Leftrightarrow x^2 + 2x + 1 = 0 \Leftrightarrow (x+1)^2 = 0$$

$x = -1$ — ед. решение.



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.



СТРАНИЦА

2 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$2) x^2 + 6x + 9 = 0 \Leftrightarrow (x+3)^2 = 0 \rightarrow x = -3 \text{ - ед. решение}$$

Сумма корней по теореме Виета ур-я $f(x) = 0$
по теореме Виетта равна $-a$: -6

Проверим, что корни есть:

$$D = 6^2 - 4 \cdot 3 = 36 - 12 > 0 \text{ - действ., два корня.}$$

$$2. a = -6, b = 3; f(x) = x^2 - 6x + 3 \rightarrow D = 36 - 4 \cdot 3 > 0$$

$\uparrow$ два корня

$$1) 3x^2 - 6x + 3 = 0 \Leftrightarrow x^2 - 2x + 1 = 0$$

$$(x-1)^2 = 0 \rightarrow x = 1 \text{ ед. корень}$$

$$2) x^2 - 6x + 9 = 0 \Leftrightarrow (x-3)^2 = 0 \rightarrow x = 3 \text{ ед. корень}$$

Аналогично 1., сумма корней $-a$: 6

Оба трёхзначна подходят.

Ответ: 6 или -6 .



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1	2	3	4	5	6	7
☐	☒	☐	☐	☐	☐	☐

СТРАНИЦА
1 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

N2

$$n = 5^{151} \cdot 7^{600} = x \cdot y \quad (x, y \in \mathbb{N}) ; y : x$$

П.к. x и y — натур., то ясно, что в разложении на простые множители x и y содержат только 5 и 7 в каких-то степенях (возможно, нулевых)

Пусть $x = 5^{d_1} \cdot 7^{\beta_1} \quad (d_1, d_2, \beta_1, \beta_2 \in \mathbb{N} \cup \{0\})$

$$y = 5^{d_2} \cdot 7^{\beta_2}$$

$$y : x \Leftrightarrow \begin{cases} y : 5^{d_1} \\ y : 7^{\beta_1} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 5^{d_2} \cdot 7^{\beta_2} : 5^{d_1} \\ 5^{d_2} \cdot 7^{\beta_2} : 7^{\beta_1} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} d_2 \geq d_1 \\ \beta_2 \geq \beta_1 \end{cases}$$

м.к. (5, 7) = 1

$$n = 5^{151} \cdot 7^{600} = 5^{d_1} \cdot 7^{\beta_1} \cdot 5^{d_2} \cdot 7^{\beta_2} = 5^{d_1+d_2} \cdot 7^{\beta_1+\beta_2}$$

$$\begin{cases} d_1+d_2 = 151 \\ \beta_1+\beta_2 = 600 \end{cases}$$

По отдельности разберёмся с показателями d и β .

$$1. \begin{cases} d_1+d_2 = 151 \\ d_2 \geq d_1 \end{cases}$$

— Найти кол-во решений в натуральных числах.

$$d_1 = 151 - d_2$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1
☐

2
☒

3
☐

4
☐

5
☐

6
☐

7
☐

СТРАНИЦА
2 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$d_2 \geq 151 - d_2 \Leftrightarrow d_2 \geq \frac{151}{2} = 75,5 \Rightarrow d_2 \geq 76$$

Для каждого $d_2 \geq 76 \Leftrightarrow d_2 \in \{76, 77, \dots, 151\}$ однозначно восстанавливается $d_1 = 151 - d_2$, причем вып. условие, что $d_2 \geq d_1$.

Число ин-ве $\{76, \dots, 151\}$ равно 76

Итого 76 решений системы.

$$2. \begin{cases} \beta_1 + \beta_2 = 600 \\ \beta_2 \geq \beta_1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \beta_1 = 600 - \beta_2 \\ \beta_2 \geq \beta_1 \end{cases}$$

$$\beta_2 \geq 600 - \beta_2 \Leftrightarrow \beta_2 \geq 300$$

$$\beta_2 = 600 - \beta_1 \leq 600$$

И.е. $\beta_2 \in \{300, 301, \dots, 600\}$ — 301 число

Для каждого β_2 однозначно вост. $\beta_1 = 600 - \beta_2$, причем выполняется кер-во. Итого 301 решение системы. Решения каждой из систем выбираются независимо, поэтому общее число решений есть

$$76 \cdot 301 = 22876$$

Ответ: 22876 способов.



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

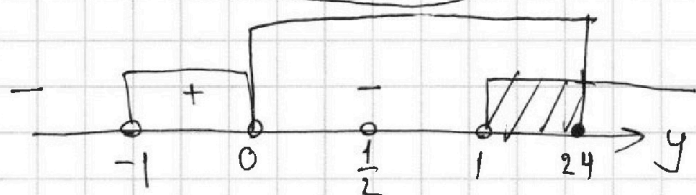
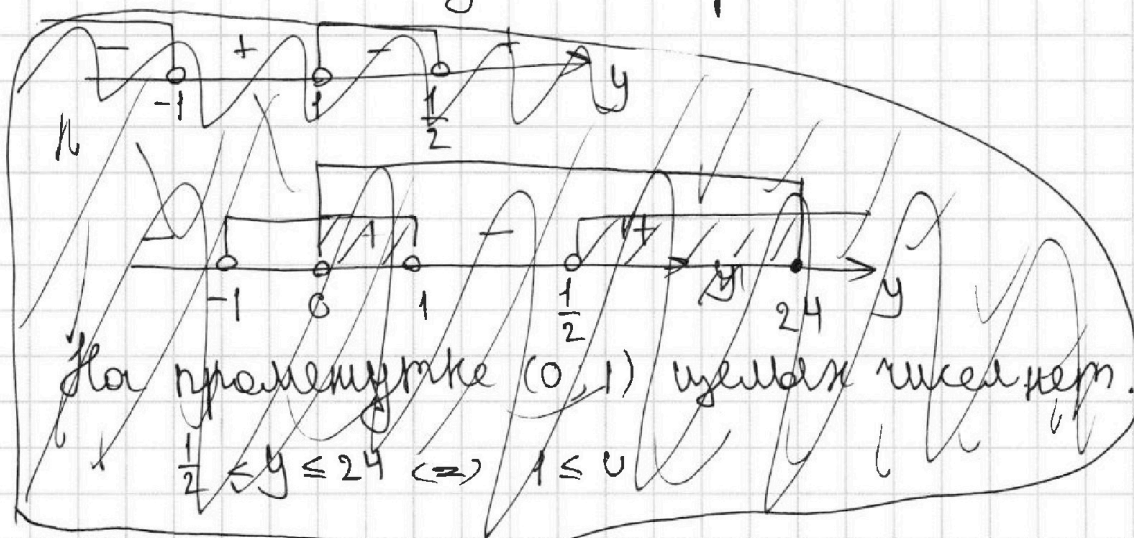
1 ☐ 2 ☐ 3 ☒ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА
3 из 3

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\frac{(y+1)(y-\frac{1}{2})(y-2)}{(y-1)(y^2+y+1)} > 0 \quad | \cdot (y^2+y+1) > 0$$
$$\frac{(y+1)(y-\frac{1}{2})}{(y-1)} > 0$$
$$D = 1 - 4 = -3 < 0$$

Решим методом интервалов.



