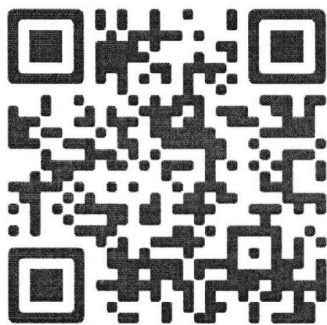




МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

11 КЛАСС. Вариант 3



1. [3 балла] Найдите все тройки натуральных чисел $(A; B; C)$ такие, что:

- A — четырёхзначное число, составленное из одинаковых цифр,
- B — трёхзначное число, хотя бы одна из цифр которого равна 6,
- C — двузначное число, хотя бы одна из цифр которого равна 3,
- произведение $A \cdot B \cdot C$ является квадратом некоторого натурального числа.

2. [3 балла] Положительные числа x и y таковы, что значение выражения $K = \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{5}{xy}$ не изменяется, если x уменьшить на 2, а y — увеличить на 2. Найдите все возможные значения выражения $M = x^3 - y^3 - 6xy$.

3. [5 баллов] а) Найдите все пары действительных чисел $(x; y)$ такие, что $(\sin \pi x + \sin \pi y) \sin \pi x = (\cos \pi x - \cos \pi y) \cos \pi x$.

б) Сколько пар целых чисел (x, y) удовлетворяют одновременно этому уравнению и неравенству

$$\arcsin \frac{x}{6} + \arcsin \frac{y}{2} < \pi?$$

4. [4 балла] В начале месяца было выделено 4 билета на праздничный концерт, которые планировалось случайным образом распределить между одиннадцатиклассниками. В конце месяца выяснилось, что будет выделено больше 4 билетов. Одиннадцатиклассники Петя и Вася вычислили, что вероятность им обоим вместе попасть на концерт в начале месяца была в 6 раз меньше, чем оказалась в конце месяца. Сколько всего было выделено билетов на концерт в конце месяца, если количество одиннадцатиклассников не изменилось?

5. [5 баллов] Точка O — центр окружности ω_1 , описанной около остроугольного треугольника ABC . Окружность ω_2 , описанная около треугольника BOC , пересекает отрезок AB в точке P . Найдите площадь треугольника ABC , если $AP = 25$, $BP = 5$, $AC = 35$.

6. [6 баллов] На координатной плоскости изображена фигура $\Phi(\alpha)$, состоящая из всех точек, координаты $(x; y)$ которых удовлетворяют системе неравенств

$$\begin{cases} (x + 5\sqrt{2} \cos \alpha)(y + 5\sqrt{2} \sin \alpha) \leq 0, \\ x^2 + y^2 \leq 169. \end{cases}$$

Найдите максимальное значение M периметра (длины границы) фигуры $\Phi(\alpha)$ и укажите все значения α , при которых оно достигается.

7. [6 баллов] Шар Ω касается всех рёбер правильной усечённой пирамиды, а шар ω касается всех её граней. Пусть сторона верхнего основания меньше, чем сторона нижнего. Найдите отношение площади верхнего основания пирамиды к площади её боковой поверхности.



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☒ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА
1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

N1. Пусть $A = \overline{aaaa} = 10^3a + 10^2a + 10a + a = 1111a$
 $= 11 \cdot 101a$

Пусть $A \cdot B \cdot C = N^2$
 $11 \cdot 101a \cdot B \cdot C = N^2$

1) N^2 - точный квадрат, $N^2:101 \rightarrow N^2:101^2 \rightarrow$

$$\left. \begin{array}{l} a:101, a \leq 9 \\ B:101, B \leq 15 \\ C:101, C \leq 99 \end{array} \right\} \rightarrow B:101$$

Поскольку B содержит цифру 6 $\rightarrow B = 101 \cdot 6 = 606$.

$N^2 = 11 \cdot 101 \cdot a \cdot 101 \cdot 2 \cdot 3 \cdot C$

2) $N^2:11 \rightarrow N^2:11^2 \rightarrow C:11$, C содержит цифру 3
и C - двузначное $\rightarrow C = 33$

3) $N^2:2 \rightarrow a:2 \rightarrow a=2$, т.к. $a \leq 9$.

$N^2 = 11 \cdot 101 \cdot 2 \cdot 101 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 11 = 11^2 \cdot 101^2 \cdot 2^2 \cdot 3^2$

тупайка (2222, 606, 33),

4) $N^2:2 \rightarrow a:2 \rightarrow a=8$

$N^2 = 11 \cdot 101 \cdot 2^3 \cdot 101 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 11 = 11^2 \cdot 101^2 \cdot 2^4 \cdot 3^2$

тупайка (8888, 606, 33)

Ближайшие тупайки больше не имеют, т.к. другие значения для a (3, 4, 5, 6, 7, 9) не подходят.

Ответ: (2222, 606, 33)
(8888, 606, 33).



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐

2 ☒

3 ☐

4 ☐

5 ☐

6 ☐

7 ☐

СТРАНИЦА
1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Из условия:

$$K = \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{5}{x+y} = \frac{2}{x} + \frac{1}{2y} + \frac{5}{x+y}$$

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{2}{x} + \frac{1}{2y}$$

$$2y + 2x = 4y + x \rightarrow x = 2y$$

x в два раза больше y .

$$\text{Тогда } M = 8y^3 - y^3 - 6 \cdot y \cdot 2y = 7y^3 - 12y^2$$

$$\text{Рассмотрим уравнение: } K = \frac{1}{2y} + \frac{1}{y} + \frac{5}{2y}$$

$$K = \frac{3y + 5}{2y^2}$$

$$2K \cdot y^2 - 3y - 5 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} y = \frac{3 + \sqrt{9 + 40K}}{4K} \\ y = \frac{3 - \sqrt{9 + 40K}}{4K} \end{cases}$$

(2) не подходит т.к. $3 - \sqrt{9 + 40K} < 0$

$$y = \frac{3 + \sqrt{9 + 40K}}{4K}$$

Для каждого положительного K существует ровно одно значение y .

Следовательно, существует ровно одно

значение M . $M = 7 \left(\frac{3 + \sqrt{9 + 40K}}{4K} \right)^3 - 12 \left(\frac{3 + \sqrt{9 + 40K}}{4K} \right)^2$

Ответ: $M = 7 \left(\frac{3 + \sqrt{9 + 40K}}{4K} \right)^3 - 12 \left(\frac{3 + \sqrt{9 + 40K}}{4K} \right)^2$



На одной странице можно оформлять **только одну задачу**. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☒	☐	☐	☐	☐

СТРАНИЦА

2 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Пар λ и μ не меняет.

всего: 32.

ответ: $\delta) 32$.



1 ☐ 2 ☐ 3 ☒ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА
1 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$a) (\sin^2 \pi + \sin^2 \pi y) \cdot \sin^2 \pi = (\cos^2 \pi + \cos^2 \pi y) \cdot \cos^2 \pi$$

$$\cos^2 \pi + \sin^2 \pi y = \cos^2 \pi + \cos^2 \pi y + \sin^2 \pi y \cdot \sin^2 \pi$$

$$\cos^2 \pi = \cos(\pi + -\pi y) \Rightarrow \begin{cases} 2\pi = \pi + -\pi y + 2\pi k \\ 2\pi = -\pi + \pi y + 2\pi n \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = -y + 2k \\ 3x = y + 2n \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = -x + 2k \\ y = 3x - 2n \end{cases} \quad n, k \in \mathbb{Z}$$

Подставляем пары: $(x; -x + 2k), x \in \mathbb{R}, k \in \mathbb{Z}$

b) $(x; 3x - 2n), x \in \mathbb{R}, n \in \mathbb{Z}$

$$\arcsin \frac{x}{6} + \arcsin \frac{y}{2} < \pi$$

$$0.23: \begin{cases} -6 \leq x \leq 6 \\ -2 \leq y \leq 2 \end{cases}$$

$$\text{Известно, что: } \arcsin t \leq \frac{\pi}{2} \Rightarrow$$

Неравенство не выполняется, если
 $x = 6$
 $y = 2$.

