



МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

11 КЛАСС. Вариант 11



1. [3 балла] Дан приведённый квадратный трёхчлен $f(x)$ такой, что уравнение $f(x) = 2x^2$ имеет единственное решение, а также уравнение $f(x) = -8$ имеет единственное решение. Найдите сумму корней уравнения $f(x) = 0$.
2. [3 балла] Сколькими способами можно представить число $n = 2^{401} \cdot 3^{500}$ в виде произведения двух натуральных чисел x и y , где y делится на x ?
3. [5 баллов] Найдите количество пар целых чисел $(x; y)$, удовлетворяющих системе

$$\begin{cases} \log_x 2 + 3 \log_y 8 + 4 \log_{xy} \frac{1}{16} = 0, \\ \frac{x-1}{x+1} > \frac{3y-3}{7y+7}, \\ x \leq 31. \end{cases}$$

4. [5 баллов] Найдите все пары натуральных чисел $(a; b)$ такие, что

$$\begin{cases} 4 \cdot \min(a; b) = 3(a-b)^2, \\ 3 \cdot \max(a; b) = \text{НОК}(a; b). \end{cases}$$

5. [5 баллов] На сторонах BA и BC треугольника ABC с тупым углом B как на диаметрах построены окружности ω_1 и ω_2 соответственно, пересекающиеся в точках B и D . Хорда BE окружности ω_1 перпендикулярна BC , а хорда BF окружности ω_2 перпендикулярна CE и касается ω_1 . Найдите отношение $BF : BD$, если $\cos \angle BCE = \frac{3}{5}$.
6. [5 баллов] При каких значениях параметра a система

$$\begin{cases} (y - x^2 - x - 1)(x^2 - 3xy + 4y^2)(y + x - 1) = 0, \\ y = (2a + 1)x - a^2 + 1 \end{cases}$$

имеет ровно 2 решения?

7. [6 баллов] В прямую четырёхугольную призму $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ вписана сфера ω . Луч с началом в точке A пересекает ω в точках P и Q , а луч с началом в точке C пересекает ω в точках M и N . Пусть O — точка пересечения диагоналей четырёхугольника $ABCD$. Найдите объём призмы $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ и расстояние ρ от центра ω до плоскости PAC , если известно, что $AO = 1$, $BO = 2$, $CO = 4$, $AP = \frac{\sqrt{5}}{3}$, $AQ = \frac{5\sqrt{5}}{3}$, $CM = \frac{10\sqrt{5}}{9}$, $CN = 2\sqrt{5}$.



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1	2	3	4	5	6	7
☒	☐	☐	☐	☐	☐	☐

СТРАНИЦА

1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$f(x) = x^2 + bx + c ; \quad f(x) \pm 2x^2 - \text{единств. решение} ; \quad \text{Найти: } x_1 + x_2 = ?$$
$$F(x) = -8 - \text{единств. решение.}$$

Решение:

$$x^2 + bx + c \geq 2x^2 \Rightarrow x^2 - bx - c \geq 0, \quad D = b^2 + 4c \geq 0, \quad \text{г.ч. единств. решение.}$$

$$\underline{\underline{b^2 \geq -4c}}$$

$$x^2 + bx + c \leq -8 \Rightarrow x^2 + bx + c + 8 \leq 0, \quad D = b^2 - 4c - 32 \leq 0$$

$$-4c - 4c - 32 \leq 0 \Rightarrow 8c \leq -32$$

$$c \leq -4$$

$$F(x) \leq 0 \Rightarrow x^2 + bx + c \leq 0. \quad \text{По г. Виета: } x_1 + x_2 \leq c \leq -4$$

Ответ: $x_1 + x_2 \leq -4$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.



СТРАНИЦА
1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$n = 2^{401} \cdot 3^{500}, \quad n = xy, \quad \text{где } y : x. \quad \text{Найти: кол-во способов.}$$

Решение

Поскольку $y : x$, то число $y = kx$, где $k \geq 1, k \in \mathbb{N}$.

$$n = 2 \cdot 2^{400} \cdot 3^{500} = 2 \cdot (2^{200} \cdot 3^{250})^2 = yx = kx^2$$

Поскольку x может принимать значения: $x = 2^0 \dots 2^{200}, 3^0 \dots 3^{250}$, число число

yx будет больше n . Число k будет при этом всегда больше 1 и всегда

натуральным. Тогда кол-во способов $= 201 \cdot 251 = 50451$

Ответ: 50451 способ.