Получим, что $1 < y \leq 24$
 $\begin{cases} y^3 = x \end{cases}$

Числа на промежутке $(1; 24]$, являющиеся кубами:
 $y = 8 \Rightarrow x = 2$ — одно решение.

Ответ: $x = 2; y = 8$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1
☐

2
☐

3
☒

4
☐

5
☐

6
☐

7
☐

СТРАНИЦА
2 из 3

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Итак, система равносильна след.:

$$\begin{cases} y^3 = x \\ x, y > 0; x, y, xy \neq 1 \\ 3 \frac{y+1}{y-1} \leq 7 \frac{x+1}{x-1} \quad (2) \\ y \leq 24 \end{cases}$$

! П.к. x и y целые,
то $xy \neq 1$ — лишнее
условие наряду с $x, y \neq 1$

Подставим $y^3 = x$ в (2):

$$3 \frac{y+1}{y-1} \leq 7 \frac{y^3+1}{y^3-1}$$

$$\frac{y+1}{y^3-1} = \frac{(y+1)(y^2-y+1)}{(y-1)(y^2+y+1)}$$

$$\frac{3(y+1)}{y-1} - \frac{7(y^3+1)}{(y-1)(y^2+y+1)} \leq 0$$

$$\frac{3y(y+1)(y^2+y+1) - 7(y+1)(y^2-y+1)}{(y-1)(y^2+y+1)} \leq 0$$

$$\frac{(y+1)(3y^2+3y+3-7y^2+7y-7)}{(y-1)(y^2+y+1)} \leq 0$$

$$\frac{(y+1)(-4y^2+10y-4)}{(y-1)(y^2+y+1)} \leq 0 \quad | : -2$$

$$\frac{(y+1)(2y^2-5y+2)}{(y-1)(y^2+y+1)} \geq 0 \quad | : 2$$

$$2y^2-5y+2 = 2(y-\frac{1}{2})(y-2)$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

1 2 3 4 5 6 7
☐ ☐ ☒ ☐ ☐ ☐ ☐

СТРАНИЦА
 1 из 3

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

№3

$$\begin{cases} 3 \log_x 27 + \log_y 3 + 8 \log_{xy} \frac{1}{9} = 0 & (1) \\ \frac{3y+3}{y-1} < \frac{7x+7}{x-1} \\ y \leq 24 \end{cases}$$

ОДЗ: $\begin{cases} x > 0, x \neq 1 \\ y > 0, y \neq 1 \\ xy > 0, xy \neq 1 \end{cases}$

Поработаем с ур. (1) симметрично:

$$3 \log_x 3^3 + \log_y 3 + 8 \log_{xy} 3^{-2} = 0$$

$$9 \log_x 3 + \log_y 3 - 16 \log_{xy} 3 = 0$$

Пусть $\log_3 x = a, a \neq 0, \log_3 y = b, b \neq 0$ Также $a+b \neq 0$, т.к. $xy \neq 1$

$$\frac{9}{\log_3 x} + \frac{1}{\log_3 y} - \frac{16}{\log_3 x + \log_3 y} = 0$$

$$\frac{9}{a} + \frac{1}{b} = \frac{16}{a+b} \quad | \cdot ab(a+b) \neq 0$$

$$9ab + 9b^2 + a^2 + ab = 16ab$$

$$9b^2 - 6ab + a^2 = 0$$

$$(3b - a)^2 = 0$$

$$3b = a. \Leftrightarrow 3 \log_3 y = \log_3 x \Leftrightarrow y^3 = x$$

+ ОДЗ выписано.



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7
☐ ☐ ☐ ☒ ☐ ☐ ☐

СТРАНИЦА
1 из 3

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\sqrt{4} \begin{cases} 4 \cdot \min(a; b) = 5(a-b)^2 & a, b \in \mathbb{N} \\ 5 \cdot \max(a; b) = \text{НОК}(a; b) \end{cases}$$

Заметим, что от перестановки a и b местами система не меняется, поэтому без сср. безубытки $a \leq b$.

1) $a = b$: $4a = 0 \Rightarrow a = 0 \notin \mathbb{N}$

2) $a < b$:

$$\begin{cases} 4a = 5(a-b)^2 & (1) \\ 5b = \text{НОК}(a; b) & (2) \end{cases}$$

Пусть $a = x \cdot d$, $b = y \cdot d$, где $d = \text{НОД}(a; b)$ и $(x; y) = 1$.

Воспользуемся тождеством:

$$\text{НОД}(a; b) \cdot \text{НОК}(a; b) = ab \Rightarrow \text{НОК}(a; b) = \frac{ab}{\text{НОД}(a; b)}$$

$$(2): 5b = \frac{ab}{\text{НОД}(a; b)} \Leftrightarrow 5d = x \cdot d \Rightarrow x = 5$$
$$a = 5d$$

$$(1): 4 \cdot 5d = 5(5d - yd)^2 \quad | :5$$

$$4d = d^2(5-y)^2 \quad | :d$$

$$4 = d(5-y)^2 \quad \Leftrightarrow (2-d(5-y))(2+d(5-y)) = 0$$

$$2 = d(5-y) \quad \Leftrightarrow 2 : d$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☒ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА
2 из 3

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Разберём два случая:

1) $d = 1$:

$$2 = 5 - y \Rightarrow y = 3 \Rightarrow \begin{matrix} a = 5 \\ b = 3 \end{matrix}$$

Проверкой убеждаемся, что пара подходит.

2) $d = 2$:

$$1 = 5 - y \Rightarrow y = 4 \Rightarrow \begin{matrix} a = 10 \\ b = 208 \end{matrix}$$

* Проверка:

$$4 \cdot 10 = 5(10 - 8)^2$$

$$40 = 5 \cdot 4 = 20$$

$40 \neq 20$ — не подходит

Вернёмся к $4 = d^2(5 - y)$

$$\begin{cases} 2 = d(5 - y) (*) \\ 2 = d(y - 5) (**) \end{cases}$$

(*) $2 : d \Rightarrow d = 1$ или $d = 2$

$$d = 1: 2 = 5 - y \Rightarrow y = 3 \Rightarrow \begin{matrix} a = 5 \\ b = 3 \end{matrix} \rightarrow a > b$$

Проверкой убеждаемся, что пара подходит.

$$d = 2: 1 = 5 - y \Rightarrow y = 4 \Rightarrow \begin{matrix} a = 10 \\ b = 8 \end{matrix}$$

Проверка:



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

☐☐☐☒☐☐☐

СТРАНИЦА
3 из 3

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$d=2: 1=5-y \Rightarrow y=4 \Rightarrow \begin{matrix} a=10 \\ b=8 \end{matrix} \rightarrow a > b$$

↑
не подходит.