I. пара $(x, -x + 2k)$
 x и y имеют одну переменную.

$$1. x = 2t: -6, -4, -2, 0, 2, 4, 6$$

$$y: y = \frac{-2, 0, 2}{2(k-t)}$$

всего пар $3 \cdot 7 = 21$, но пара $(6, 2)$ не подходит $\Rightarrow 20$.

$$2. x = 2t + 1: -5, -3, -1, 1, 3, 5$$

$$y: -1, 1$$

$$y = \frac{-2t - 1 + 2k}{2(k-t) - 1} = 2(k-t) - 1$$

всего пар $2 \cdot 6 = 12$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☒	☐

СТРАНИЦА
1 из 3

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\begin{cases} (x + 5\sqrt{2} \cdot \cos \alpha)(y + 5\sqrt{2} \cdot \sin \alpha) \leq 0 & (1) \\ x^2 + y^2 \leq 169 & (2) \end{cases}$$

(2): задает точки внутри круга радиуса 13 с центром $(0; 0)$.

(1): задает область между прямыми

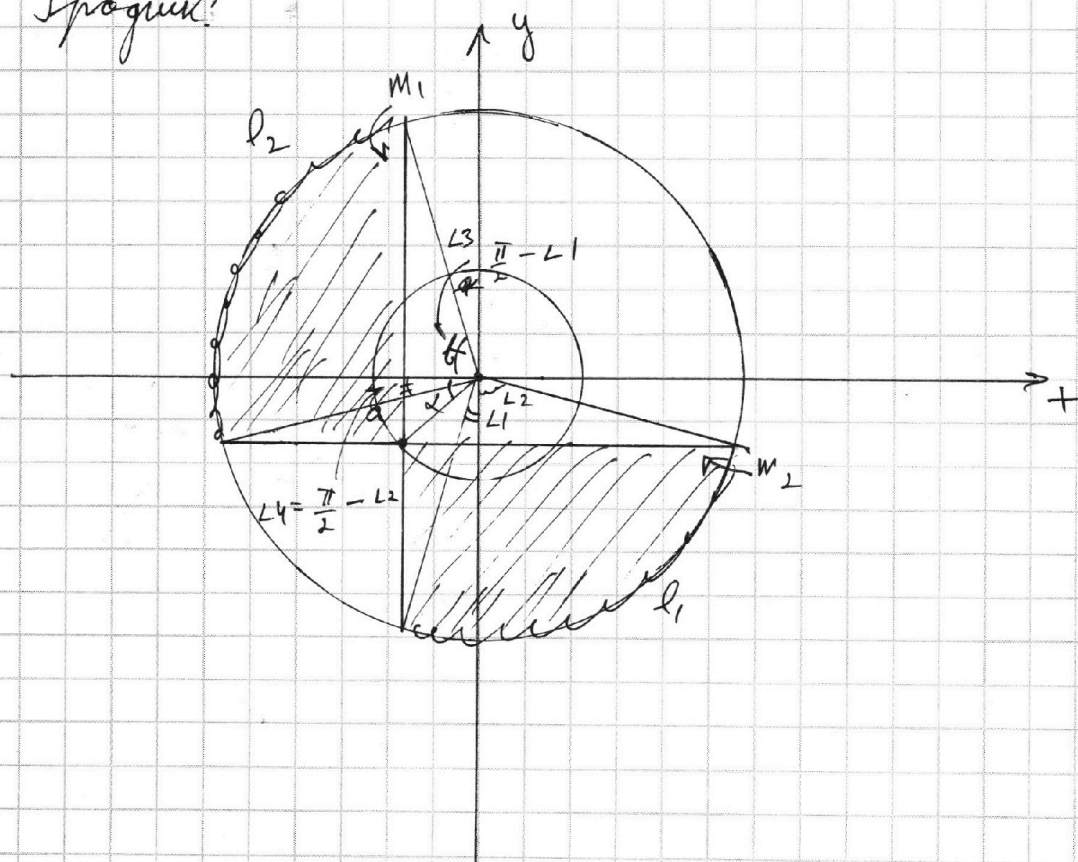
$$x = -5\sqrt{2} \cdot \cos \alpha$$

точка (x, y) лежит

$$y = -5\sqrt{2} \cdot \sin \alpha$$

на окружности радиуса $5\sqrt{2}$ с центром $(0; 0)$.

График:





На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

☐☐☐☐☐☒☐

СТРАНИЦА
3 из 3

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\begin{aligned} M\left(\frac{1}{2}\right) &= 13\pi + 2\sqrt{169 - 25} + 2\sqrt{119 + 25} = \\ &= 13\pi + 2 \cdot 12 + 2 \cdot 12 = 13\pi + 48. \end{aligned}$$

$$\sin^2 \alpha = \frac{1}{2} \rightarrow \sin \alpha = \pm \frac{1}{\sqrt{2}} \rightarrow \alpha = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{2} k, \quad k \in \mathbb{Z}$$

Ответ: $M_{\min} = 13\pi + 48$

$$\alpha = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{2} k, \quad k \in \mathbb{Z}.$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☒ 7 ☐

СТРАНИЦА

2 ИЗ 3

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Фигура 4 состоит из точек, закрашенной области. Пусть $a = |5\sqrt{2} \cdot \sin \alpha|$

$$b = |5\sqrt{2} \cdot \cos \alpha|$$

В периметр M входят дуги окружности (2)

Обозначим углы $\angle 1, \angle 2, \angle 3$. На дугу l_1

открывается угол $\angle 1 + \angle 2 \Rightarrow l_1 = 2\pi \cdot 13 \cdot \frac{(\angle 1 + \angle 2)}{2\pi}$

На дугу l_2 открывается угол $\angle 3 + \angle 4$

$$l_2 = 2\pi \cdot 13 \cdot \frac{(\angle 3 + \angle 4)}{2\pi}$$

$$l_1 + l_2 = \frac{2\pi \cdot 13}{2\pi} (\angle 1 + \angle 2 + \angle 3 + \angle 4) = 13\pi$$

Длины отрезков m_1 и m_2 :

$$m_1 = 2\sqrt{169 - b^2}, \quad m_2 = 2\sqrt{169 - a^2}$$

$$\text{тогда } M = 13\pi + 2\sqrt{169 - 50\cos^2 \alpha} + 2\sqrt{169 - 50\sin^2 \alpha}$$

$$= 13\pi + 2\sqrt{119 + 50\sin^2 \alpha} + 2\sqrt{169 - 50\sin^2 \alpha}$$

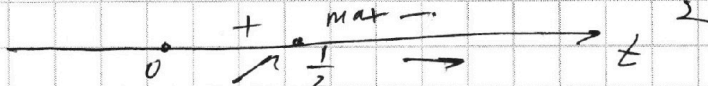
$$\text{Пусть } t = \sin^2 \alpha$$

$$M = 13\pi + 2\sqrt{119 + 50t} + 2\sqrt{169 - 50t}$$

Исследуем $M(t)$ на экстремумы.

