



МОСКОВСКИЙ  
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ  
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"  
ПО МАТЕМАТИКЕ

## 11 КЛАСС. Вариант 11



- [3 балла] Дан приведённый квадратный трёхчлен  $f(x)$  такой, что уравнение  $f(x) = 2x^2$  имеет единственное решение, а также уравнение  $f(x) = -8$  имеет единственное решение. Найдите сумму корней уравнения  $f(x) = 0$ .
- [3 балла] Сколькими способами можно представить число  $n = 2^{401} \cdot 3^{500}$  в виде произведения двух натуральных чисел  $x$  и  $y$ , где  $y$  делится на  $x$ ?
- [5 баллов] Найдите количество пар целых чисел  $(x; y)$ , удовлетворяющих системе

$$\begin{cases} \log_x 2 + 3 \log_y 8 + 4 \log_{xy} \frac{1}{16} = 0, \\ \frac{x-1}{x+1} > \frac{3y-3}{7y+7}, \\ x \leq 31. \end{cases}$$

- [5 баллов] Найдите все пары натуральных чисел  $(a; b)$  такие, что

$$\begin{cases} 4 \cdot \min(a; b) = 3(a - b)^2, \\ 3 \cdot \max(a; b) = \text{НОК}(a; b). \end{cases}$$

- [5 баллов] На сторонах  $BA$  и  $BC$  треугольника  $ABC$  с тупым углом  $B$  как на диаметрах построены окружности  $\omega_1$  и  $\omega_2$  соответственно, пересекающиеся в точках  $B$  и  $D$ . Хорда  $BE$  окружности  $\omega_1$  перпендикулярна  $BC$ , а хорда  $BF$  окружности  $\omega_2$  перпендикулярна  $CE$  и касается  $\omega_1$ . Найдите отношение  $BF : BD$ , если  $\cos \angle BCE = \frac{3}{5}$ .

- [5 баллов] При каких значениях параметра  $a$  система

$$\begin{cases} (y - x^2 - x - 1)(x^2 - 3xy + 4y^2)(y + x - 1) = 0, \\ y = (2a + 1)x - a^2 + 1 \end{cases}$$

имеет ровно 2 решения?

- [6 баллов] В прямую четырёхугольную призму  $ABCDA_1B_1C_1D_1$  вписана сфера  $\omega$ . Луч с началом в точке  $A$  пересекает  $\omega$  точках  $P$  и  $Q$ , а луч с началом в точке  $C$  пересекает  $\omega$  в точках  $M$  и  $N$ . Пусть  $O$  — точка пересечения диагоналей четырёхугольника  $ABCD$ . Найдите объём призмы  $ABCDA_1B_1C_1D_1$  и расстояние  $\rho$  от центра  $\omega$  до плоскости  $PAC$ , если известно, что  $AO = 1$ ,  $BO = 2$ ,  $CO = 4$ ,  $AP = \frac{\sqrt{5}}{3}$ ,  $AQ = \frac{5\sqrt{5}}{3}$ ,  $CM = \frac{10\sqrt{5}}{9}$ ,  $CN = 2\sqrt{5}$ .



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи **отдельно**.

- |                                       |                            |                            |                            |                            |                            |                            |
|---------------------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|
| <input checked="" type="checkbox"/> 1 | <input type="checkbox"/> 2 | <input type="checkbox"/> 3 | <input type="checkbox"/> 4 | <input type="checkbox"/> 5 | <input type="checkbox"/> 6 | <input type="checkbox"/> 7 |
|---------------------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|

СТРАНИЦА  
1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются **отдельно**. Порча QR-кода недопустима!

$$f(x) = x^2 + bx + c ; \quad f(x) \geq 2x^2 - \text{единств. решение} . \quad \text{Немн: } x_1 + x_2 = ?$$

$$F(x) = -8 - \text{единств. решение.}$$

Решение:

$$x^2 + bx + c \geq 2x^2 \Rightarrow x^2 - bx - c \leq 0 , D = b^2 + 4c \geq 0 , \text{гд. единств. решение.}$$

$$\frac{b^2 - 4c}{4}$$

$$x^2 + bx + c \geq -8 \Rightarrow x^2 + bx + c + 8 \geq 0 , D = b^2 - 4c - 32 \geq 0$$

$$-4c - 4c - 32 \geq 0 \Rightarrow 8c \leq -32$$

$$f(x) \geq 0 \Rightarrow x^2 + bx + c \geq 0 \quad C = -4$$

По т. Виета:  $x_1 + x_2 \geq C = -4$

Ответ:  $x_1 + x_2 \geq -4$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1

2

3

4

5

6

7

СТРАНИЦА  
1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$n = 2^{400} \cdot 3^{500}; \quad n = xy, \quad \text{причем } y|x. \quad \text{Кол-во способов}$$

Решение:

Раз  $y|x$ , то можно  $y=kx$ , где  $k \geq 1, k \in \mathbb{N}$ .

$$n = 2 \cdot 2^{400} \cdot 3^{500} = 2(2^{200} \cdot 3^{250})^2 = yx = kx^2$$

Тогда  $x$  может принимать значения:  $x = 2^{0 \dots 200} \cdot 3^{0 \dots 250}$ , число

$yx$  будет делить  $n$ . Число  $k$  будет при этом всегда больше 1 и также

натуральным. Тогда кол-во способов =  $201 \cdot 251 = 50451$

Ответ: 50451 способ.