(**) Аналогично $d=1$ или $d=2$

$$d=1: 2=y-5 \Rightarrow y=7 \Rightarrow \begin{matrix} a=5 \\ b=7 \end{matrix}$$

Проверкой убеждаемся, что пара подходит

$$d=2: 1=y-5 \Rightarrow y=6 \Rightarrow \begin{matrix} a=10 \\ b=12 \end{matrix}$$

$$\text{Проверка: } 4 \cdot 10 \neq 5(10-12)^2$$

$$40 \neq 5 \cdot 4 = 20$$

$40 \neq 20$ - не подходит

Ответ: (5; 7).



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1
☐

2
☐

3
☐

4
☐

5
☒

6
☐

7
☐

СТРАНИЦА
4 из 4

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\sin \angle B_1 B C_2 = \sin(180 - \alpha) = \sin \alpha = \sqrt{1 - \frac{9}{16}} = \frac{\sqrt{7}}{4}$$

$$\frac{\sqrt{43} \cdot x}{3} \cdot BH = \frac{2 \cdot 8 \cdot x \cdot \sqrt{7}}{3 \cdot 4}$$

$$BH = \frac{2 \cdot \sqrt{7} \cdot 2x}{\sqrt{43} \cdot 3} = 2 \sqrt{\frac{7}{43}} x$$

$$BD = 2 \cdot BH$$

$\triangle BFD \sim \triangle BCF$ по т. Пифагора:

$$BF = \sqrt{16x^2 - 9x^2} = x\sqrt{7}$$

$$\frac{BF}{BD} = \frac{x\sqrt{7}}{4 \sqrt{\frac{7}{43}} x} = \frac{\sqrt{43}}{4}$$

$$\text{Ответ: } \frac{\sqrt{43}}{4}.$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1
☐

2
☐

3
☐

4
☐

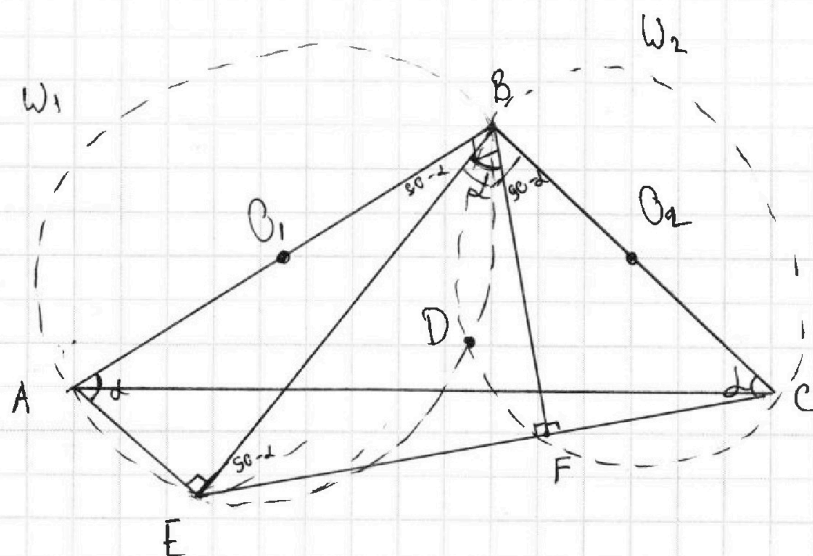
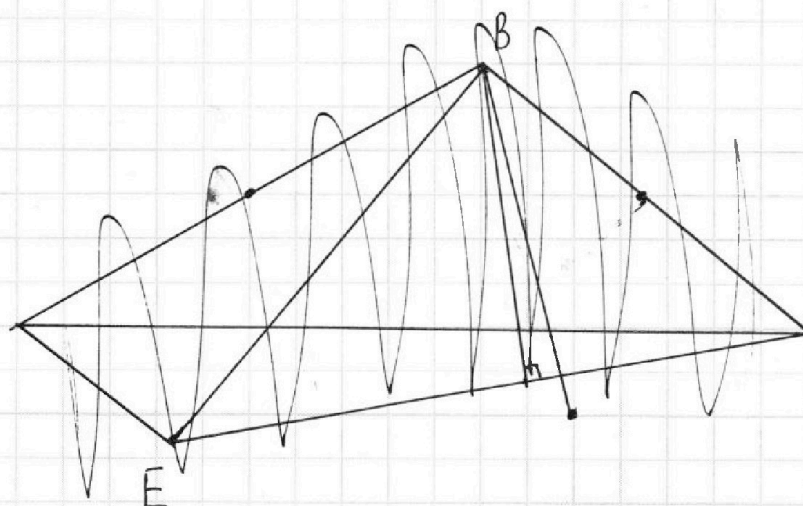
5
☒

6
☐

7
☐

СТРАНИЦА
1 из 4

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



Впустили перпендикуляр BF' на CE . $\angle BF'C = 90^\circ$
 $\Rightarrow F'$ ~~и~~ лежит на окружности с диаметром BC
 $\Rightarrow F' = F$
 $\angle AEB = 90^\circ$, т.к. AB — диаметр ω_1 , $\angle EBC = 90^\circ$

На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☒ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА
3 из 4

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



$$\frac{9}{16} + 1 = 3 \left(\frac{X}{AB} \right)^2$$

$$\frac{25}{16 \cdot 3} = \frac{X^2}{AB^2} \Rightarrow AB = \sqrt{\frac{16 \cdot X^2}{25 \cdot 3}} = \frac{4X}{5\sqrt{3}} = \frac{4\sqrt{3}X}{15}$$

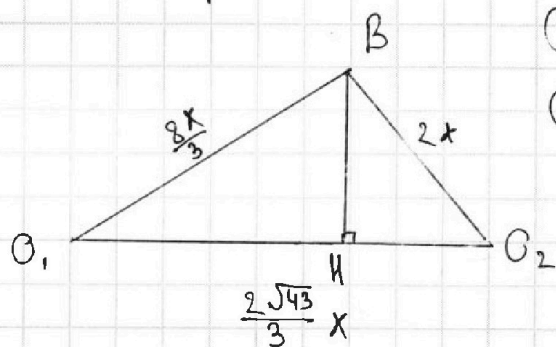
Пусть O_1 и O_2 — центры окружностей W_1 и W_2 соответственно. Тогда O_1 и O_2 — середины AB и BC соответственно.