$$M' = \frac{2 \cdot 50}{2\sqrt{119 + 50t}} - \frac{2 \cdot 50}{2\sqrt{169 - 50t}} = 0$$

$$119 + 50t = 169 - 50t \rightarrow t = \frac{1}{2}$$





На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

1
☐

2
☐

3
☐

4
☐

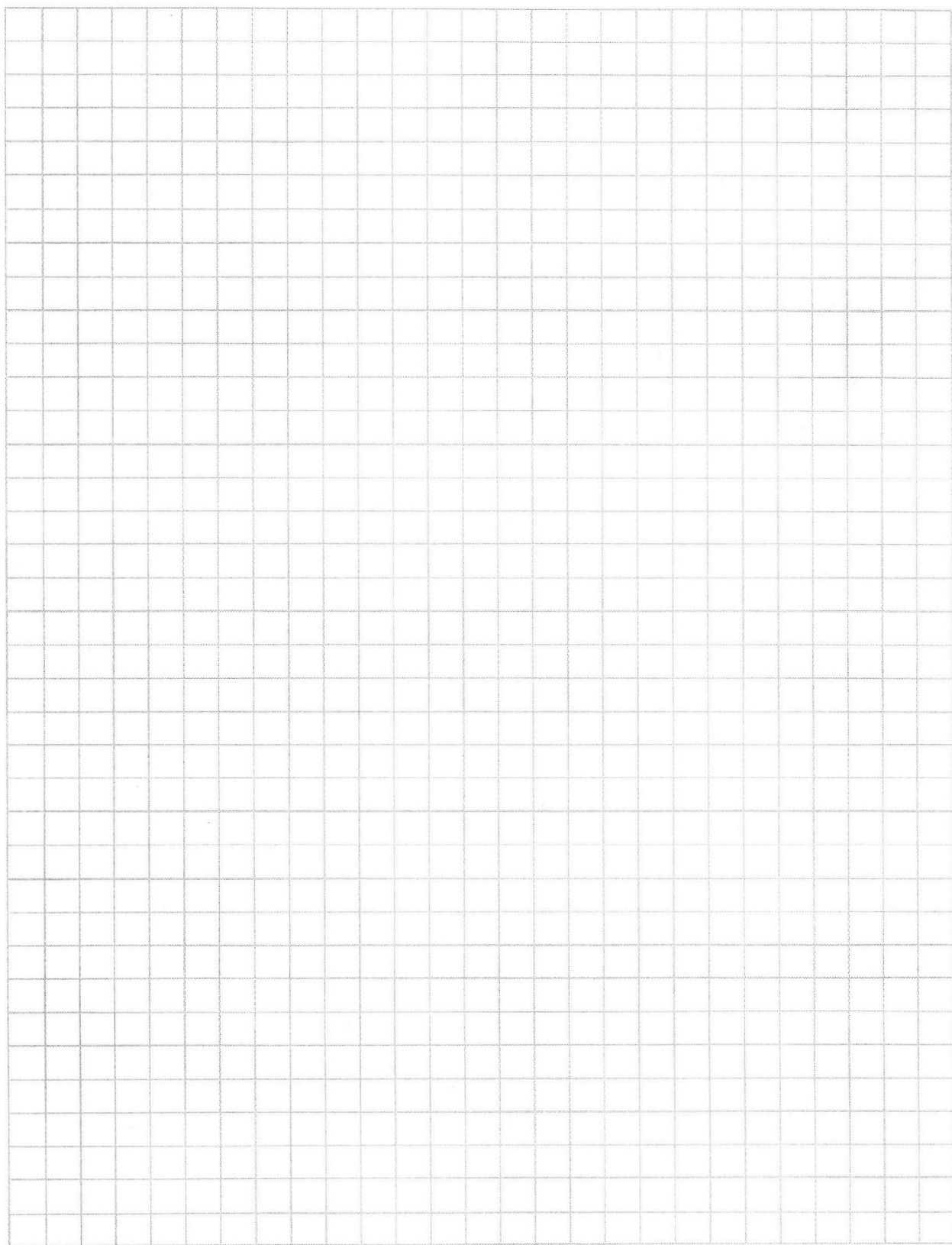
5
☐

6
☐

7
☐

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. **Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно.** Порча QR-кода недопустима!



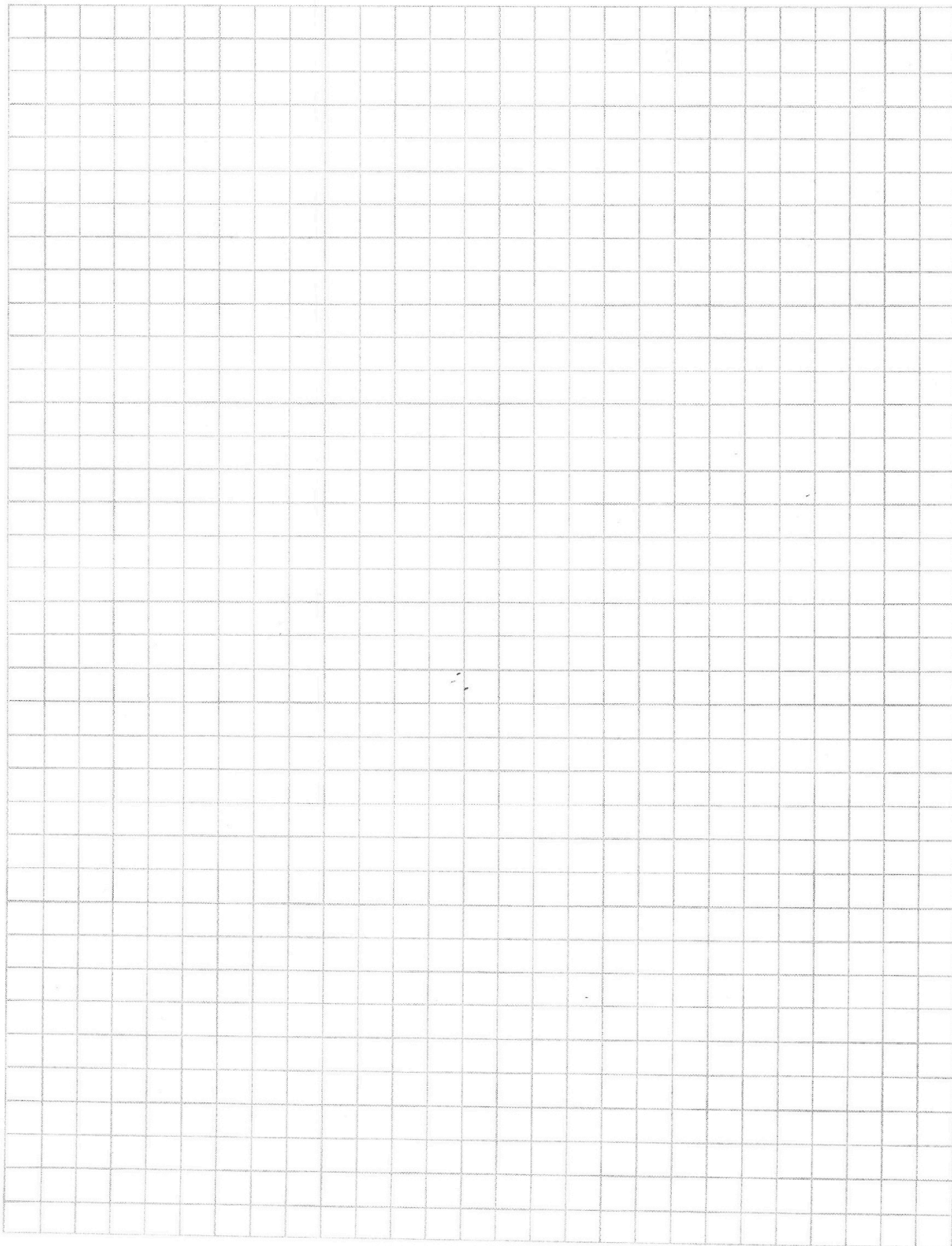


На одной странице можно оформлять **только одну задачу**. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении **каждой задачи отдельно**.