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7
☐ ☐ ☒ ☐ ☐ ☐ ☐

СТРАНИЦА
 1 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\log_x 2 + 3 \log_y 8 + 4 \log_{xy} \frac{1}{16} \geq 0$$

Ограничения:

$$x \neq 1, y \neq 1, x > 0, y > 0$$

$$x, y \in \mathbb{Z}$$

и

$$x \geq 2, y \geq 2$$

$$\frac{x-1}{x+1} > \frac{3y-3}{7y+7}$$

$$x \leq 31$$

$$\log_x 2 + 3 \log_y 2 - 16 \log_{xy} 2 \geq 0$$

$$\frac{1}{\log_2 x} + \frac{3}{\log_2 y} - \frac{16}{\log_2 xy} \geq 0 \Rightarrow \frac{\log_2 xy \cdot \log_2 y + 3 \log_2 x \cdot \log_2 xy - 16 \log_2 x \cdot \log_2 y}{\log_2 x \cdot \log_2 y \cdot \log_2 xy} \geq 0$$

$$\frac{-16 \log_2 x \cdot \log_2 y}{\log_2 x \cdot \log_2 y \cdot \log_2 xy} \geq 0. \quad \text{Пос-во логарифма ч.т.ч. } x > 0, y > 0:$$

$$\log_2 xy = \log_2 x + \log_2 y$$

$$\frac{\log_2^2 y + \log_2 x \cdot \log_2 y + 3 \log_2^2 x + 3 \log_2 x \cdot \log_2 y - 16 \log_2 x \cdot \log_2 y}{\log_2 x \cdot \log_2 y \cdot \log_2 xy} \geq 0$$

$$\text{т.к. } x, y \neq 1, \text{ то } xy \neq 1 \Rightarrow \log_2 x \cdot \log_2 y \cdot \log_2 xy \neq 0$$

$$\log_2^2 y - 6 \log_2 x \cdot \log_2 y + 3 \log_2^2 x = (\log_2 y - 3 \log_2 x)^2 \geq 0$$

$$\log_2 y = 3 \log_2 x \Rightarrow \underline{y = x^3}$$

$$\frac{x-1}{x+1} > \frac{3}{7} \cdot \frac{y-1}{y+1} = \frac{3}{7} \cdot \frac{x^3-1}{x^3+1} = \frac{3}{7} \cdot \frac{(x-1)(x^2+x+1)}{(x+1)(x^2-x+1)}$$

$$\frac{y-1}{x+1} \cdot \left(1 - \frac{3}{7} \cdot \frac{x^2+x+1}{x^2-x+1}\right) > 0. \quad \text{т.ч. } x \geq 2, \text{ то } \frac{x-1}{x+1} > 0 \text{ всегда, значит,}$$

$$1 - \frac{3}{7} \cdot \frac{x^2+x+1}{x^2-x+1} = \frac{7x^2-7x+7-3x^2+3x-3}{7(x^2-x+1)} > 0; \quad x^2-x+1 = 0$$

$$D = 1 - 4 < 0$$

и

$$x^2-x+1 > 0$$

ни для каких x .



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☒ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА
2 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$7x^2 - 7x + 7 - 3x^2 - 3x - 3 > 0$$

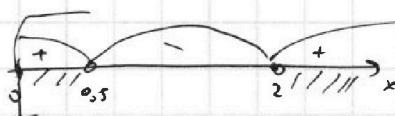
$$4x^2 - 10x + 4 > 0 \Leftrightarrow 2x^2 - 5x + 2 > 0$$

$$2x^2 - 5x + 2 = 0$$

$$D = 25 - 4 \cdot 2 = 9$$

$$x_1 = \frac{5+3}{4} = 2$$

$$x_2 = \frac{5-3}{4} = 0,5$$



$$x \in (0; 0,5) \cup (2; +\infty). \text{ Т.к. } x \geq 2 \text{ и } x \leq 31, \text{ то}$$

$$x \in (2; 31], x \in \mathbb{Z}, x = \{3, 4, 5, \dots, 31\} \rightarrow \text{всего } \underline{29 \text{ чис.}}, \text{ тогда}$$

всего возможно 29 пар.

Ответ: 29 пар.



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☒ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА
1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\begin{cases} 4 \min(a; b) = 3(a-b)^2 \\ 3 \cdot \max(a; b) = \text{НОК}(a; b) \end{cases}; \quad a, b \in \mathbb{N}$$

Найти все такие пары a, b .

Решение:

Пусть $a > b$. Тогда:

$$\begin{cases} 4b = 3(a-b)^2 \\ 3a = \text{НОК}(a; b) \end{cases} \Rightarrow \text{из этого уравнения видно, что степени всех}$$

простых чисел в числе b меньше или равны степени в числе a , кроме 3;

если $a = 3^{k_0} \cdot p_1^{k_1} \cdot p_2^{k_2} \cdot \dots \cdot p_n^{k_n}$, то $b = 3^{k_0+t} \cdot p_1^{t_1} \cdot p_2^{t_2} \cdot \dots \cdot p_n^{t_n}$,