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

- |                            |                            |                                       |                            |                            |                            |                            |
|----------------------------|----------------------------|---------------------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|
| <input type="checkbox"/> 1 | <input type="checkbox"/> 2 | <input checked="" type="checkbox"/> 3 | <input type="checkbox"/> 4 | <input type="checkbox"/> 5 | <input type="checkbox"/> 6 | <input type="checkbox"/> 7 |
|----------------------------|----------------------------|---------------------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|

СТРАНИЦА  
1 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\begin{cases} \log_x 2 + 3 \log_y 3 + 4 \log_{xy} \frac{1}{16} \geq 0 \\ \frac{x-1}{x+1} > \frac{3y-3}{7y+7} \\ x \leq 3 \end{cases} ; \quad \begin{array}{l} \text{Ограничения:} \\ x \neq 1, y \neq 1, x > 0, y > 0 \\ x, y \in \mathbb{R}^+ \\ \Downarrow \\ x \geq 2, y \geq 2 \end{array}$$

$$\log_x 2 + 9 \log_y 2 - 16 \log_{xy} 2 \geq 0$$

$$\frac{1}{\log_2 x} + \frac{9}{\log_2 y} - \frac{16}{\log_2 xy} \geq 0 \Rightarrow \frac{\log_2 xy \cdot \log_2 y + 9 \log_2 x \cdot \log_2 xy - 16 \log_2 x \cdot \log_2 y}{\log_2 x \cdot \log_2 y \cdot \log_2 xy} \geq 0$$

$$\frac{-16 \log_2 x \cdot \log_2 y}{\log_2 x \cdot \log_2 y \cdot \log_2 xy} \geq 0. \quad \text{Последовательность логарифмов } x > 1, y > 1, x > 0, y > 0;$$

$$\log_2 xy = \log_2 x + \log_2 y$$

$$\frac{\log_2^2 y + \log_2 x \cdot \log_2 y + 9 \log_2^2 x + 9 \log_2 x \cdot \log_2 y - 16 \log_2 x \cdot \log_2 y}{\log_2 x \cdot \log_2 y \cdot \log_2 xy} \geq 0$$

$$\text{Т.к. } x, y \neq 1, \text{ то } xy \neq 1 \Rightarrow \log_2 x \cdot \log_2 y \cdot \log_2 xy \neq 0$$

$$\log_2^2 y - 6 \log_2 x \cdot \log_2 y + 9 \log_2^2 x = (\log_2 y - 3 \log_2 x)^2 \geq 0$$

$$\log_2 y = 3 \log_2 x \Rightarrow \underline{\underline{y = x^3}}$$

$$\frac{x-1}{x+1} > \frac{3}{7} \cdot \frac{y-1}{y+1} = \frac{3}{7} \cdot \frac{x^3-1}{x^3+1} = \frac{3}{7} \cdot \frac{(x-1)(x^2+x+1)}{(x+1)(x^2-x+1)}$$

$$\frac{y-1}{x+1} \cdot \left( 1 - \frac{3}{7} \cdot \frac{x^2+x+1}{x^2-x+1} \right) > 0. \quad \text{Т.к. } x \geq 2, \text{ то } \frac{x-1}{x+1} > 0 \text{ всегда, значит:}$$

$$1 - \frac{3}{7} \cdot \frac{x^2+x+1}{x^2-x+1} \geq \frac{7x^2-7x+7-3x^2+3x-3}{7(x^2-x+1)} > 0 ; \quad x^2-x+1 = 0$$

$$0 \neq 6x < 0$$

$$\Downarrow$$

$$x^2-x+1 > 0$$

или любых  $x$ .

На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.



- |                          |                          |                                     |                          |                          |                          |                          |
|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1                        | 2                        | 3                                   | 4                        | 5                        | 6                        | 7                        |
| <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

СТРАНИЦА  
2 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$7x^2 - 7x + 7 - 3x^2 - 3x - 3 > 0$$

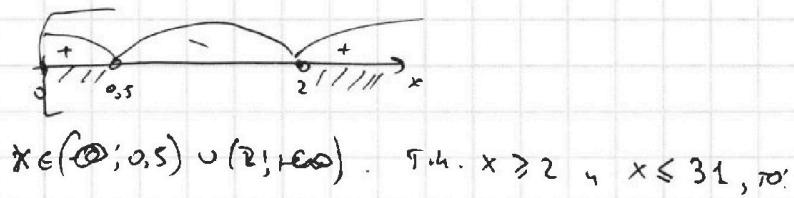
$$4x^2 - 10x + 4 > 0 \Rightarrow 2x^2 - 5x + 2 > 0$$

$$2x^2 - 5x + 2 = 0$$

$$D = 25 - 4 \cdot 4 = 9$$

$$x_1 = \frac{5+3}{4} = 2$$

$$x_2 = \frac{5-3}{4} = 0,5$$



$x \in (0,5; 2) \cup (2; +\infty)$ . т.к.  $x \geq 2$  и  $x \leq 31$ , то

$x \in (2; 31]$ ,  $x \in \mathbb{Z}$ ,  $x = \{3, 4, 5, \dots, 31\} \rightarrow$  всего 29 чисел, кроме

всего возможно 29 нап.

Ответ: 29 нап.

На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

- |                          |                          |                          |                                     |                          |                          |                          |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|

СТРАНИЦА  
1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\begin{cases} 4 \min(a; b) = 3(a-b)^2 \\ 3 \cdot \max(a; b) = \text{НОК}(a; b) \end{cases}, \quad a, b \in \mathbb{N}$$

найдут все такие пары  $a, b$ .