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!





На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

☐☐☐☐☐☐☐

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\lg^4 \alpha = 9 \lg^2 \beta$$

$$\frac{1}{\cos^4 \alpha} = 9 \lg^2 \beta + 1$$

$$\cos \alpha = \frac{1}{\sqrt{1 + 9 \lg^2 \beta}}$$

$$\sin$$

$$\cos^4 \alpha = \frac{1}{1 + 9 \lg^2 \beta}$$

$$\sin^4 \alpha = 1 - \frac{1}{1 + 9 \lg^2 \beta}$$

co

$$\sin \alpha = \frac{3 \lg \beta}{\sqrt{1 + 9 \lg^2 \beta}}$$

$$\sin^4 \alpha = \frac{9 \lg^2 \beta}{1 + 9 \lg^2 \beta}$$

$$\frac{5}{\sqrt{1 + 9 \lg^2 \beta}} = \frac{10}{\sin^4 \beta} \left(\frac{3 \lg \beta}{\sqrt{1 + 9 \lg^2 \beta}} \cdot \cos \beta - \sin \beta \right)$$

$$5 = \frac{10}{\sin^4 \beta} (3 \lg \beta \cdot \cos \beta - \sin \beta)$$

$$1 = \frac{2}{\sin^4 \beta} (3 \cdot \sin \beta - \sin \beta)$$

$$\sin \beta = 2 \cdot 2 \sin \beta$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА

__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$5 = \frac{R}{\cos \alpha} \cdot \sin(\alpha - \beta)$$

$$\frac{35}{2} \sqrt{\frac{9}{4} \lg^2 \beta + 1} = 10 \cdot \frac{5}{2}$$

$$\frac{20}{\sin \beta} = 2R$$

$$\frac{35}{\sin(\alpha + \beta)} = 2R$$

$$R = \frac{10}{\sin \beta}$$

$$5 = \frac{10}{\sin \beta \cdot \cos \alpha} (\sin \alpha \cdot \cos \beta - \cos \alpha \cdot \sin \beta)$$

$$5 = 10 \left(\frac{\lg \alpha}{\lg \beta} - 1 \right)$$

$$\lg \alpha = \frac{3}{2} \lg \beta$$

$$1 = 2 \left(\frac{\lg \alpha}{\lg \beta} - 1 \right)$$

$$\lg^2 \alpha = \frac{9}{4} \lg^2 \beta$$

$$\frac{1}{\cos^2 \alpha} = \frac{9}{4} \lg^2 \beta + 1$$

$$3 + \lg \beta =$$

$$\frac{2 \lg \alpha}{\lg \beta} = 3$$

$$2 \lg \alpha = 3 \lg \beta$$

$$\cos \alpha = \frac{1}{\sqrt{\frac{9}{4} \lg^2 \beta + 1}}$$

$$\sin \alpha = \frac{\frac{3}{2} \lg \beta}{\sqrt{\frac{9}{4} \lg^2 \beta + 1}}$$

$$\sin \alpha =$$

$$\frac{35}{2} = \frac{10}{\sin \beta} (\sin \alpha \cdot \cos \beta + \cos \alpha \cdot \sin \beta)$$

$$\frac{35}{2} = \frac{10}{\sin \beta} \left(\frac{\frac{3}{2} \cdot \sin \beta}{\sqrt{\frac{9}{4} \lg^2 \beta + 1}} + \frac{\sin \beta}{\sqrt{\frac{9}{4} \lg^2 \beta + 1}} \right)$$

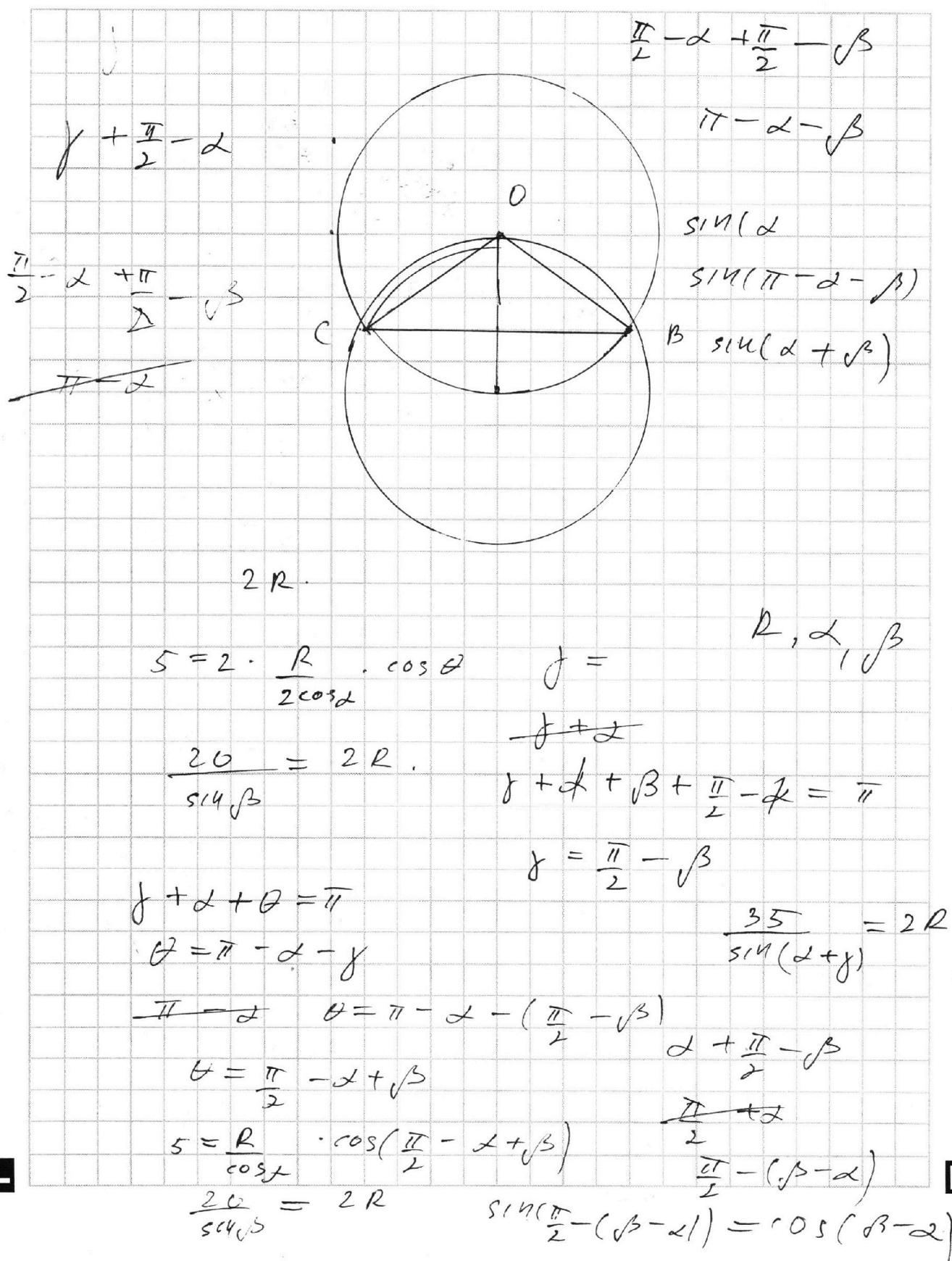


На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!