где $t_1 \leq k_1, t_2 \leq k_2, \dots, t_n \leq k_n$. Тогда можно предположить

a или $a = \frac{m \cdot b}{3}$, где $m \in \mathbb{N}; m > 3$, так $a > b$

$$4b = 3 \left(\frac{mb}{3} - b \right)^2 = 3 \cdot \frac{(mb - 3b)^2}{9} = \frac{b^2}{3} \cdot (m-3)^2 \quad / : b, \text{ так } b \neq 0$$

$$4 \cdot 3 = b(m-3)^2 \Rightarrow b = \frac{12}{(m-3)^2} \Rightarrow 12 : (m-3)^2, \text{ так } m-3 \in \mathbb{N}$$

$$m-3 \geq 1 \Rightarrow m \geq 4$$

$$m-3 \geq 2 \Rightarrow m \geq 5$$

или $m = 4$:

$$4b = 3 \left(\frac{4}{3}b - b \right)^2 = \frac{3b^2}{9} = \frac{b^2}{3}$$

$$b \geq 12; a = \frac{4}{3} \cdot 12 = 16$$

или $m = 5$:

$$4b = 3 \left(\frac{5}{3}b - b \right)^2 = 3 \cdot \frac{4b^2}{9} = \frac{4b^2}{3} \Rightarrow b = 3, a = 5.$$

или $b > a$, так $(a-b)^2 = (b-a)^2$ получим норму $a = 12, b = 16, a = 3, b = 5$.

Ответ: $(12; 16), (3; 5), (16; 12), (5; 3)$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☒ 7 ☐

СТРАНИЦА
1 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\begin{cases} (y - x^2 - x - 1)(x^2 - 3xy + 4y^2)(y + x - 1) = 0 \\ y = (2a+1)x - a^2 + 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y - x^2 - x - 1 = 0 & (1) \\ x^2 - 3xy + 4y^2 = 0 & (2) \\ y + x - 1 = 0 & (3) \\ y = (2a+1)x - a^2 + 1 \end{cases}$$

Для (1):

$$2ax + x - a^2 + 1 - x^2 - x - 1 = 0$$

$$x^2 - 2ax + a^2 = 0 \quad 2ax - a^2 = 0$$

$$(x - a)^2 = 0 \Rightarrow x = a$$

$$y = (2a+1)a - a^2 + 1 = a^2 + a + 1$$

Для (3): $\rightarrow 2ax + x - a^2 + 1 + x - 1 = 0 \rightarrow 2x(a+1) = a^2$

$$x = \frac{a^2}{2(a+1)}, \text{ при } a \neq -1$$

$$y = \frac{2a^3}{2(a+1)} + \frac{a^2}{2(a+1)} - a^2 + 1 = \frac{2a^3 + a^2 - 2a^2 - 2a + 2}{2(a+1)} = \frac{-a^2 + 2a + 2}{2(a+1)}; \quad a \neq -1$$

~~Для (2):~~

Для (2):

пусть $y = kx + b$, где $k = 2a+1$
 $b = -a^2 + 1$

$$x^2 - 3x(kx + b) + 4(kx + b)^2 = 0$$

$$x^2 - 3kx^2 - 3bx + 4k^2x^2 + 8kxb + 4b^2 = 0$$

$$x^2(1 - 3k + 4k^2) + x(-3b + 8kb) + 4b^2 = 0$$

$$D = (-3b + 8kb)^2 - 16b^2(1 - 3k + 4k^2) = b^2(64k^2 - 48kb + 9 - 64k^2 + 48k - 16) = -5b^2 \leq 0$$

, не имеет корней при $b \neq 0$, при $b = 0$:

$-a^2 + 1 = 0 \Rightarrow a = \pm 1$ имеет корни: $x = \frac{8kb - 6b}{2(4k^2 - 3k + 1)}$; $k = 2a+1$
 $b = -a^2 + 1$

$x = \frac{b(8k-3)}{2(4k^2-3k+1)} = 0$, так $\underline{b=0}$. При $a \neq -1$, $a \neq 1$ корней от

(3) и (1) не получается совпадения, значит 1 решение.



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1
☐2
☐3
☐4
☐5
☐6
☒7
☐СТРАНИЦА
2 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Рассмотрим, при каких a выполняется пара (1) и (3):

$$a = \frac{a^2}{2a+2} \Rightarrow \frac{2a^2+a-a^2}{2a+2} = \frac{a^2+2a}{2a+2} = 0; \quad 2a+2 \neq 0$$

$$a^2+2a=0$$

$$a(a+2)=0$$

$$a=0; a=-2$$

Тогда, $2a \neq 0$ $2a \neq -2$

$$\text{Т.е. } y = (2a+1)x - a^2+1,$$

то есть $x_1 = x_2$, и $y_1 = y_2$

и мы получаем не решение a .

$$a^2+a+1 = \frac{a^2+2a+2}{2(a+1)}$$

Тогда $a \neq 0$, $a \neq -2$.