По теореме косинусов в $\triangle ABC$ найдём AC :

$$\begin{aligned} AC &= \sqrt{AB^2 + BC^2 - 2 \cdot AB \cdot BC \cdot \cos(180^\circ - \alpha)} = \\ &= \sqrt{\frac{16}{9}X^2 + 16X^2 + 2 \cdot \frac{16}{3} \cdot 4 \cdot X^2 \cos \alpha} = \\ &= X \sqrt{\frac{256}{9} + 16 + \frac{32 \cdot 128}{3} \cdot \frac{1}{4}} = \\ &= X \sqrt{\frac{256 + 16 \cdot 9 + 32 \cdot 9}{9}} = X \sqrt{\frac{16 \cdot 16 + 16 \cdot 9 + 16 \cdot 18}{9}} = \\ &= \frac{4X}{3} \sqrt{16 + 9 + 18} = \frac{4\sqrt{43}X}{3} \end{aligned}$$

$$O_1O_2 - \text{ср. линия } \triangle ABC \Rightarrow O_1O_2 = \frac{1}{2} AC = \frac{2\sqrt{43}}{3} X$$

Рассмотрим $\triangle BO_2O_1$. Известно, что $O_1O_2 \perp BD$ и O_1O_2 пересекает BD в середине — в точке H .



$$O_1B = \frac{1}{2} AB = \frac{8X}{3}$$

$$O_2B = \frac{1}{2} BC = 2X$$

Площадь $\triangle BO_1O_2$:

$$S = \frac{\sqrt{43}}{3} X \cdot BH = \frac{8X^2}{3} \cdot \sin \angle O_1BO_2$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☒ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА
2 из 4

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Заметим, что отсюда следует $AE \parallel BC$

BF — касательная к ω . По теореме об угле между касательной и секущей $\angle ABF$ равен половине дуги AB . $\Rightarrow \angle ABF = 90^\circ$

$AB \perp BF, CE \perp BF \Rightarrow AB \parallel CE$. Тогда $ABCE$ — параллелограмм. $\Rightarrow AE = BC, AB = EC$.

Пусть $\angle BCF = \alpha \Rightarrow \angle CBF = 90 - \alpha$.

$\angle EBC = 90^\circ \Rightarrow \angle EBF = \alpha, \angle BFE = 90 - \alpha$

$\angle ABF = 90^\circ \Rightarrow \angle ABE = 90 - \alpha, \angle BAE = \alpha$

Из $\triangle BFC$ $\cos \angle BCF = \cos \angle BCF = \frac{CF}{BC} = \frac{3}{4}$

Пусть $CF = 3x, BC = 4x$

Из $\triangle BEC$ $\cos \alpha = \frac{BC}{EC} = \frac{4x}{EC} = \frac{3}{4} \Rightarrow EC = \frac{16x}{3} = AB$

$\Rightarrow EF = EC - CF = \frac{16x}{3} - 3x = \frac{7x}{3}$

Из $\triangle BEF$ $\cos \alpha = \frac{BF}{BE}$

По т. Пифагора из $\triangle BEC$: $BE = \sqrt{x^2 \left(\frac{16^2}{9} - 16 \right)} =$
 $= x \sqrt{\frac{16 \cdot 16 - 16 \cdot 9}{9}} = \frac{x}{3} \sqrt{16 \cdot 7} = \frac{4\sqrt{7}}{3} x$

Из $\triangle BEF$ $\cos \alpha = \frac{BF}{BE} = \frac{BF}{\frac{4\sqrt{7}}{3} x} = \frac{3}{4} \Rightarrow BF = \sqrt{3} x$

Из $\triangle AEB$ $\cos \alpha = \frac{AE}{AB} = \frac{3}{4}$ а также $AE^2 + AB^2 = 3x^2 \quad | : AB^2$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.



СТРАНИЦА
1 из 5

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\begin{cases} (y+x^2-4x+1)(x^2-2xy+3y^2)(y-2x+1)=0 \\ y=(-2a+4)x+a^2-1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y = -(x-2)^2 + 3 \\ (x-y)^2 + 2y^2 = 0 \\ y = 2x-1 \\ y = -2(a-2)x + a^2 - 1 \end{cases} \quad \text{— равно два решения?}$$

Решим задачу графически:

1) $y = -(x-2)^2 + 3$ — парабола, ветви вниз, координата вершины — $(2; 3)$

2) $(x-y)^2 + 2y^2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x=y \\ 2y=0 \end{cases} \Leftrightarrow x=y=0$
Это есть точка $A(0; 0)$

3) $y = 2x-1$ — прямая.

4) $y = -2(a-2)x + a^2 - 1$ — семейство прямых.

График:

Заметим что графики $y = -(x-2)^2 + 3$ и $y = 2x-1$ имеют две общие точки: $(2; 3)$ и $(0; -1)$
B A



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1
☐

2
☐

3
☐

4
☐

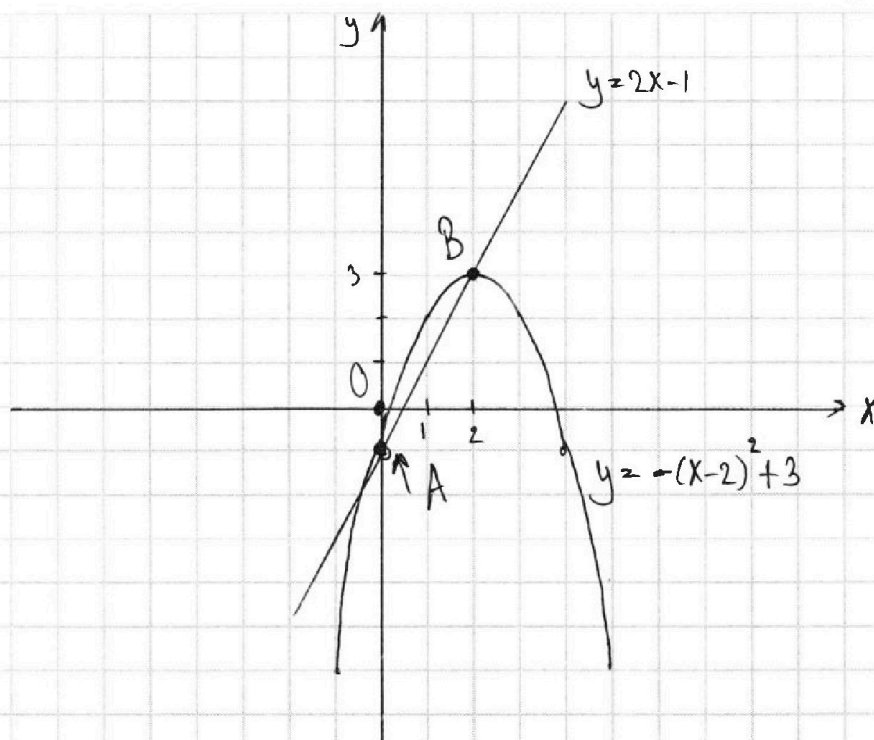
5
☐

6
☒

7
☐

СТРАНИЦА
2 из 5

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



Может 1) $y = (-2a+4)x + a^2 - 1$ параллельна $y = 2x - 1$
 $\Leftrightarrow -2a+4=2 \Leftrightarrow a=1$

$y = 2x$ — проходит через $B(0;0)$ — тоже реш.
Далее найдем решения $2x = -x^2 + 4x - 1$

$$x^2 - 2x + 1 = 0$$

$$(x-1)^2 = 0 \rightarrow x=1 - 2\text{-е решение.}$$

$y = 2x$ не пересекает $y = 2x - 1$

$a=1$ — подходит

2) $y = (-2a+4)x + a^2 - 1$ не параллельна $y = 2x - 1$

$\Rightarrow$ пересекает прямую $2x - 1$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.