Решение:

Многие  $a > b$ . Тогда:

$$4b = 3(a-b)^2$$

$3a = \text{НОК}(a; b) \Rightarrow$  из этого уравнения видно, что степень всех простых чисел в числе  $b$  меньше или равна  $a$ , кроме  $3$ :

таким  $a = 3^{k_0} \cdot p_1^{t_1} \cdot p_2^{t_2} \cdots p_n^{t_n}$ , то  $b = 3^{k_0+1} \cdot p_1^{t_1} \cdot p_2^{t_2} \cdots p_n^{t_n}$ ,

так  $t_1 < k_1, t_2 < k_2, \dots, t_n < k_n$ . Тогда можно представить

$a$  так  $a = \frac{mb}{3}$ , где  $m \in \mathbb{N}$ ;  $m > 3$ , т.к.  $a > b$

$$4b = 3 \left( \frac{mb}{3} - b \right)^2 = 3 \cdot \frac{(mb-3b)^2}{9} = \frac{b^2}{3} \cdot (m-3)^2 \quad \begin{matrix} b \in \mathbb{N} \\ \therefore b \neq 0 \end{matrix}$$

$$4 \cdot 3 = b(m-3)^2 \Rightarrow b = \frac{12}{(m-3)^2} \quad \begin{matrix} 12 \cdot (m-3)^2 \in \mathbb{N} \\ m \geq 3 \in \mathbb{N} \end{matrix}$$

$$m-3=1 \Rightarrow m=4$$

$$m-3=2 \Rightarrow m=5$$

$$\text{так } m=4!$$

$$4b = 3 \left( \frac{4}{3}b - b \right)^2 = \frac{3b^2}{9} = \frac{b^2}{3}$$

$$b=12 \quad ; \quad a = \frac{4}{3} \cdot 12 = 16$$

$$\text{так } m=5!$$

$$4b = 3 \left( \frac{5}{3}b - b \right)^2 = 3 \cdot \frac{4b^2}{9} = \frac{4b^2}{3} \Rightarrow b=3, a=5.$$

При  $b > a$ , т.к.  $(a-b)^2 < (b-a)^2$  получим пары  $a=16, b=12, a=5, b=3$ .

$$\begin{cases} (m-3)^2 = 1 \\ (m-3)^2 = 2 \leftarrow \text{невозможно} \\ (m-3)^2 = 3 \leftarrow \text{невозможно} \\ (m-3)^2 = 4 \\ (m-3)^2 = 6 \leftarrow \text{невозможно} \\ (m-3)^2 = 12 \leftarrow \text{невозможно} \end{cases}$$

При  $b > a$ , т.к.  $(a-b)^2 < (b-a)^2$   
 $(a-b)^2 = 6 \neq 2$   
~~получим~~ ~~пары~~

На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.



- |                          |                          |                          |                          |                          |                                     |                          |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|
| <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|

СТРАНИЦА  
1 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\begin{cases} (y - x^2 - x - 1)(x^2 - 3xy + 4y^2)(y + x - 1) = 0 \\ y = (2a+1)x - a^2 + 1 \end{cases}$$

1

$$\begin{cases} y - x^2 - x - 1 = 0 & (1) \\ x^2 - 3xy + 4y^2 = 0 & (2) \\ y + x - 1 = 0 & (3) \\ y = (2a+1)x - a^2 + 1 \end{cases}$$

Для (1):

$$2ax + x - a^2 + 1 - x^2 - x - 1 = 0$$

$$\begin{aligned} x^2 - 2ax + a^2 &= 0 \\ (x - a)^2 &= 0 \\ x - a &= 0 \\ x &= a. \end{aligned}$$

$$y = (2a+1)a - a^2 + 1 = a^2 + a + 1$$

$$\text{Для (3): } \rightarrow 2ax + x - a^2 + 1 + x - 1 = 0 \rightarrow 2x(a+1) = a^2$$

Без (2):

Для (2):

Пусть  $y = kx + b$ , где  $k = 2a+1$

$$b = -a^2 + 1$$

$$x^2 + 3x(kx+b) + 4(kx+b)^2 = 0$$

$$x^2 + 3kx^2 + 3bx + 4k^2x^2 + 8kxb + 4b^2 = 0$$

$$x^2(1 - 3k + 4k^2) + x(-3b + 8kb) + 4b^2 = 0$$

$$D = (-3b + 8kb)^2 - 16b^2(1 - 3k + 4k^2) = b^2(64k^2 - 48kb + 8b^2 - 64k^2 + 16k - 16) = -5b^2 \leq 0, \text{ не имеет корней при } b \neq 0, \text{ при } b = 0:$$

$$-a^2 + 1 = 0 \Rightarrow a = \pm 1 \text{ имеет корни: } x = \frac{8kb - 3b}{2(4k^2 - 3k + 1)}; \quad \begin{matrix} k = 2a+1 \\ b = -a^2 + 1 \end{matrix}$$

$$x = \frac{b(8k - 3)}{2(4k^2 - 3k + 1)} = 0, \text{ т.к. } b = 0. \quad \text{При } a = -1, a = 1 \text{ корни от}$$

(3) и (1) не являются совпадениями.

На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.