Рассмотрим, что получится при $a = -1$ и $a = 1$:

$$a = -1:$$

$$y = 2x + x - 1 + 1 = 3x, \text{ Тогда уравнение (3) имеет бесконечно много решений}$$

$$\text{Решение } y + x + 1 = -x + x - 1 = -1$$

$$(3): -x + x - 1 = -1 \text{ не имеет решений.}$$

$$(1): -x - x^2 - x - 1 = 0$$

$$(2): x = 0 - \text{решение}$$

$$-x^2 - 2x - 1 = 0$$

$$x^2 + 2x + 1 = 0$$

$$(x+1)^2 = 0$$

$$x = -1 - \text{решение.}$$

При $a = -1$ два решения: $(0; 0)$

$$(-1; +1)$$

$$a = 1:$$

$$y = 2x + x - 1 + 1 = 3x.$$

$$(1): 3x - x^2 - x - 1 = -x^2 + 2x - 1 = 0 \Rightarrow x^2 - 2x + 1 = (x-1)^2 = 0 \Rightarrow x = 1$$

$$(2): x = 0$$

$$(3): 3x + x - 1 = 0 \Rightarrow 4x - 1 = 0 \Rightarrow x = \frac{1}{4} \Rightarrow \text{существует 3 решения,}$$

$$a \neq 1, \text{ то рассмотрим: } \sqrt{\text{Ответ: } a \in (-\infty; -2) \cup (-2; 0) \cup (0; 1) \cup (1; +\infty)}$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

1
☐

2
☐

3
☐

4
☐

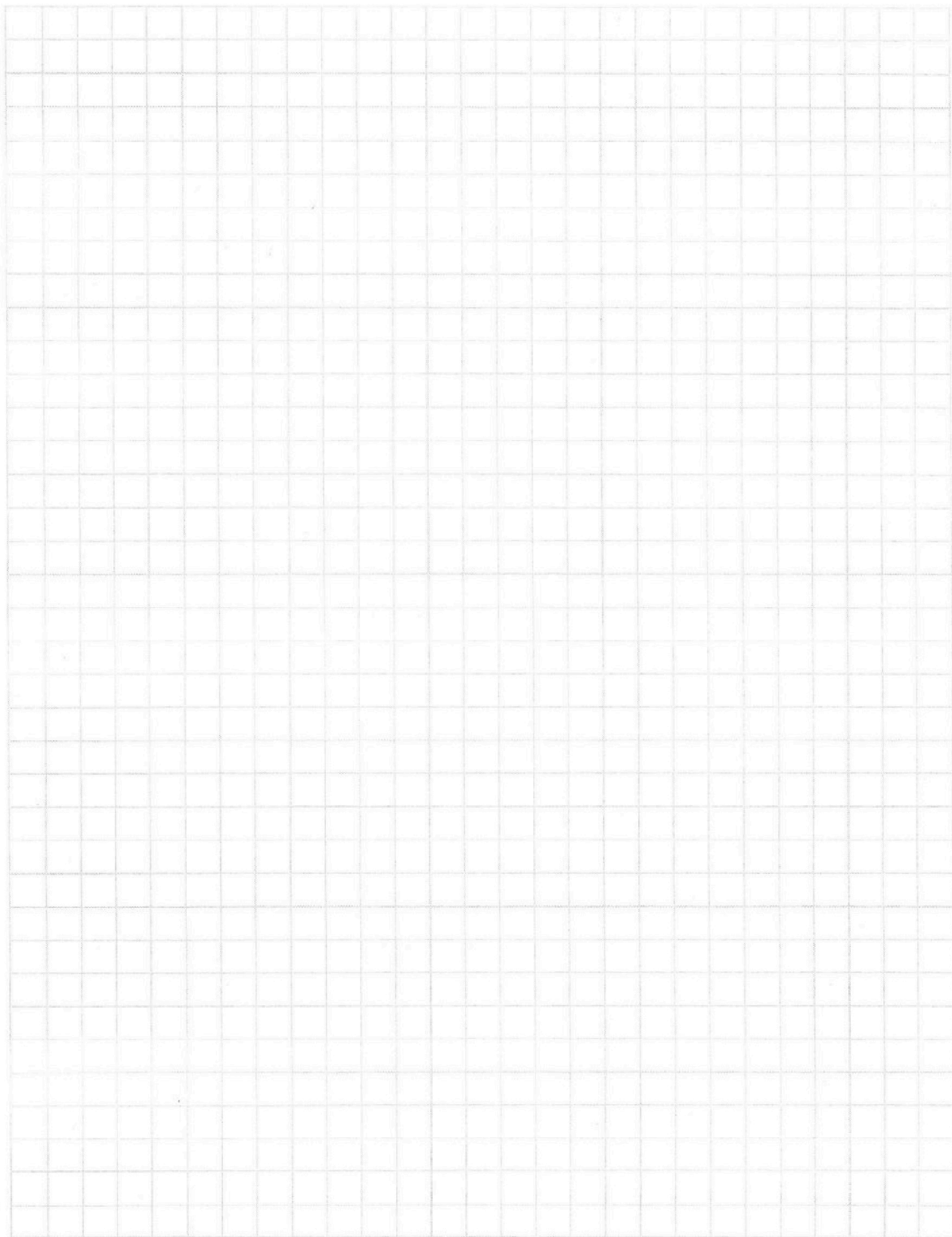
5
☐

6
☐

7
☐

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. **Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно.** Порча QR-кода недопустима!