СТРАНИЦА
3 из 5

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Значит прямая $y = (-2a+4)x + a^2 - 1$ с состав-
ленным графиком (точка O и парабола) при $a \neq 1$
должна иметь одну общую точку, отличную
1) y проходит через $O(0;0)$: ^{от первой (пересечение с $y=2x-1$)}

$$0 = a^2 - 1 \Rightarrow a = \pm 1 \Rightarrow a = -1$$

(a ≠ 1)

Проверим, нет ли пересечения с параболой:

$$\begin{cases} y = 6x \\ y = -x^2 + 4x - 1 \end{cases}$$

$$y = -x^2 + 4x - 1$$

$$-x^2 + 4x - 1 = 6x$$

$$x^2 + 2x + 1 = 0$$

$$(x+1)^2 = 0$$

$$x = -1 \text{ — пересечение с параболой}$$

в точке, отличной от A и B — ~~од~~ общие
точек $y = -x^2 + 4x - 1$ и $y = 2x - 1$.

При решении $\Rightarrow a \neq -1$

2) y не проходит через $O(0;0)$.

Тогда y и парабола имеют ровно одну
общую точку, отличную от ~~дв~~ точки пересе-
чения с $y = 2x - 1$.

Это означает, что $y = (-2a+4)x + a^2 - 1$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☒ 7 ☐

СТРАНИЦА
4 из 5

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

является касательной к графику параболы.
Подметим, что если касание происходит в одной из точек А или В, то у системы одно решение. Исключим эти случаи (эти а).
Касание в точке В:

$$y = (-2a+4)x + a^2 - 1 \text{ параллельна } y \text{ совпадает}$$
$$c y = 3 \Leftrightarrow \begin{cases} -2a+4=0 \\ a^2-1=3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=2 \\ a=\pm 2 \end{cases} \Rightarrow a=2$$

Касание в точке А:

$$\begin{cases} (-2a+4)x + a^2 - 1 = -x^2 + 4x - 1 & \text{— ед. решение} \\ A(0; -1): -1 = a^2 - 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a=0 \\ 4x-1 = -x^2+4x-1 \end{cases}$$

$$x^2 = 0 \Rightarrow x = 0 \text{ — действ. ед. решение}$$

Значит не подходят $a = 2$ и $a = 0$

В остальных случаях необходимо и достаточно:
 $\begin{cases} (-2a+4)x + a^2 - 1 = -x^2 + 4x - 1 & \text{— ед. решение} \\ a \notin \{0; 2; 1; -1\} \end{cases}$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1
☐

2
☐

3
☐

4
☐

5
☐

6
☒

7
☐

СТРАНИЦА
5 из 5

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$x^2 - 2ax + a^2 = 0 \text{ - ед. решение } (\Leftrightarrow) D = 0$$

$$D = 4a^2 - 4a^2 = 0 \text{ - верно } \forall a$$

Итого подходит $a \neq 0; 1; 2; -1$ или $a = 1$

Ответ: $a \neq 0; 2; -1$.

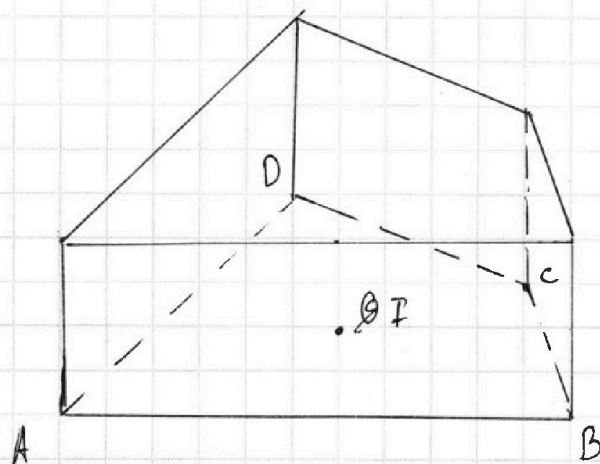


На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☒

СТРАНИЦА
1 из 4

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



Если сфера вписана в призму, то основание такой призмы – вписанный четырехугольник.

Высота призмы – две радиуса сферы.

Пусть сфера касается основания в точке O .

Тогда AO и BO – касательные к сфере.

Проведем сечения $APQO$ и $CMNO$. Они пересекают ω в две окружности. Применить

Посчитаем в обоих случаях степени точек A и C :

$$1) AO^2 = AP \cdot AQ = \frac{2}{5} \cdot 25 = 4 \Rightarrow AO = 2$$

$$2) CO^2 = CM \cdot CN = 45 \cdot 55 = 4 \cdot 5 \cdot 5 = 10^2 \Rightarrow CO = 10$$

Спроецируем ω на $пл-ть ABC$.