- |                          |                          |                          |                          |                          |                                     |                          |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|
| 1                        | 2                        | 3                        | 4                        | 5                        | 6                                   | 7                        |
| <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

СТРАНИЦА  
2 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Посмотрим, при каких  $a$  система имеет решения (1) и (3):

$$a = \frac{a^2}{2a+2} \Rightarrow \frac{2a^2+2a-a^2}{2a+2} = \frac{a^2+2a}{2a+2} = 0; \quad 2a+2 \neq 0, \quad a^2+2a=0, \quad a(a+2)=0$$

Т.к.  $2a+2 \neq 0$ , то  $a(a+2)=0$  означает  $a=0$  или  $a=-2$ .

~~$a^2+a+1 = \frac{a^2+2a+2}{2a+2}$~~

$$\text{т.к. } y = (2a+2)x - a^2 - 1, \quad a=0; \quad a=-2$$

т.к. если  $x_1 = k_3$ , то  $y_1 = g_3$

таким образом и для  $a$  имеем:

Также  $a \neq 0$ ,  $a \neq -2$ . Посмотрим, что происходит при  $a=1$  и  $a=-1$ :

$$a=1:$$

$$y = -2x + x - 1 + 1 = -x, \quad \text{уравнение (3) имеет 2 решения: } x=0, x=1$$

~~$y+x+1 = -x+x-1 = -1$~~

$$(3): -x+x-1 = -1 \in \text{нет решений.}$$

$$(2): x=0 - \text{решение}$$

$$\text{Нам } a=1 \text{ есть решение: } (0; 0)$$

$$(-1; +1)$$

$$(1): -x - x^2 - x - 1 = 0$$

$$-x^2 - 2x - 1 = 0$$

$$x^2 + 2x + 1 = 0$$

$$(x+1)^2 = 0$$

$$x = -1 - \text{решение.}$$

$$a=-1:$$

$$y = 2x + x - 1 + 1 = 3x.$$

$$(1): 3x - x^2 - x + 1 = -x^2 + 2x + 1 = 0 \Rightarrow (x-1)^2 = 0 \Rightarrow x=1$$

$$(2): x=0$$

$$(3): 3x + x - 1 = 0 \Rightarrow 4x - 1 = 0 \Rightarrow x = \frac{1}{4} \Rightarrow \text{существует 3 решения,}$$

$$a \neq 1, \text{ но возможн.} \quad \begin{cases} \text{Ответ: } a \in (-\infty; -2) \cup (-2; 0) \\ \cup (0; 1) \cup (1; +\infty) \end{cases}$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

- |                          |                          |                          |                          |                          |                          |                          |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1                        | 2                        | 3                        | 4                        | 5                        | 6                        | 7                        |
| <input type="checkbox"/> |

СТРАНИЦА  
ИЗ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.



- |                          |                          |                          |                          |                          |                          |                          |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| <input type="checkbox"/> |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|

СТРАНИЦА  
ИЗ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$y = kx + b$$

$$k \in \mathbb{R}, b \in \mathbb{R}$$

$$x^2 + 3kx^2 + 4x^2 = 8x^2 \geq 0$$

$$(x=0)$$

$$y = kx + b$$

$$x^2 + 3kx^2 + 4x^2 + 4(k^2x^2 + 2kbx + b^2) =$$

$$= x^2(1 - 3k + 4k^2) + x(-3b + 8kb) + 4b^2 \geq 0$$

$$D = (-3b + 8kb)^2 - 4(1 - 3k + 4k^2) \cdot 4b^2 =$$

$$= b^2(8k - 3)^2 - 16b^2(4k^2 - 3k + 1) \geq 0$$

$$b^2(64k^2 - 48k + 9 - 64k^2 + 48k - 16) \geq 0 \Rightarrow$$

$$b^2(82k^2 - 15) \geq 0 \Rightarrow D \geq -5b^2$$

$$a \geq 0:$$

$$y = x + 1$$

$$(k+1)(x^2 - x - 1)(x^2 + 4x^2) \geq 0$$

$\boxed{x=0 \rightarrow \text{не касательно}}$

$$-x^2 \cdot x^2 \cdot (x-1) \geq 0 \Rightarrow$$

$x=0$      $x=1$      $y=1$

$$a \geq -1: \quad -\text{касательно}$$

$$y = -2x + x - x + y = -x$$

$$(-x^2 - 2x - 1)(x^2 + 3x^2 + 4x^2) \geq 0$$

$$(x+1)^2 \cdot 8x^2 \geq 0 \Rightarrow$$

$x=-1$   
 $x \geq 0 \Rightarrow$   
 $y \geq 0$

$$k \geq 2a + 1$$

$$b \geq -a^2 + 1$$

$$(1) \quad x = a$$

$$\exists b \geq 0$$

$$-a^2 + 1 \geq 0$$

$$a^2 \leq 1$$

$$\boxed{a^2 \leq 1}$$

$$(3): \quad x = \frac{a^2}{2a+2}$$

$$a \leq \frac{a^2}{2a+2} \Rightarrow \frac{2a^2+2a-a^2}{2a+2} \leq 0$$

$$\frac{a(a+2)}{2a+2} \leq 0$$

$$a \geq 0; a \geq -2$$

$$\begin{array}{r} 16 \\ \times 3 \\ \hline 48 \\ -16 \\ \hline 32 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 64 \\ \times 2 \\ \hline 128 \end{array}$$

$$y = x + 1$$

$$a \geq -2:$$

$$y = -4x + x - 4 + 1 = -3x - 3$$

$$(3x - 3)(x^2 - x - 1)(-3x - 3 + x - 1)$$

$$D = B^2 - 8C$$

$$x^2 + 3x(x+1) + 4(x+b)^2 \geq 0$$

$$= x^2 + 3x^2 + 3x + 4x^2 + 8x + 4 \geq 0$$

$$= 6x^2 + 11x + 4 \geq 0$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

- |                            |                            |                            |                            |                            |                            |                            |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|
| <input type="checkbox"/> 1 | <input type="checkbox"/> 2 | <input type="checkbox"/> 3 | <input type="checkbox"/> 4 | <input type="checkbox"/> 5 | <input type="checkbox"/> 6 | <input type="checkbox"/> 7 |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|