На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$y = x^2 \quad \text{Если } a=0, \text{ то } \underline{k=1, b=1}$$

$$x^2 + 3x^2 + 4x^2 = \cancel{8x^2} \quad \boxed{x=0}$$

$$y = kx + b$$

$$x^2 + 3kx^2 + 3bx + 4(k^2x^2 + 2kbx + b^2) =$$

$$= x^2(1 - 3k + 4k^2) + x(-3b + 8kb) + 4b^2 = 0$$

$$D = (-3b + 8kb)^2 - 4(1 - 3k + 4k^2) \cdot 4b^2 =$$

$$= b^2(8k - 3)^2 - 16b^2(4k^2 - 3k + 1) = 0$$

$$b^2(64k^2 - 48k + 9 - 64k^2 + 48k - 16) = 0 \Rightarrow$$

$$\cancel{b^2(8k^2 - 15k + 1)} \Rightarrow D = -5b^2$$

$$a=0: \quad \text{✗}$$

$$y = x + 1$$

$$(x+1)(x^2-x-1)(x^2) \cdot \cancel{(x+1)} = 0 \quad \boxed{x=0 \rightarrow \text{не подходит}}$$

$$a=-1: \quad \text{не подходит}$$

$$y = -2x + x - 1 + y = -x$$

$$(-x^2 - 2x - 1)(x^2 + 3x^2 + 4x^2)(-x + x - 1) = 0$$

$$(x+1)^2 \cdot 8x^2 = 0 \Rightarrow \boxed{x=-1 \quad y=1 \quad x=0 \quad y=0}$$

$$k = 2a + 1$$

$$b = -a^2 + 1$$

$$b=0 \quad -a^2 + 1 = 0$$

$$a^2 = 1$$

$$\boxed{a = \pm 1}$$

$$(1) \quad x = a \quad \text{if } a \neq 0$$

$$(3) \quad x = \frac{a^2}{2a+2}$$

$$a = \frac{a^2}{2a+2} \Rightarrow \frac{2a^2+2a-a^2}{2a+2} = 0$$

$$\frac{a(a+2)}{2a+2} = 0$$

$$a=0, a=-2$$

$$\begin{array}{r} 16 \\ \times 3 \\ \hline 48 \\ -16 \\ \hline 32 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 24 \\ \times 2 \\ \hline 48 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 64 \\ \times 2 \\ \hline 128 \end{array}$$

$$y + x - 1 = 0$$

$$a=-2:$$

$$y = -4x + x - 4 + 1 = -3x - 3$$

$$\cancel{(x-3)(x^2-x-1)(-3x-3+x-1)}$$

$$D = b^2(8k^2 - 15k + 1)$$

$$x^2 + 3x(x+1) + 4(x+b)^2 =$$

$$= x^2 + 3x^2 + 3x + 4x^2 + 8x + 4 =$$

$$= 8x^2 + 11x + 4 = 0$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
из

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$x^2 - 3xy + 4y^2 = 0$$

$$0 = 3y^2 - 16y^2 = -13y^2 \leq 0 \quad ; \quad \text{нм } y \geq 0;$$

не имеет решений нм $y \neq 0$

$$\text{нм } y \geq 0: 2ax + x - a^2 + 1 = 0$$

$$x(2a+1) = a^2 - 1$$

$$x = \frac{a^2 - 1}{2a+1} \quad ; \quad a \neq -\frac{1}{2} \quad ; \quad x \neq \frac{a^2 - 1}{2a+1}$$

$$\text{нм } y \geq 0:$$

$$\begin{cases} x^2 + x + 1 = 0 & \text{нет решений} \\ x^2 = 0 & \rightarrow x = 0 \\ x - 1 = 0 & \rightarrow x = 1 \\ x = \frac{a^2 - 1}{2a+1} & = \frac{(a-1)(a+1)}{2a+1} \end{cases}$$

не бывает так, чтобы

$$(0; x_1) \neq (0; x_2) \quad , \quad \text{где } x_1 \neq x_2$$

Если $y \geq 0$, то 1 решение

$$\frac{(a-1)(a+1)}{2a+1} = 0 \Rightarrow a = -1$$

$$a = 1$$

$$\text{мб } (0; 1), \text{ мб } (0; 0)$$

//

$$\boxed{y \geq 0} \Rightarrow x^2 - 3xy + 4y^2 - \text{не имеет решений.}$$

$$\text{Есть решение } x = a \text{ и } x = \frac{a^2}{2a+1} \quad ; \quad a \neq 0, a \neq -1, a \neq -\frac{1}{2}$$

$$y = 2ax + x - a^2 + 1 \quad \text{нм } x \geq a:$$

$$y = 2a^2 + a - a^2 + 1 = a^2 + a + 1$$

$$\text{нм } x = \frac{a^2}{2a+1}$$

$$y = \frac{2a^3}{2a+1} + \frac{a^2}{2a+1} - a^2 + 1 = \frac{2a^3 + a^2 - 2a^3 - a^2 + 2a + 1}{2a+1} = \frac{2a+1}{2a+1} = 1$$

$$\left(\frac{a^2}{2a+1}, (a; a^2 + a + 1) \right)$$

$$a^2 + a + 1 \neq 1$$

$$\text{нм } a = \frac{1}{2};$$

$$y = 2 \cdot \frac{1}{2} x + x - \left(\frac{1}{2}\right)^2 + 1 = \frac{3}{2}x + \frac{3}{4}$$

$$\text{нм } a = -1: -2x + x - x^2 = -x$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении **каждой** задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7
☐ ☐ ☐ ☐ ☐ ☐ ☐