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1
☐

2
☐

3
☐

4
☐

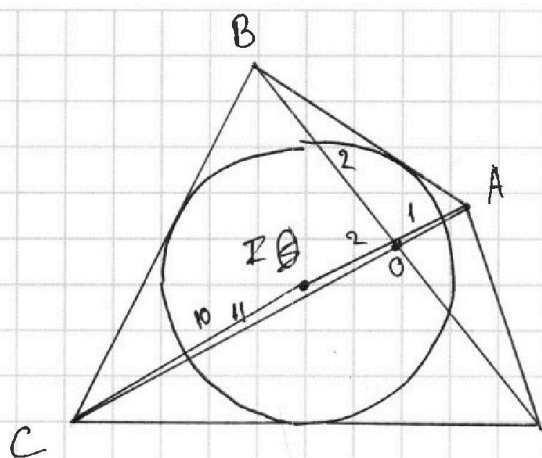
5
☐

6
☐

7
☒

СТРАНИЦА
2 из 4

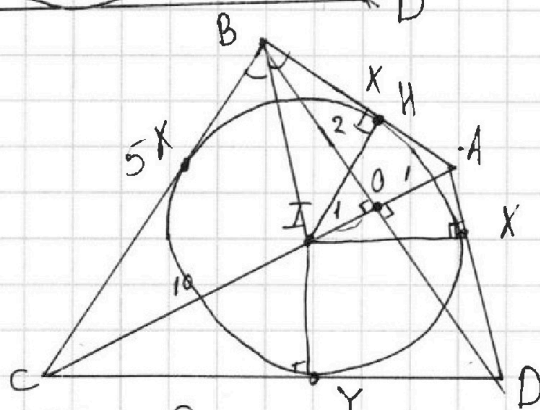
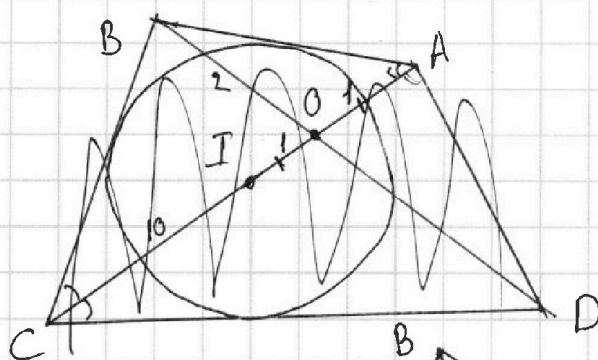
Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



$$AO=1, CO=11, AO+CO=12$$

$$AI=2, CI=10, AI+CI=12$$

$AO+CO=AI+CI \Rightarrow$ точка I лежит на AC.



Рассм. $\triangle ABC$: BI - биссектриса.

По свойству биссектрисы : $\frac{BC}{AI} = \frac{BC}{AB} = \frac{10}{2} = \frac{5}{1}$

Пусть $BC=5X, AB=X$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☒

СТРАНИЦА
3 из 4

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

По формуле длины биссектрисы:

$$BI = \sqrt{5x^2 - 10 \cdot 2} = \sqrt{5(x^2 - 4)}$$

В $\triangle BIA$ BC - медиана.

По формуле длины медианы:

$$BO^2 = \frac{BI^2 + BA^2}{2} - \frac{AI^2}{4}$$

$$4 = \frac{5x^2 - 20 + x^2}{2} - 1$$

$$10 = 6x^2 - 20$$

$$BI = \sqrt{5(5-4)} = \sqrt{5}$$

$$6x^2 = 30 \Rightarrow x^2 = \frac{30}{6} = 5, x = \sqrt{5}$$

Вспустим высоту IK в этот $\triangle$, IK - радиус

У. $S_{BIA} = AB \cdot IK \cdot \frac{1}{2}$

Заметим, что $BI = AB = \sqrt{5} \Rightarrow BC \perp AI$

$$S_{BIA} = AB \cdot IK \cdot \frac{1}{2} = BO \cdot BC \cdot OF$$

$$\frac{\sqrt{5}}{2} IK = 2 \Rightarrow IK = \frac{4}{\sqrt{5}} - \text{радиус}$$

$$S_{ABCD} = p \cdot r = \frac{AB+BC+CD+DA}{2} \cdot \frac{4}{\sqrt{5}} = (AB+BC) \cdot \frac{4}{\sqrt{5}} = 6\sqrt{5} \cdot \frac{4}{\sqrt{5}} = 24$$

$$AB+BC+AB+CD = AD+BC,$$

т.к. $ABCD$ описанный.



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1
☐

2
☐

3
☐

4
☐

5
☐

6
☐

7
☒

СТРАНИЦА
4 из 4

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Аналогично в $\triangle ADC$:

$$DI = \sqrt{5y^2 - 20}, \text{ где } AD = y, CD = 5y$$

IX и IY - высоты из I на AD и DC .

$$CY = \sqrt{100 - \frac{16}{25}} = \sqrt{\frac{2500 - 16}{100}} = \frac{\sqrt{2484}}{100/10}$$

Далее ~~каждое~~ ~~каждитие~~ и ~~десчитывается~~ площадь $ABCD$ по формуле $S = p \cdot \frac{4}{\sqrt{5}}$, где

p - полупериметр

$$V = S \cdot h = \frac{4}{\sqrt{5}} \cdot 2 \cdot \frac{4}{\sqrt{5}} \cdot S = \frac{32}{5} S$$