На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\left\{ \begin{aligned} 5 &= \frac{R}{\cos \alpha} \cdot \sin(\alpha - \beta) \end{aligned} \right.$$

$$\left\{ \begin{aligned} \frac{20}{\sin \beta} &= 2R \end{aligned} \right.$$

$$\left\{ \begin{aligned} \frac{35}{\cos(\beta - \alpha)} &= 2R \end{aligned} \right.$$

$\cos$

$$5 = \frac{R}{\cos \alpha} \cdot \sin(\alpha - \beta)$$

$$\frac{20}{\sin \beta} = 2R$$

$$\frac{35}{\cos(\alpha - \beta)} = 2R$$

$$5 \cdot \cos \alpha = R (\sin \alpha \cdot \cos \beta - \cos \alpha \cdot \sin \beta)$$

$$10 = R \cdot \sin \beta$$

$$35 = 2R (\cos \alpha \cdot \cos \beta + \sin \alpha \cdot \sin \beta)$$

$$R = \frac{10}{\sin \beta}$$

$$\left\{ \begin{aligned} 5 \cdot \cos \alpha &= \frac{10}{\sin \beta} (\sin \alpha \cdot \cos \beta - \cos \alpha \cdot \sin \beta) \end{aligned} \right.$$

$$\left\{ \begin{aligned} 35 &= 2 \cdot \frac{10}{\sin \beta} (\cos \alpha \cdot \cos \beta + \sin \alpha \cdot \sin \beta) \end{aligned} \right.$$

$$5 = \frac{10}{\sin \beta \cdot \cos \alpha} (\sin \alpha \cdot \cos \beta - \cos \alpha \cdot \sin \beta)$$

$$5 = 2 \left(\frac{\tan \alpha}{\tan \beta} - 1 \right)$$

$$3 = \frac{\tan \alpha}{\tan \beta}$$

$$\tan \alpha = 3 \tan \beta$$

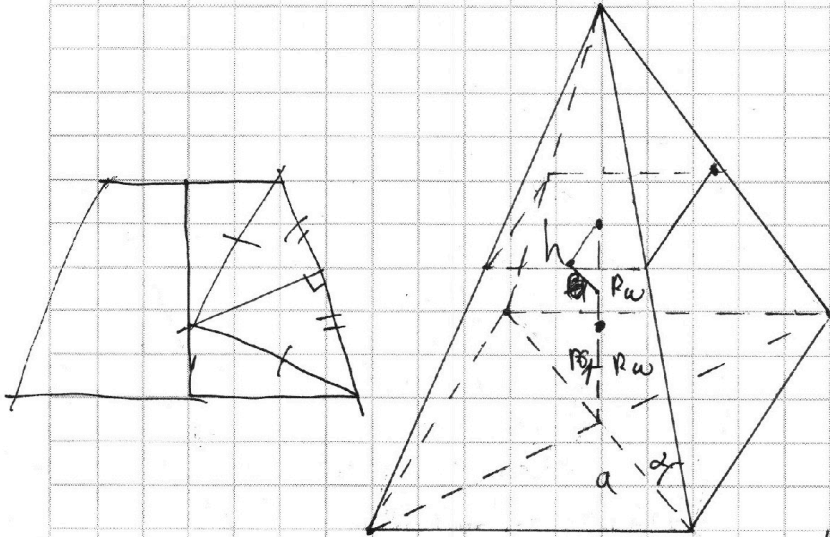


На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

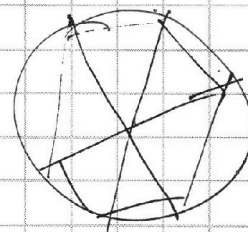
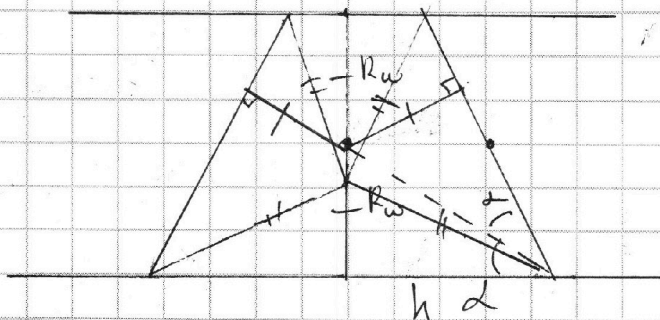
СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



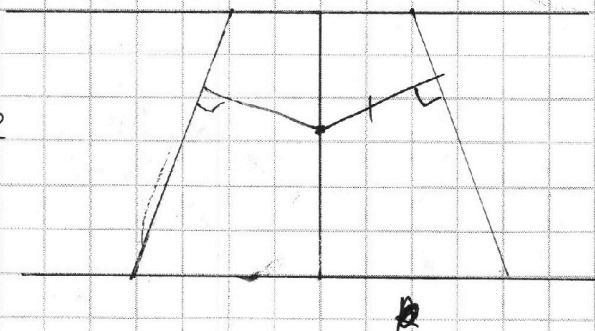
n углов

$$\frac{2\pi}{n}$$



$$\frac{n - \frac{2\pi}{n}}{2} = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{n}$$

$$\text{tg } \alpha = \frac{Rw}{h}$$

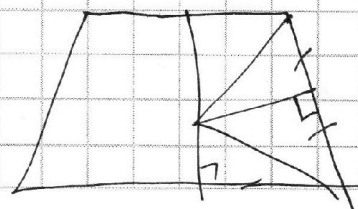


$$h = R \cdot \sin\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{n}\right)$$

$$h = R \cdot \cos \frac{\pi}{n}$$

$$h = \frac{Rw}{\text{tg } \alpha}$$

$$\frac{Rw}{\text{tg } \alpha} = R \cdot \cos \frac{\pi}{n}$$



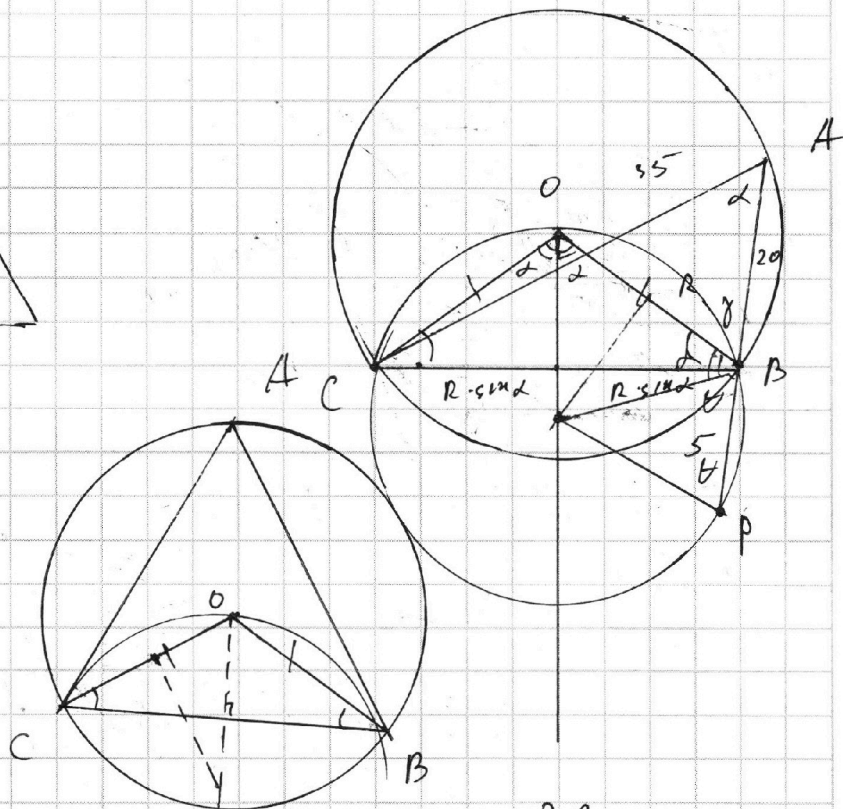
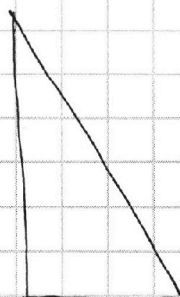