СТРАНИЦА
 _ ИЗ _

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\begin{cases} y - x^2 - x - 1 = 0 \\ x^2 - 3xy + 4y^2 = 0 \\ y + x - 1 = 0 \\ y = 2ax + x - a^2 + 1 \end{cases}$$

$$2 \cdot 2 = 4$$

$$x^2 - 3xy + 4y^2 = 0$$

$$x^2 - 4xy + 4y^2 + xy = 0$$

$$(x - 2y)^2 + xy = 0$$

$$y^2 (2ax + x - a^2 + 1)^2 - 4xy^2 + 2ax^2 - 2a^2x + 2ax + 2ax^2 + x^2 - a^2x + x - 2a^2x - a^2x + a^4 - a^2 + 2ax + x - a^2 + 1$$

$$2ax + x - a^2 - x^2 - x - 1 = 0$$

$$x^2 - 2ax + a^2 = 0$$

$$(x - a)^2 = 0 \Rightarrow x = a \leftarrow \text{3-ое уравнение}$$

$$2ax + x - a^2 - 1 + x - 1 = 0$$

$$2ax + 2x - a^2 = 0$$

$$2x(a+1) = a^2$$

$$x = \frac{a^2}{2a+2}, \text{ ум } 2a+2 \neq 0$$

$$a \neq -1$$

$$a = \frac{a^2}{2a+2} = 0$$

$$\frac{2a^2 + a - a^2}{2a-1} = 0 \Rightarrow \frac{a^2 + a}{2a-1} = 0$$

$$a = -\frac{1}{2}; \begin{cases} a \neq 0 \\ a \neq -1 \end{cases}$$

$$y^2 = 4a^2x^2 + 4ax^2 - 4a^3x + 4ax - 2a^2x - 2a^2 + 2x + x^2 + a^4 + 1$$

$$(x - 4ax - 2x + 2a^2 + 2)^2 + 2ax^2 + x^2 - a^2x + x = 0$$

$$x^2 - 3(2ax^2 + x^2 - a^2x + x) + 4$$

$$a = -1:$$

$$y = -2x + x - 1 + 1 = -x$$

$$k^2 = 4a^2 + 4a + 1$$

$$k = (2a+1)$$

$$x^2 - 6ax^2 + 3x^2 + 3a^2x + 3x + 16a^2x^2 + 16ax^2 - 16a^3x + 16ax - 8a^2x - 8a^2 + 8x + 4k^2 + 4a^4 + 4 =$$

$$x^2(-6a-3+16a^2+16a+4) + x(3a^2-3+16a-8a^2+8) + (-8a^2+4a^4+4) = x^2(16a^2+10a+1) + x(16a^2-16a^3-5a^2+16a+8) + 4(-2a^2+a+1) = 0$$

$$\frac{b(8k-3)}{2(16a^2+16a+4-6a-3+1)^2} = \frac{b(16a+5)}{2(16a^2+10a)}$$





На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\begin{cases} 4 \min(a; b) = 3(a-b)^2 \\ 3 \max(a; b) = \text{НОК}(a; b) \end{cases}; a, b \in \mathbb{N}$$

пусть $a > b$:

$$4b = 3(a-b)^2$$

$$3a = \text{НОК}(a; b) \Rightarrow b:3^{n+1}, a:3^n \quad n=0, \dots, \infty$$

$b=3k$

$$3a: a \\ 3a: b$$

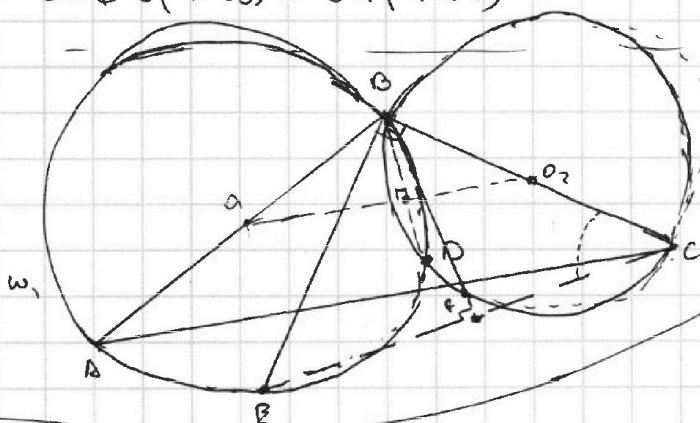
$$\begin{aligned} 1+x-2b \\ 3(2ax+x-a^2+1) &= 3x-3a^2+3 \\ 2ax+2x-a^2+1 &= x-a^2+1 \\ x &= \frac{a^2}{2a+2} \end{aligned}$$