$$\text{Ответ: } p = 8 \frac{4}{\sqrt{5}}, V = \frac{32}{5} S.$$

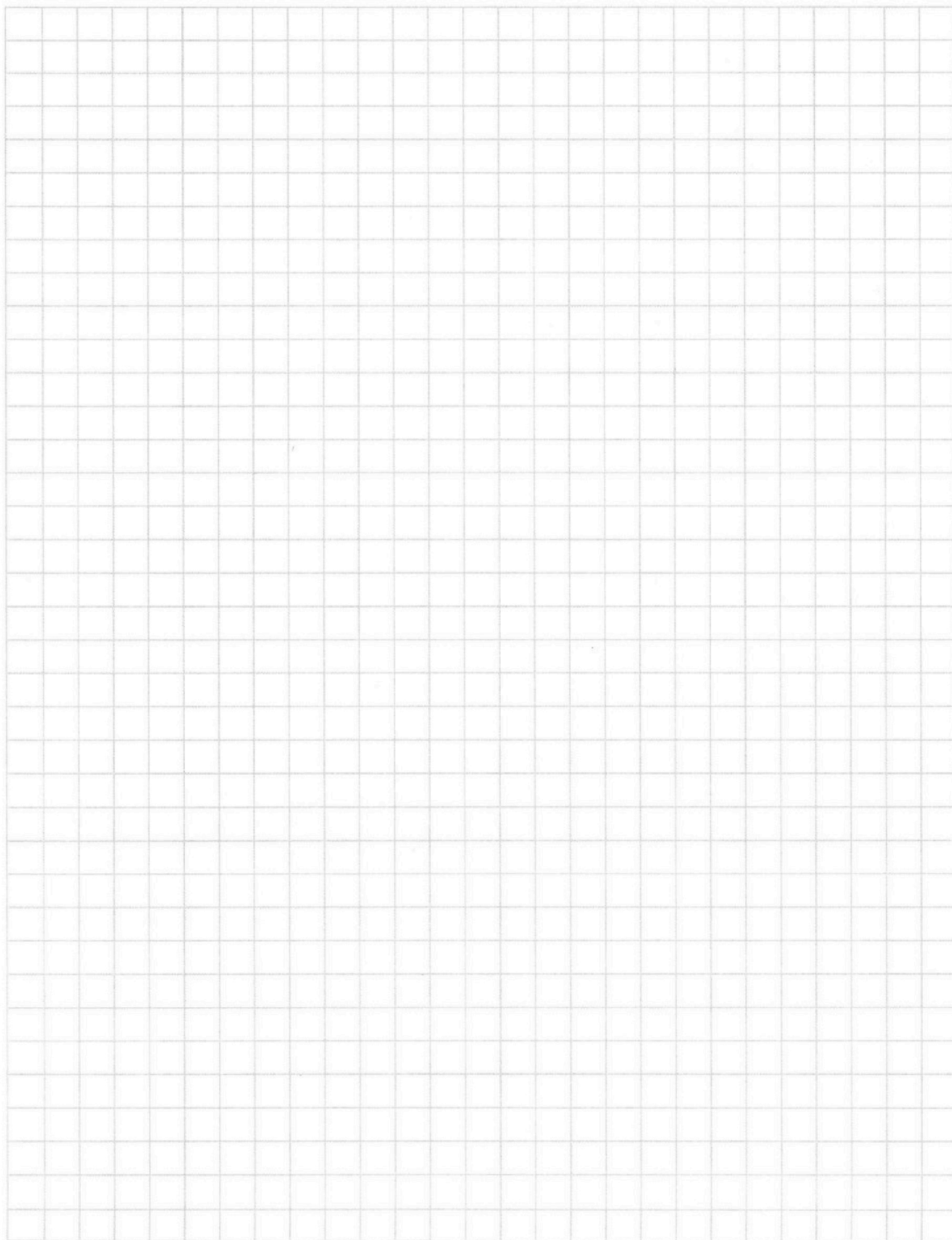


На одной странице можно оформлять **только одну задачу**. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. **Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно**. Порча QR-кода недопустима!



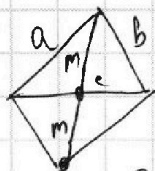


На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

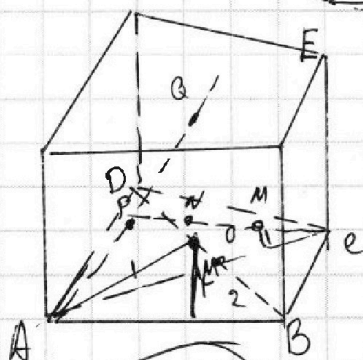
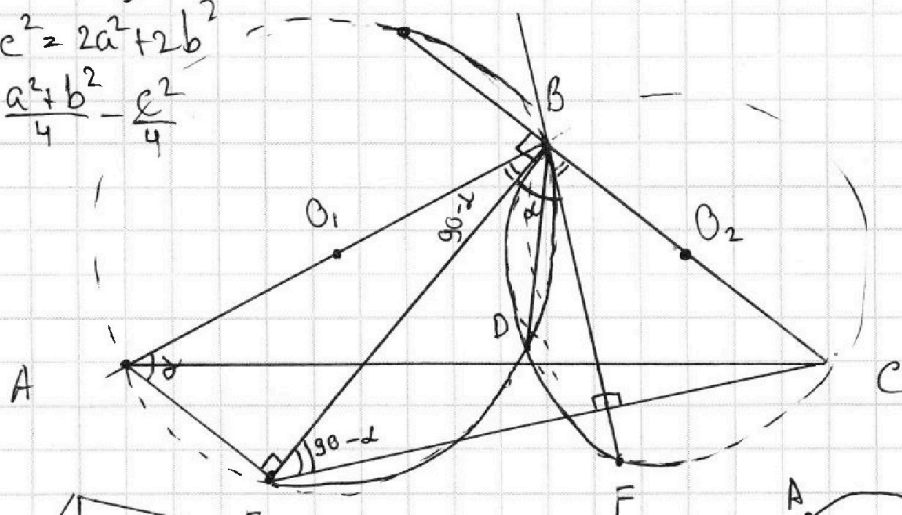


$$\cos \angle BCB = \frac{3}{4}$$

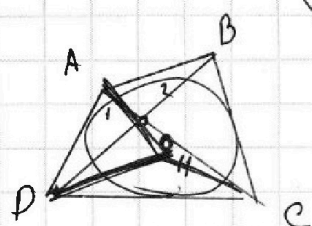
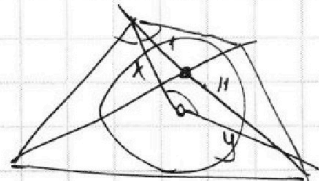
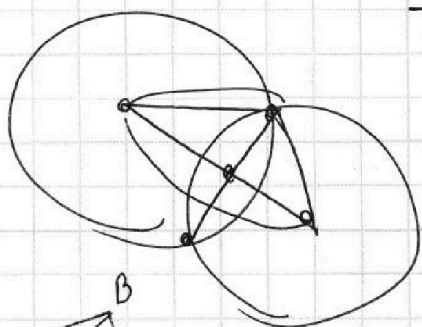
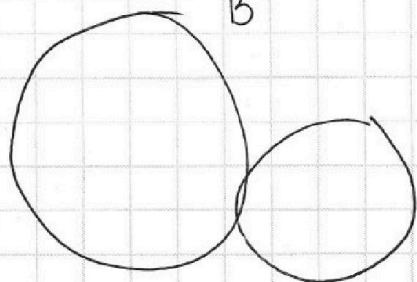
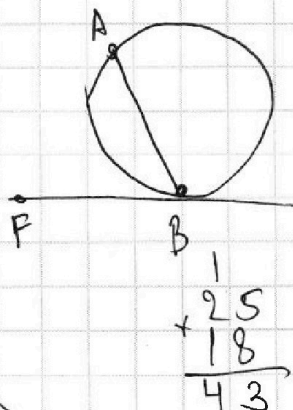
$$BF:BD = ?$$

$$4m^2 + c^2 = 2a^2 + 2b^2$$

$$m^2 = \frac{a^2 + b^2}{4} - \frac{c^2}{4}$$



$$\begin{array}{r} 3 \\ \times 16 \\ \hline 48 \\ 16 \\ \hline 96 \\ 16 \\ \hline 256 \end{array}$$