На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА
из

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



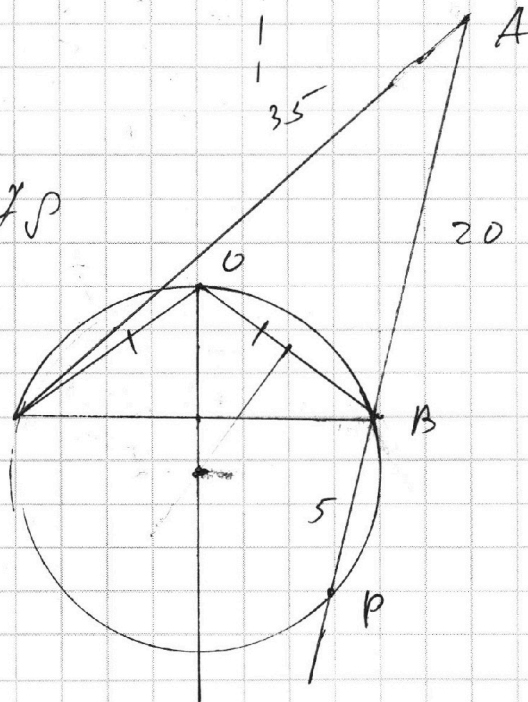
$$\frac{2R \sin \alpha}{\sin 2\alpha} = 2\rho$$
$$R = \rho$$

$$S = \frac{1}{2} \cdot 20 \cdot 35 \cdot \sin \alpha$$

$$\frac{2R \sin \alpha}{\sin 2\alpha} = 2\rho$$

$$\rho = \frac{R \sin \alpha}{2 \sin \alpha \cos \alpha}$$

$$\rho = \frac{R}{2 \cos \alpha}$$





На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА
— ИЗ —

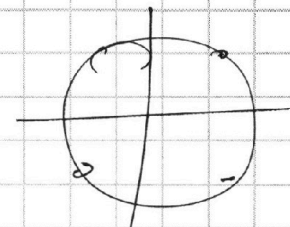
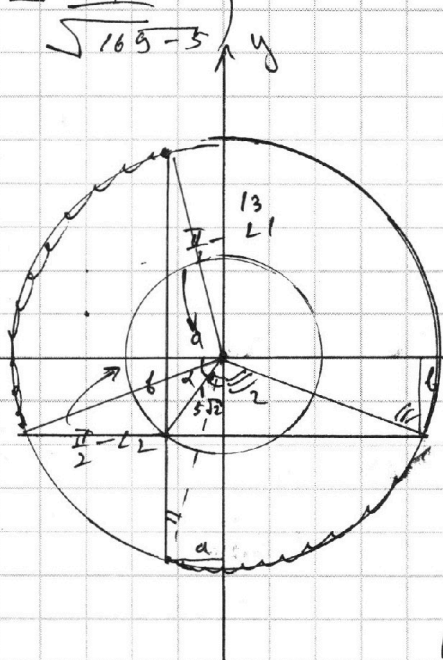
Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$50 \left(\frac{1}{\sqrt{119+5}} - \frac{1}{\sqrt{169-5}} \right) y$$

$$\frac{1}{\sqrt{119}} \quad 119$$

$$\frac{1}{119} \quad + \frac{25}{44}$$

$$24$$



$$L_1 = 2 \sqrt{13^2 - a^2}$$

$$a = |5\sqrt{2} \cdot \cos \alpha| \quad \sin L_1 = \frac{a}{13} \quad L_2 = 2 \sqrt{13^2 - b^2}$$

$$b = |5\sqrt{2} \cdot \sin \alpha| \quad \cos L_2 = \frac{b}{13}$$

$$l_1 = 2\pi \cdot 13 \cdot \frac{(L_1 + L_2)}{2\pi}$$

$$l_2 = 2\pi \cdot 13 \cdot \frac{(\pi - L_1 - L_2)}{2\pi}$$

$$\frac{169}{50} \quad \frac{119}{119}$$

$$l = \frac{2\pi \cdot 13}{2\pi} (L_1 + L_2 - L_1 - L_2 + \pi)$$

$$= -\pi \cdot 13$$

$$p = 13\pi + 2 \sqrt{13^2 - a^2} + 2 \sqrt{13^2 - b^2}$$

$$= 13\pi + 2 \sqrt{169 - 50 \cdot \cos^2 \alpha} + 2 \sqrt{169 - 50 \cdot \sin^2 \alpha}$$

$$= 13\pi + 2 \sqrt{119 + 50 \sin^2 \alpha} + 2 \sqrt{169 - 50 \sin^2 \alpha}$$

$$p' = \frac{2}{2 \sqrt{119 + 50 \sin^2 \alpha}} \cdot \frac{4}{\alpha}$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

☐☐☐☐☐☐☐

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$p = 13\pi + 2\sqrt{119 + 50t} + 2\sqrt{169 - 50t}$$

$$p' = \frac{2}{2\sqrt{119 + 50t}} \cdot 50 + \frac{2}{2\sqrt{169 - 50t}} \cdot (-50) = 0$$

$$\frac{1}{\sqrt{119 + 50t}} = \frac{1}{\sqrt{169 - 50t}}$$

$$169 - 50t = 119 + 50t$$

~~119~~

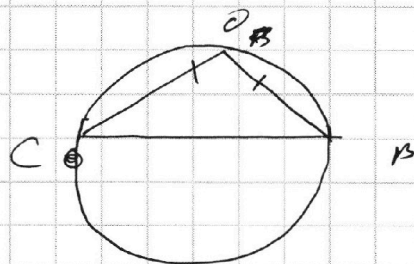
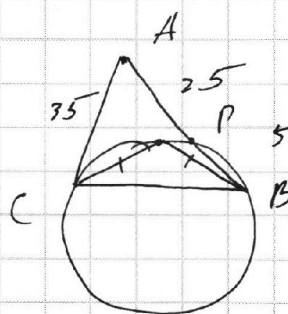
$$\begin{array}{r} 169 \\ - 119 \\ \hline 50 \end{array}$$

$$100t = 50$$

$$t = \frac{1}{2}$$

$$\frac{1}{x/2} + \frac{1}{2y} = \frac{1}{x} + \frac{1}{y}$$

$$\frac{2}{x} + \frac{1}{2y} = \frac{1}{x} + \frac{1}{y}$$



$$K = A = 2y$$

$$x: 2t$$

$$t$$

$$y: t$$

$$2t$$

$$4y^3 - 12y^2$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$p_2 = \frac{\overset{m-2}{\underset{m}{C}}_{n-2}}{\underset{n}{C}} = \frac{\frac{(n-2)!}{(m-2)!(n-m)!}}{\frac{n!}{m!(n-m)!}} = \frac{(n-2)!}{(m-2)!} \cdot \frac{m!}{n!} = \frac{m(m-1)}{n(n-1)}$$