$$4b = 3a^2 - 6ab + 3b^2$$

$$b(4-3b) = 3a(a-2b)$$

$$\boxed{3a = kb}; \quad 3a \leq ab$$

$b=3m$



$$\frac{BF}{BO}; \quad \cos \angle C \approx \frac{3}{5}$$

получено 2 решения

$$\begin{cases} (y-x^2-x-1)(x^2-3xy+4y^2)/(y+x-1) = 0 \\ y = (2a+1)x - a^2 + 1 = 2ax + x - a^2 + 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} (2ax+x-a^2+1-x^2-x-1)(x^2-3x(2ax+x-a^2+1)+4(2ax+x-a^2+1)^2)/(2ax+x-a^2+1) = 0 \\ x^2-3xy+4y^2 = 0 \\ y+x-1 = 0 \end{cases}$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1
☐2
☐3
☐4
☐5
☐6
☐7
☐СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$4b = 3 \left(\frac{4b}{3} - b \right)^2 \Rightarrow 3b^2 \frac{(k-3)^2}{9} = \frac{(k-3)^2}{3} \cdot b^2$$

$$b = \frac{12}{(k-3)^2}$$

$$12 : (k-3)^2 = 1 \Rightarrow (k-3)^2 = 12$$

$$(k-3)^2 = 1 \Rightarrow k = 4$$

т.к. $k \in \mathbb{N}$

$$(k-3)^2 = 4 \Rightarrow k = 5$$

$$\begin{cases} a = \frac{4}{3}b \\ a = \frac{5}{3}b \end{cases}$$

$$b : 3$$

$$b = 3$$

$$a = \frac{4 \cdot 3}{3} = 4$$

$$b = 3$$

$$a = 4$$

$$b = 3k$$

$$a = 4k$$

$$\Rightarrow a - b = k$$

$$4k = 3k \Rightarrow k = 0$$

$$4k = 3k$$

НОК: $4 \cdot 3 = 12$

НОК: $4 \cdot 3 = 12$

$$\begin{cases} a = \frac{4b}{3} \\ a = \frac{5b}{3} \end{cases}$$

$$4b = 3 \left(\frac{4b}{3} - b \right)^2$$

$$4b = 3 \left(\frac{b}{3} \right)^2 = \frac{b^2}{3} \Rightarrow b = 12, a = 16$$

$$4b = 3 \left(\frac{4b}{3} - b \right)^2 = 3 \cdot \frac{4b^2}{9} = \frac{4b^2}{3}$$

$$4b = 3 \left(\frac{2b}{3} - b \right)^2 = \frac{3 \cdot b^2}{9} = \frac{b^2}{3} \Rightarrow b = 12, a = 16$$

$$b = 3, a = 5$$

$$m = 3$$

$$m = 2, m = 5$$

$$m = 3$$

$$m = 1, m = 4$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7
☐ ☐ ☐ ☐ ☐ ☐ ☐

СТРАНИЦА
 _ ИЗ _

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

н4) ~~а58~~

$$\begin{cases} 4 \min(a; b) = 3(a-b)^2 \\ 3 \max(a; b) = \text{НОК}(a; b) \end{cases}$$

мысл. $a > b$; $4b = 3(a-b)^2$

Если $a \nmid b$, то $\text{НОК}(a; b) = a \cdot b$
 $\Rightarrow a \nmid b$
 $a-b \nmid b$

$a = p_1^{k_1} p_2^{k_2} \dots p_n^{k_n}$
 $b = p_1^{t_1} p_2^{t_2} \dots p_n^{t_n} \cdot 3$
 $t_1 < k_1, t_2 < k_2, \dots, t_n < k_n$

$3 \nmid \text{НОК}(a; b)$

~~$\text{НОК}(a; b) = \frac{ab}{3}$~~

~~$\text{НОК}(a; b) \cdot \min(a; b) = ab = \frac{ab}{3}$~~

$3 \left(\frac{kb}{3} - b \right)^2 = 3 \left(\frac{kb-3b}{3} \right)^2 = (3kb-9b)^2 = 4b$
 $b^2(3k-9)^2 = 4b \Rightarrow$

$a = \frac{kb}{3}$, $k \in \mathbb{N}$

$b(b(3k-9)^2 - 4) = 0$; $b \neq 0$

$4b = 3 \left(\frac{kb}{3} - b \right)^2 = 3b^2 \left(\frac{k}{3} - 1 \right)^2$

$b = \frac{4}{(3k-9)^2}$

$b=3, a>b$

$12 = 3(a-3)^2$

$3a = \text{НОК}(a; b)$

$4b = 3 \left(\frac{5b}{3} - b \right)^2 = 3 \left(\frac{5}{3} - 1 \right)^2 \cdot b^2$