$$AO^2 = AP \cdot AQ$$

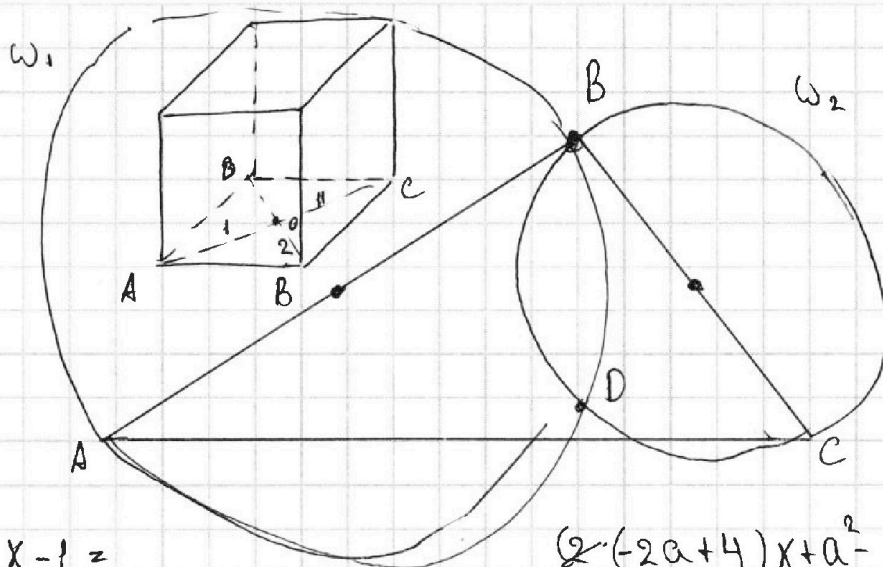


На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

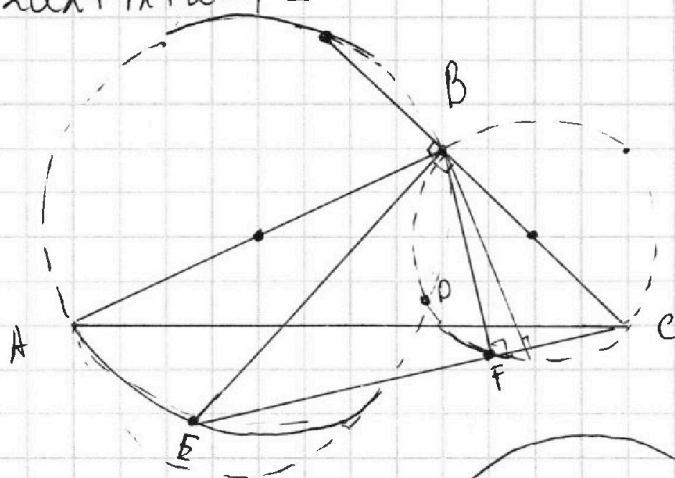


$$-x^2 + 4x - 1 =$$

$$(2 \cdot (-2a + 4)x + a^2 - 1) =$$

$$= -(x^2 - 4x + 1) = -((x - 2)^2 - 3) = -2(a - 2)x + (a - 1)(a + 1)$$

$$-2ax + 4x + a^2 - 1 =$$



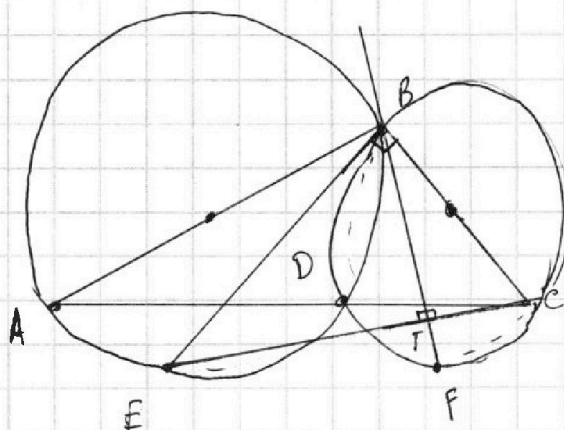
$$\cos \angle BCE = \frac{CE}{BE}$$

$$-2a + 4 = 2$$

$$a^2 - 1 = 1 \rightarrow \text{нет р-м.}$$

$$-2a + 4 = 2$$

$$-2a = -2 \quad a = 1$$





На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7
☐ ☐ ☐ ☐ ☐ ☐ ☐

СТРАНИЦА
 _ ИЗ _

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

✓1

$$f(x) = x^2 + px + q$$

$$3x^2 + px + q = 0$$

$$x^2 + px + q + 6 = 0$$

$$D_1 = p^2 - 4 \cdot 3 \cdot q = 0 \Leftrightarrow p^2 = 12q$$

$$D_2 = p^2 - 4(q + 6) = 0 \Leftrightarrow p^2 = 4q + 24$$

$$12q$$

$$12q = 4q + 24$$

$$8q = 24$$

$$q = \frac{24}{8} = 3$$

✓2

$$n = 5^{151} \cdot 7^{600} = x \cdot y, \text{ где } y \vdots x$$

$$x = 5^{\alpha_1} \cdot 7^{\beta_1}$$

$$y = 5^{\alpha_2} \cdot 7^{\beta_2}$$

$$y \vdots x \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha_2 \geq \alpha_1 \\ \beta_2 \geq \beta_1 \end{cases}$$

$$5^{151} \cdot 7^{600} = 5^{\alpha_1 + \alpha_2} \cdot 7^{\beta_1 + \beta_2}$$

$\Uparrow$

$$\alpha_1 + \alpha_2 = 151$$

$$\beta_1 + \beta_2 = 600$$

$$\alpha_2 \geq \alpha_1$$

$$\beta_2 \geq \beta_1$$

$$a, b \in \mathbb{N}$$

$$4 \cdot \min(a; b) = 5(a - b)$$

$$5 \cdot \max(a; b) = \text{НОК}(a; b)$$

$$5b = \frac{ab}{\text{НОД}(a; b)}$$

$$5 \cdot \text{НОД} = a$$

нwnbo

$$\begin{array}{r} 152 \\ - 76 \\ \hline 76 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 600 \\ - 300 \\ \hline 300 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} \times 301 \\ 76 \\ \hline 1806 \\ 2109 \\ \hline 22876 \end{array}$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении **каждой** задачи отдельно.

1
☐

2
☐

3
☐

4
☐

5
☐

6
☐

7
☐

СТРАНИЦА
__ из __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$3 \log_x 2^3 + \log_y 3 + 8 \log_{xy} \frac{1}{8} = 0$$

$$9 \log_x 3 + \log_y 3 - 16 \log_{xy} 3 = 0$$

$$a = \frac{9}{\log_3 x} + \frac{1}{\log_3 y} - \frac{16}{\log_3 x + \log_3 y} = 0$$

$$\frac{9}{a} + \frac{1}{b} = \frac{16}{a+b} \quad | \cdot ab(ab)$$

$$9ab + gb^2 + a^2 + ab = 16ab$$

$$9b^2 + a^2 = 6ab$$

$$(3b)^2 - 3 \cdot 2ab + a^2 = 0$$

$$(3b - a)^2 = 0 \Leftrightarrow 3b = a$$

$$y^3 + 1 = (y + 1)(y^2 - y + 1)$$

$$y^3 - 1 = (y - 1)(y^2 + y + 1) \quad 2(-2 - \frac{1}{2}) = -4 - 1$$

$$2y^2 - 5y + 2 = 0 = 2(y - \frac{1}{2})(y - 2)$$

$$D = 25 - 4 \cdot 2 \cdot 2 = 25 - 16 = 3^2$$

$$y = \frac{5-3}{4} = \frac{1}{2}$$

$$y = \frac{5+3}{4} = 2$$

$$y^2 + y + 1 = 0 = (y + \frac{1}{2})^2 + \dots$$

$$D = 1 - 4 < 0$$