СТРАНИЦА  
ИЗ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$x^2 - 3xy + 4y^2 = 0$$

$$D = 9y^2 - 16y^2 = -7y^2 \leq 0 \quad ; \text{ при } y \neq 0;$$

не имеет решений при  $y \neq 0$

иначе  
также 1  
номер.

$$\text{При } y=0: 2ax + x - a^2 + 1 = 0$$

$$x(2a+1) = a^2 - 1$$

$$x = \frac{a^2 - 1}{2a+1} ; \quad a \neq -\frac{1}{2} ; \quad x \neq \frac{a^2 - 1}{2a+1}$$

При  $y=0$ :

$$\left\{ \begin{array}{l} x^2 + x + 1 = 0 \quad \text{нет решений} \\ x^2 = 0 \Rightarrow x = 0 \\ x - 1 = 0 \Rightarrow x = 1 \\ x = \frac{a^2 - 1}{2a+1} = \frac{(a-1)(a+1)}{2a+1} \end{array} \right.$$

не бывает так, чтобы

$$(0; x_1) \cup (0; x_2) , \text{ где } x_1 \neq x_2 \quad \frac{a^2 - 1 - 2a^2 - a}{2a+1} \neq 0$$

Если  $y \neq 0$ , то 1 решение

$$\begin{aligned} -a^2 - a - 1 &\neq 0 \\ a^2 + a + 1 &\neq 0 \quad \text{таким образом} \end{aligned}$$

либо  $(0; 1)$ , либо  $(0; 0)$

$$\boxed{y \neq 0} \Rightarrow x^2 - 3xy + 4y^2 - \text{не имеет решений.}$$

Единственное решение  $x = a$  и  $x = \frac{a^2 - 1}{2a+1}$ ;  $a \neq 0$ ,  $a \neq -1$ ,  $a \neq -\frac{1}{2}$

$y = 2ax + x - a^2 + 1$  при  $x = a$ :

$$y = 2a^2 + a - a^2 + 1 = a^2 + a + 1$$

$$\frac{3}{4}a^2 + a - \frac{1}{4} = 0 \Rightarrow x = \frac{1}{4}$$

$$\begin{aligned} \text{при } x = \frac{a^2 - 1}{2a+1} : \quad y &= \frac{2a^3}{2a+1} + \frac{a^2}{2a+1} - a^2 + 1 = \frac{2a^3 + a^2 - 3a^3 + a^2 + 2a + 1}{2a+1} \\ &= \frac{-a^3 + a^2 + 2a + 1}{2a+1} \\ \cancel{\left( \frac{a^2}{2a+1}; 1 \right)} , (a; a^2 + a + 1) & \end{aligned}$$

$$\text{при } a = -\frac{1}{2}: \quad y = -2 \cdot \frac{1}{2} + x - \left(-\frac{1}{2}\right)^2 + 1 = \frac{3}{4} + x - \frac{1}{4} = x$$

$$\text{при } a = -1: \quad -2x + x - (-1)^2 - x$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

- |                            |                            |                            |                            |                            |                            |                            |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|
| <input type="checkbox"/> 1 | <input type="checkbox"/> 2 | <input type="checkbox"/> 3 | <input type="checkbox"/> 4 | <input type="checkbox"/> 5 | <input type="checkbox"/> 6 | <input type="checkbox"/> 7 |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|

СТРАНИЦА  
ИЗ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\begin{cases} y - x^2 - x - 1 = 0 \\ x^2 - 3xy + 4y^2 = 0 \\ y + x - 1 = 0 \end{cases}$$

$$y = 2ax + x - a^2 + 1$$

$$2ax + x - a^2 + 1 - x^2 - x - 1 = 0$$

~~$$x^2 - 2ax + a^2 = 0$$~~

$$(x - a)^2 = 0 \Rightarrow x = a$$

$$2ax + x - a^2 + 1 + x - 1 = 0$$

$$2ax + 2x - a^2 = 0$$

~~$$2x(a+1) = a^2$$~~

$$x = \frac{a^2}{2a+2}, \text{ при } 2a+2 \neq 0$$

$$(a \neq -1)$$

~~$$(x - 4ax - 2x + 2a^2 + 2)^2 + 2ax^2 + x^2 - a^2x + x = 0$$~~

~~$$x^2 - 3(2ax^2 + x^2 - a^2x + x) + 4 = 0$$~~

$$x^2 - 6ax^2 + 3x^2 + 3a^2x - 3x + 16a^2x^2 + 16ax^2 - 16a^3x + 16ax - 8a^2x - 8a^2 +$$

$$+ 8x + 4a^2 + 4a^4 + 4 = x^2(-6a - 3 + 16a^2 + 16a - 16a^3) + x(3a^2 - 3 + 16a -$$