$$p_m = \frac{m(m-1)}{n(n-1)}$$

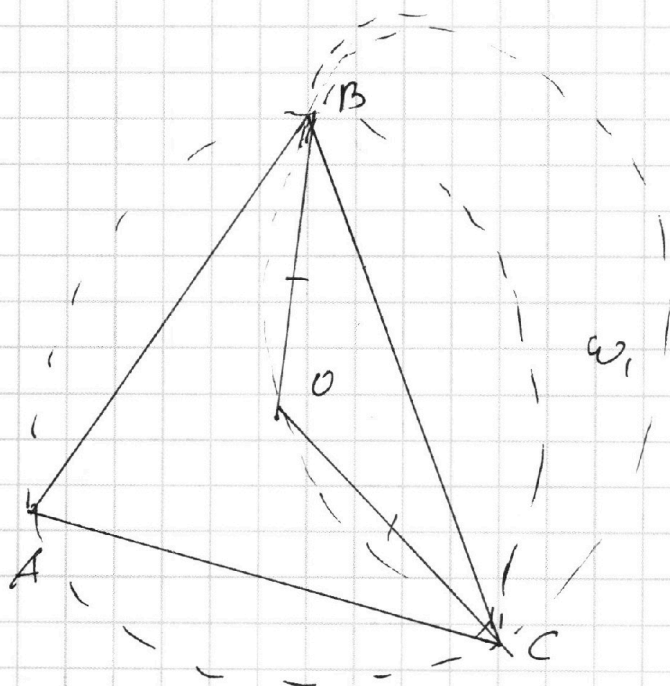
$$m^2 - m = 72$$

$$m^2 - m - 72 = 0$$

$$\frac{6 \cdot 12}{n(n-1)} = \frac{m(m-1)}{n(n-1)}$$

$$m = 1 + 288 = 289$$

$$m = \frac{1 + \sqrt{1 + 4 \cdot 72}}{2} = \frac{1 + \sqrt{289}}{2} = 9$$





На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

II. пара $(+; 3t - 2u)$

$+u$ и y имеют одну четность.

1. $x = 2t$: $y = 2(3t - u)$

$t: -6, -4, -2; 0, 2, 4, 6$

$y: -2, 0, 2$

20 пар

2. $x = 2t + 1$

$t: -5, -3, -1, 1, 3, 5$

$y = 6t + 3 - 2u = 2(3t - u) + 3$ $y: -1, 1$

12 пар.

n -конт

n -конт-в

сдвигами по осям

4 случая

в начале;

все варианты: C_n^4

монотонная вар: C_{n-2}^2

в конце: все: C_n^m $(n-4)(n-3)(n-2)$

и: C_{n-2}^{m-2}

$$p_1 = \frac{C_{n-2}^2}{C_n^4} = \frac{\frac{(n-2)!}{2!(n-4)!}}{\frac{n!}{4!(n-4)!}} = \frac{(n-2)(n-3)}{(n-4)(n-3)(n-2)(n-1)n}$$

$$= \frac{(n-3)(n-2)}{2 \cdot (n-3)(n-2)(n-1)n} = \frac{12}{n(n-1)}$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

1
☐

2
☐

3
☐

4
☐

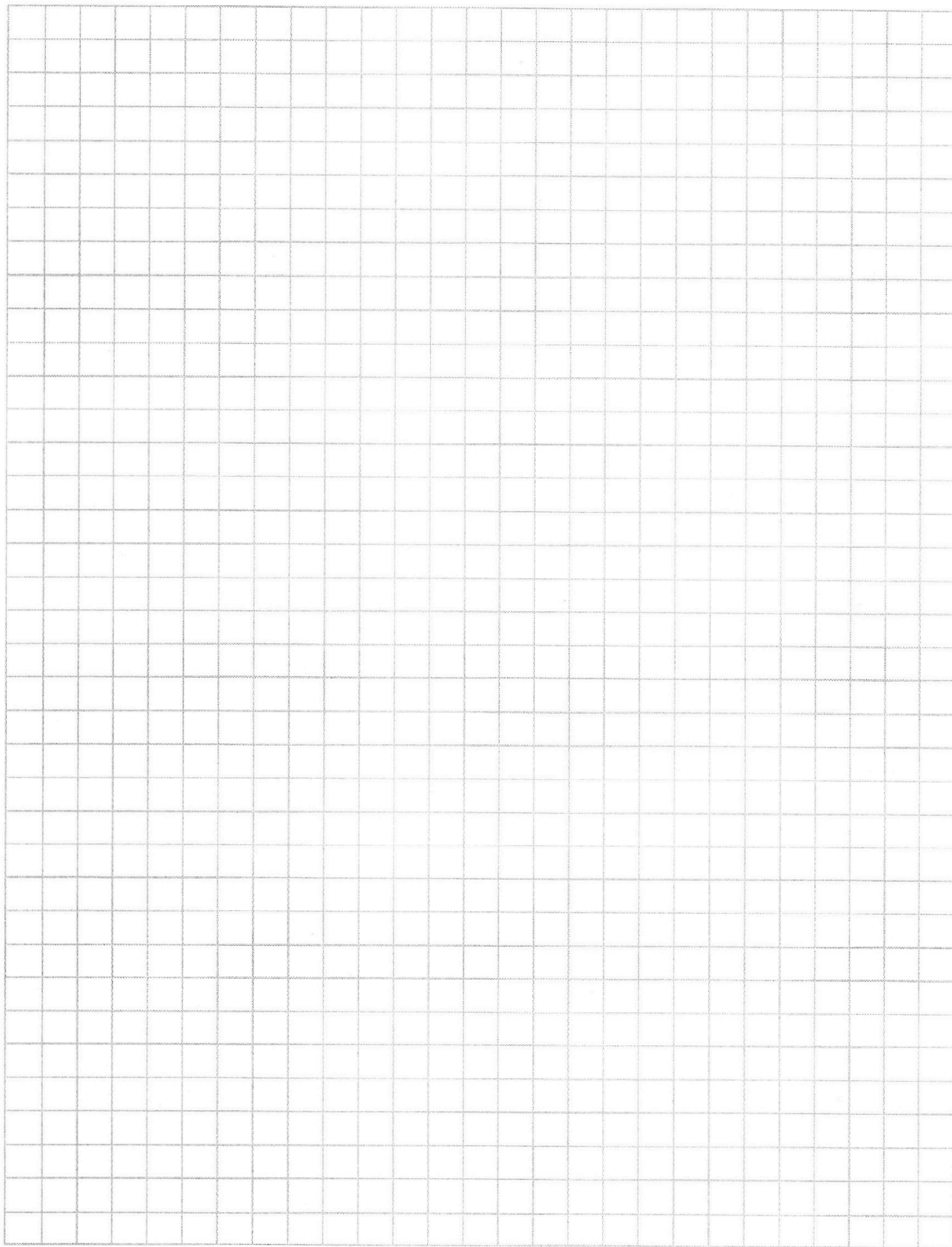
5
☐

6
☐

7
☐

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. **Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно.** Порча QR-кода недопустима!