$\left(\frac{5}{3} - 1 \right)^2 \cdot 3 = \frac{(5-3)^2}{3} = 3$

$4 = (a-3)^2$

$a-3 = 2$

$a = 5$

$b \left(\frac{(5 \cdot 3 - 9)^2 \cdot b - 4}{3} \right) = 0$

$b=3, a=5$

$b = \frac{4 \cdot 3}{(5 \cdot 3 - 9)^2} = \frac{4 \cdot 3}{9}$

$a = \frac{5b}{3}$

$5 \cdot 3 - 9 = 6$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
из

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\frac{1}{\log_2 x} + \frac{9}{\log_2 y} - \frac{16}{\log_2 xy} = 0;$$

$$\frac{16}{-16} = \frac{16}{6}$$

$$\frac{\log_2 xy + \log_2 y + \frac{9 \log_2 x \cdot \log_2 xy - 16 \log_2 x \cdot \log_2 y}{\log_2 xy \cdot \log_2 x \cdot \log_2 y}}{x \neq 0} = 0$$

$$\log_2 x + \log_2 y$$

$$\log_2 x \cdot \log_2 y + \log_2^2 y + 9 \log_2^2 x + 9 \log_2 x \log_2 y - 16 \log_2 x \log_2 y =$$

$$= \log_2^2 y - 6 \log_2 x \log_2 y + 9 \log_2^2 x = (\log_2 y - 3 \log_2 x)^2 = 0$$

$$\log_2 y = 3 \log_2 x \Rightarrow \boxed{y = x^3}$$

$$\frac{x-1}{x+1} > \frac{3}{7} \cdot \frac{y-1}{y+1} = \frac{3}{7} \cdot \frac{x^3-1}{x^3+1}$$

$$(x^3-1) = (x-1)(x^2+x+1) =$$

$$= x^3 + x^2 + x - x^2 - x - 1$$

$$= \frac{3}{7} \cdot \frac{(x-1)(x^2+x+1)}{(x+1)(x^2-x+1)}$$

$$(x^3+1) = (x+1)(x^2-x+1) =$$

$$= x^3 - x^2 + x + x^2 - x + 1$$

$$\frac{(x-1)}{(x+1)} \cdot \left(1 - \frac{3}{7} \frac{(x^2+x+1)}{(x^2-x+1)}\right) > 0$$

$$x > 0; x \neq 1 \quad x \in \{2, \dots, 31\}$$

30 нар.

$$x^2 - x + 1$$

$$D = 1 - 4 < 0$$

$$\begin{cases} \frac{x-1}{x+1} > 0 \Rightarrow x > 1 \\ 1 - \frac{3}{7} \frac{(x^2+x+1)}{(x^2-x+1)} > 0 \end{cases} \Rightarrow \boxed{x \geq 2}$$

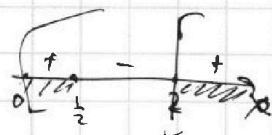
$$\frac{7x^2 - 7x + 7 - 3x^2 + 3x - 3}{7(x^2 - x + 1)} > 0$$

$$\frac{4x^2 - 10x + 4}{7(x^2 - x + 1)} > 0$$

$$2(2x^2 - 5x + 2) > 0$$

$$D = 25 - 16 = 9$$

$$x = \frac{5 \pm 3}{4} \Rightarrow \frac{1}{2}$$





На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

22) $f(x) = x^2 + bx + c$

$f(x) = 2x^2$ — экстрем. решение, $f(x) = -8$ — экстрем. решение.

$f(x) = 0 \mid x_1, x_2 = ?$

$x^2 + bx + c = 2x^2 \Rightarrow x^2 - bx - c = 0$

$D = b^2 + 4c = 0$

$x^2 + bx + c = -8 \Rightarrow x^2 + bx + c + 8 = 0$

$D = b^2 - 4c - 32 = 0$

$x_1 + x_2 = c = -4$

$-4c - 4c = 32 \Rightarrow c = -\frac{32}{8} = -4$

$\log_2 2 + 3 \log_2 8 + 4 \log_2 \frac{1}{16} = 0$
 $= \log_2 2 + 3 \log_2 2 - 4 \log_2 2 = 0$

23) $n = 2^{401} \cdot 3^{500}$; $n = xy$, $y \mid x$

$n = kx^2$

$2^{401} \cdot 3^{500} = 2 \cdot (2^{200})^2 \cdot (3^{250})^2$

$x = 2^{0 \dots 200} \cdot 3^{0 \dots 250}$

$y = kx$

$y \mid x \Rightarrow k \mid 1 \Rightarrow k = 1$

$\begin{array}{r} 251 \\ \times 201 \\ \hline 251 \\ + 5020 \\ \hline 50451 \end{array}$

$201 \cdot 251 = 50451$ число.

23) $x, y \in \mathbb{Z}$

$\begin{cases} \log_x 2 + 3 \log_y 8 + 4 \log_{xy} \frac{1}{16} = 0 \\ \frac{x-1}{x+1} > \frac{3y-3}{7y+7} = \frac{3}{7} \cdot \frac{y-1}{y+1} \\ x \leq 31 \end{cases}$

$x, y \neq 1, x, y > 0$

$\log_x 2 + 9 \log_y 2 + 16 \log_{xy} 2 = 0$

$\frac{1}{\log_2 x} + \frac{9}{\log_2 y} = \frac{16}{\log_2 xy} = 0$

$\frac{1}{\log_2 x} + \frac{9}{\log_2 y} = \frac{16}{\log_2 x + \log_2 y} = 0$

$\log_2 x + \log_2 y$