$$- 8a^2 + 8) + (-8a^2 + 4a^4 + 4) = x^2(16a^2 + 10a + 1) + x(16a^2 - 16a^3 - 3a^2 +$$

$$+ 16a + 8) + 4(-2a^2 + a + 1) = 0$$

$$x^2 - 3xy + 4y^2 = 0$$

$$x^2 - 4xy + 4y^2 + xy = 0$$

$$(x - 2y)^2 + xy = 0$$

$$2 \cdot 2 = 4$$

$$y^2(2ax + x - a^2 + 1)^2 - 4ax^2 + 2ax^2 - 3a^2x + + 2ax + 2ax^2 + x^2 - a^2x + x - 2ax - ax^2 + + a^4 - a^2 + 3ax + x - a^2 + 1$$

$$a^2 = \frac{a^2}{2a+1} = 0$$

$$\frac{2a^2 + a - a^2}{2a+1} = 0 \Rightarrow \frac{a^2 + a}{2a+1} = 0$$

$$\left( a \neq -\frac{1}{2}; \begin{array}{l} a \geq 0 \\ a \leq 1 \end{array} \right)$$

$$y^2 = 4a^2x^2 + 4ax^2 - 4a^3x + 4ax - - 2a^2x - 2a^2 + 2x + x^2 + a^4 + 1$$

$$a = -1;$$

$$y = -2x + x - 1 + x = -x$$

$$k^2 = 4a^2 + 4a + 1$$

$$k = (2a+1)$$

$$\begin{aligned} & \frac{b(3k-3)}{2(16a^2 + 16a + 4 - 6a - 6 + 1)^2} \\ &= \frac{b(16a+5)}{2(16a^2 + 10a)} \end{aligned}$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

- |                            |                            |                            |                            |                            |                            |                            |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|
| <input type="checkbox"/> 1 | <input type="checkbox"/> 2 | <input type="checkbox"/> 3 | <input type="checkbox"/> 4 | <input type="checkbox"/> 5 | <input type="checkbox"/> 6 | <input type="checkbox"/> 7 |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|

СТРАНИЦА  
ИЗ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\begin{cases} 4 \min(a; b) = 3(a - b)^2 \\ 3 \cdot \max(a; b) = \text{НОК}(a; b) \end{cases}; a, b \in \mathbb{N}$$

Пусть  $a > b$ :

$$4b = 3(a - b)^2$$

$$3a = \text{НОК}(a; b) \Rightarrow b : 3^{n+1}, a : 3^n \quad n = 0, \dots, \infty$$

$$b = 3k$$

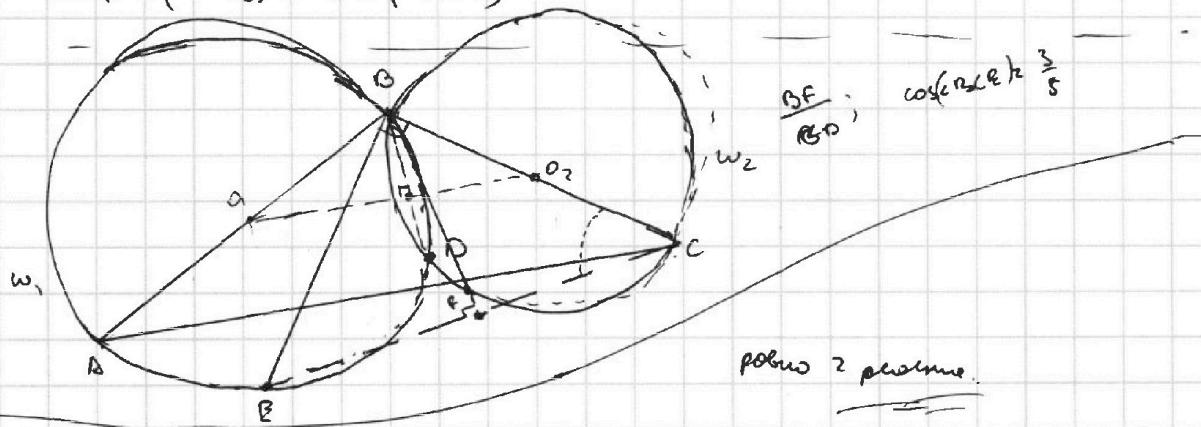
$$\begin{matrix} 3a : a \\ 3a : b \end{matrix}$$

$$3a = k \cdot b$$

$$3a \leq ab$$

$$4b = 3a^2 - 6ab + 3b^2$$

$$2b^2 - b(4 - 3b) = 3a(a - 2b)$$



$$\begin{cases} (y - x^2 - x - 1)(x^2 - 3xy + 4y^2)(y + x - 1) = 0 \\ y = (2a + 1)x - a^2 + 1 = 2ax + x - a^2 + 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} (2ax + x - a^2 + 1 - x^2 - x - 1)(x^2 - 3x + (2ax + x - a^2 + 1)) + 4(2ax + x - a^2 + 1)^2(x + x - 1) = 0 \\ x^2 - 3xy + 4y^2 = 0 \\ y + x - 1 = 0 \end{cases}$$

На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.



- |                          |                          |                          |                          |                          |                          |                          |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| <input type="checkbox"/> |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|

СТРАНИЦА  
ИЗ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$4b = 3 \left( \frac{4b}{3} - b \right)^2 \Rightarrow 3b^2 \cdot \frac{(k-3)^2}{9} = \frac{(k-3)^2}{3} \cdot b^2$$

$$b = \frac{12}{(k-3)^2}$$

$$12 / (k-3)^2 \Rightarrow (k-3)^2 = 1 \Rightarrow (k=4)$$

$$(k-3)^2 < 3 \quad \text{т.к. } k \in \mathbb{N}$$

$$(k-3)^2 = 4 \Rightarrow (k=5)$$

$$\begin{cases} a = \frac{4}{3}b \\ a = \frac{5}{3}b \end{cases}$$

$$\frac{b}{3}$$

$$b = \frac{9}{5}$$

$$a = \frac{4 \cdot 9}{3} = 12$$

$$b = 3 \cdot 3$$

$$a = 4 \cdot 3$$

$$\text{т.к.: } 8 \cdot 3 = 4 \cdot 3 \Rightarrow a = 3$$

$$\text{т.к.: } k \cdot 4 \cdot 3 = a \cdot 3$$

$$\begin{cases} a = \frac{4}{3}b \\ a = \frac{5}{3}b \end{cases}$$

$$4b = 3 \cdot \left( \frac{4b}{3} - b \right)^2$$

$$4b = 3 \cdot \left( \frac{b}{3} \right)^2 = \frac{3b^2}{9} \Rightarrow \begin{cases} b=12 \\ a=16 \end{cases}$$

$$4b = 3 \cdot \left( \frac{4b}{3} - b \right)^2 = 3 \cdot \frac{4b^2}{9} = \frac{16b^2}{3}$$

$$4b = 3 \left( \frac{2b}{3} - b \right)^2 = \frac{3 \cdot b^2}{9} = \frac{b^2}{3} \Rightarrow \begin{cases} b=3 \\ a=5 \end{cases}$$

$$m-3 = -1$$

$$m=2, m=5$$

$$m-3 = -2$$

$$m=1, m=4$$

На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

- |                          |                          |                          |                          |                          |                          |                          |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| <input type="checkbox"/> |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|

СТРАНИЦА  
ИЗ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

№)

$$\begin{cases} \text{lcm}(a; b) = 3(a-b)^2 \\ 3 \max(a; b) = \text{НОК}(a; b) \end{cases}$$

последовательность  $a > b$ ;  $4b = 3(a-b)^2$

$$3b = \text{НОК}(a; b)$$

$$; \quad \cancel{\text{НОД}(a; b) = \frac{b}{3}}$$

$$\begin{aligned} a &= p_1^{k_1} p_2^{k_2} \cdots p_n^{k_n} \\ b &= p_1^{t_1} p_2^{t_2} \cdots p_n^{t_n} \cdot 3 \end{aligned}$$

$$(a-b):4$$

$$t_1 < k_1, t_2 < k_2, \dots, t_n < k_n$$

$$\cancel{\text{НОД}(a; b) = \text{НОК}(a; b)}, \quad ab = p^3$$

$$3 \left( \frac{kb}{3} - b \right)^2 = 3 \cdot \left( \frac{kb-3b}{3} \right)^2 = (3kb - 9b)^2 / 4b$$

$$b^2(3k-9) = 4b^2 \cdot 0$$

$$\boxed{a = \frac{kb}{3}}, \quad k \in \mathbb{N}$$

$$b(b(3k-9)^2 - 4) = 0 \quad ; \quad b \neq 0$$

$$4b = 3 \left( \frac{kb}{3} - b \right)^2 = 3b^2 \cdot \left( \frac{k}{3} - 1 \right)^2$$

$$b = \frac{4}{(3k-9)^2}$$

$$b = 3, \quad a > b$$

$$b(3b\left(\frac{k}{3}-1\right)^2 - 4) = 0$$

$$12 = 3(a-3)^2$$

$$3a = \text{НОК}(a; b)$$

$$4b = 3 \left( \frac{5b}{3} - b \right)^2 = 3 \left( \frac{5}{3} - 1 \right)^2 \cdot b^2$$

$$\left( \frac{5}{3} - 1 \right)^2 \cdot 3 = \frac{(5-3)^2}{3} \cdot 3 = \frac{(5-3)^2}{3}$$

$$4 \in (a-3)^2$$

$$a-3 = 2$$

$$a = 5$$

$$b \left( \left( \frac{5}{3} - 1 \right)^2 \cdot 3b - 4 \right) = 0$$

$$\boxed{b=3, a=5}$$

$$a = \frac{5b}{3}$$

$$5 \cdot 3 - 3 = 6$$

$$b = \frac{4 \cdot 3}{(5 \cdot 3 - 9)^2} = \frac{4 \cdot 3}{9}$$

$$b \left( \left( \frac{5 \cdot 3 - 9}{3} \right)^2 \cdot b - 4 \right) = 0$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

- |                            |                            |                            |                            |                            |                            |                            |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|
| <input type="checkbox"/> 1 | <input type="checkbox"/> 2 | <input type="checkbox"/> 3 | <input type="checkbox"/> 4 | <input type="checkbox"/> 5 | <input type="checkbox"/> 6 | <input type="checkbox"/> 7 |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|

СТРАНИЦА  
ИЗ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\frac{1}{\log_2 x} + \frac{9}{\log_2 y} - \frac{16}{\log_2 xy} \geq 0;$$

$$\begin{array}{r} 16 \\ -19 \\ \hline 6 \end{array}$$

$$\frac{\log_2 xy + \log_2 y + 9 \log_2 x \cdot \log_2 xy - 16 \log_2 x \cdot \log_2 y}{\log_2 xy \cdot \log_2 x \cdot \log_2 y} \geq 0$$

~~$\log_2 x > 0$~~

$$\log_2 x \cdot \log_2 y + \log_2^2 y + 9 \log_2^2 x + 9 \log_2 x \cdot \log_2 y - 16 \log_2 x \cdot \log_2 y \geq 0$$

$$= \log_2^2 y + 6 \log_2 x \log_2 y + 9 \log_2^2 x \geq (\log_2 y - 3 \log_2 x)^2 \geq 0$$

$$\log_2 y = 3 \log_2 x \Rightarrow \boxed{y = x^3}$$

$$(x^3 - 1) = (x-1)(x^2 + x + 1) =$$

$$\frac{x-1}{x+1} > \frac{3}{7} \cdot \frac{y-1}{y+1} = \frac{3}{7} \cdot \frac{x^3 - 1}{x^3 + 1} =$$

$$(x^3 + 1) = (x+1)(x^2 - x + 1) =$$

$$= \frac{3}{7} \cdot \frac{(x-1)}{(x+1)} \cdot \frac{(x^2 + x + 1)}{(x^2 - x + 1)}$$

$$= x^3 + x^2 + x - x^2 - x + 1$$

$$\frac{(x-1)}{(x+1)} \cdot \left( 1 - \frac{3}{7} \frac{(x^2 + x + 1)}{(x^2 - x + 1)} \right) > 0 ;$$

$$\begin{cases} \frac{x-1}{x+1} > 0 \Rightarrow x > 1 \\ 1 - \frac{3}{7} \frac{(x^2 + x + 1)}{(x^2 - x + 1)} > 0 \end{cases} \Rightarrow \boxed{x > 2}$$

$$x > 0; x \neq 1 \quad x \in \{2, \dots, 3\}$$

30 нап.

$$\frac{7x^2 - 7x + 7 - 3x^2 + 3x - 3}{7(x^2 - x + 1)} > 0$$

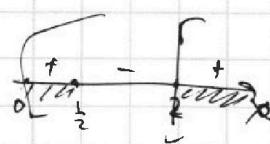
$$x^2 - x + 1$$

$$D = 1 - 4 < 0$$

$$\frac{4x^2 - 10x + 4}{7(x^2 - x + 1)} > 0 \quad \frac{2(2x^2 - 5x + 2)}{7} > 0$$

$$D = 25 - 16 = 9$$

$$x = \frac{5 \pm 3}{4} \Rightarrow \frac{2}{\frac{1}{2}}$$





На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

- |                            |                            |                            |                            |                            |                            |                            |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|
| <input type="checkbox"/> 1 | <input type="checkbox"/> 2 | <input type="checkbox"/> 3 | <input type="checkbox"/> 4 | <input type="checkbox"/> 5 | <input type="checkbox"/> 6 | <input type="checkbox"/> 7 |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|

СТРАНИЦА  
ИЗ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$n^2) f(x) = x^2 + bx + c$$

$f(x) = 2x^2$  - единст. решение,  $f(x) = -8$  - единст. решение.

$$f(x) = 0 \quad |x_1 + x_2 = ?$$

$$x^2 + bx + c = 2x^2 \Rightarrow x^2 + bx - c = 0$$

$$x^2 + bx + c = -8 \Rightarrow x^2 + bx + c + 8 = 0$$

$$D = b^2 + 4c = 0$$

$$\boxed{b^2 = -4c}$$

$$D = b^2 - 4c = 32 \geq 0$$

$$\cancel{x_1 + x_2 = c = -4}$$

$$-4c - 4c = 32 \Rightarrow c = -\frac{32}{8} = -4$$

$$n^2) n = 2^{401} \cdot 3^{500}; \quad n = xy, \quad y \mid x$$

$$n = kx^2$$

$$2^{401} \cdot 3^{500} = 2 \cdot (2^{200})^2 \cdot (3^{250})^2$$

$$x = 2^{0..200} \cdot 3^{0..250}$$

$$y = kx \quad \cancel{y = kx}$$

$$y = kx: \frac{2^{200}}{3^{250}} < \frac{2^{200}}{3^{250}} \quad \begin{array}{r} 2^{200} \\ \times 3^{250} \\ \hline 2^{50} \cdot 3^{50} \end{array}$$

$$2^{50} \cdot 3^{50} = 50451 \text{ смес.}$$

$$n^3) x, y \in \mathbb{Z}$$

$$\left\{ \log_x 2 + 3 \log_y 8 + 4 \log_{xy} \frac{1}{16} = 0 \right.$$

$$\frac{x-1}{x+1} > \frac{3y-3}{7y+7} = \frac{3}{7} \cdot \frac{y-1}{y+1}$$

$$x \leq 31$$

$$x, y \neq 1, \quad \underline{xy \geq 0}$$

$$\log_x 2 + 3 \log_y 2 + 16 \log_{xy} 2 = 0$$

$$\frac{1}{\log_2 x} + \frac{3}{\log_2 y} - \frac{16}{\log_2 xy} = 0$$

$$\frac{1}{\log_2 x} + \frac{3}{\log_2 y} - \frac{16}{\log_2 x + \log_2 y} = 0$$

$\log_x 2 + \log_y 2$