На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$t = 2y$$

$$K = \frac{1}{2y} + \frac{1}{y} + \frac{5}{2+y} =$$

$$K = \frac{1}{2y} + \frac{1}{y} + \frac{5}{2+y} =$$

$$= \frac{y + 2y + 5}{2y^2} = \frac{3y + 5}{2y^2}$$

$$K = \frac{3y + 5}{2y^2}$$

$$M = 8y^3 - y^3 - 12y^2 = 7y^3 - 12y^2$$

$$\left\{ \begin{array}{l} K = \frac{3y + 5}{2y^2} \\ M = 7y^3 - 12y^2 \end{array} \right.$$

$$M = 7y^3 - 12y^2$$

$$\rightarrow 2Ky^2 - 3y - 5 = 0$$

$$D = 9 + 40K$$

$$y = 3 \pm \sqrt{9 + 40K}$$

$$4K$$

$$12 \cdot 48K$$

$$14K$$

$$6 \begin{array}{r} + 40 \\ 6 \\ \hline 240 \\ + 120 \\ \hline \end{array}$$

$$y = \frac{3 + \sqrt{9 + 40K}}{4K}$$

$$360y^2 = \frac{9 + 6\sqrt{9 + 40K} + 9 + 40K}{16K^2} = \frac{18 + 6\sqrt{9 + 40K} + 40K}{16K^2}$$

$$y^3 = \frac{(3 + \sqrt{9 + 40K})}{4K} \cdot \frac{(18 + 6\sqrt{9 + 40K} + 40K)}{16K^2} =$$

$$= \frac{54 + 18\sqrt{9 + 40K} + 120K + 18\sqrt{9 + 40K} + 6(9 + 40K)}{64K^3}$$

$$= \frac{108 + 36\sqrt{9 + 40K} + 40K\sqrt{9 + 40K} + 360K}{64K^3}$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\frac{x}{6} = 1 \rightarrow x = 6$$

$$18 - 16$$

$$k - \frac{x}{2} = 1 \rightarrow k - \frac{6}{2} = 5 \rightarrow k = 6$$

$$k - 3 = 1$$

$$k = 4$$

$$\frac{x}{6} = 1 \rightarrow x = 6 \quad y = 2$$

$$3x - 2y = 1$$

$$\frac{3x}{2} - y = 1$$

$$\frac{3}{2} \cdot 6 - y = 1$$

$$9 - y = 1 \quad y = 8$$

$$x = 0: (0; 2k)$$

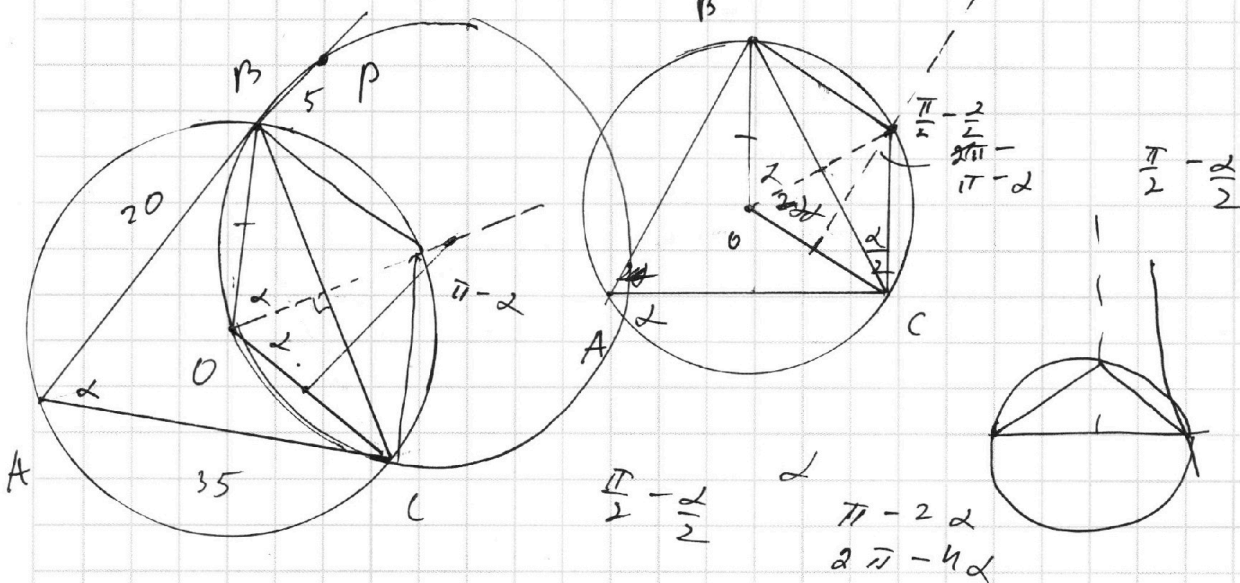
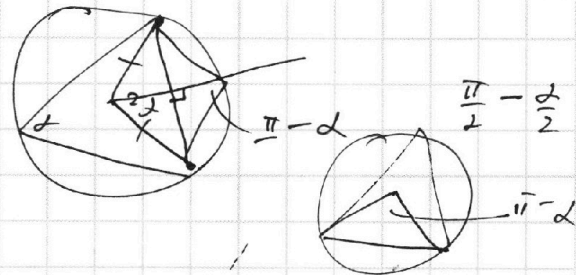
$$(0; -2y)$$

$$-1 \leq \frac{3x}{2} - y \leq 1$$

$$y - 1 \leq \frac{3x}{2} \leq 1 + y$$

$$\frac{2}{3}(y - 1) \leq x \leq \frac{2}{3}(y + 1)$$

$$k = 0:$$





На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

1 2 3 4 5 6 7
☐ ☐ ☐ ☐ ☐ ☐ ☐

СТРАНИЦА
 _ ИЗ _

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\begin{aligned} \text{41. } A &= \overline{aaaa} = 10^3a + 10^2a + 10a + a = \\ &= a(10^3 + 10^2 + 10 + 1) = \\ &= 1111a \end{aligned}$$

$$\begin{array}{r} \times 100 \\ 100 \\ 10 \end{array}$$

$$C = \begin{cases} 10b + 3 \\ 30 + b \end{cases}$$

$$\begin{array}{r} 1111 \overline{) 11} \\ 11 \\ \hline 01 \\ 0 \\ \hline 11 \end{array}$$

$$B = \begin{cases} 10^2c + 10d + 6 \\ 10^2c + 60 + d \\ 600 + 10c + d \end{cases}$$

$$1111 = 11 \cdot 101$$

101 - простое

$$1) \quad 1111a(10b+3) \cdot (10^2c+10d+6) = N^2$$

$$\begin{array}{r} 101 \\ 101 \\ \hline 101 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 101 \\ 3 \overline{) 303} \\ 303 \\ \hline 006 \\ 606 \end{array}$$

$$B = 606$$

$$\cancel{N^2 = 1111} \quad N^2 = 11 \cdot 101 \cdot a \cdot 606 \cdot \begin{array}{r} 63 \\ 36 \end{array}$$

$$11 \cdot 101 \cdot a \cdot 101 \cdot 6 \cdot$$

$$11 \cdot 101 \cdot a \cdot 101 \cdot 2 \cdot 3 \cdot C$$

$$a = 2 \quad c = 33$$

$$11 \cdot 101 \cdot 2 \cdot 101 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 11$$

$$\begin{aligned} x > 0, \quad y > 0, \quad f &= \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{5}{x+y} = \frac{2}{x} + \frac{1}{2y} + \frac{5}{x+y} \end{aligned}$$

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{2}{x} + \frac{1}{2y} \quad f = \frac{x+y+5}{x+y} = \frac{4y+x+10}{2+y}$$

$$\begin{aligned} u &= x^3 - y^3 - 6 + y = (x-y)(x^2 + xy + y^2) - 6 + y = \\ &= (x-y)(2x + 2y + 10) = 4y + x + 10 \\ &x = 2y \end{aligned}$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$M = 8y^3 - y^3 - 6y \cdot 2y = 7y^3 - 12y^2$$

$$K = \frac{1}{2y} + \frac{1}{y} + \frac{5}{2y^2} = \frac{y + 2y + 5}{2y^2} = \frac{3y + 5}{2y^2} = K$$

$$2K \cdot y^2 = 3y + 5$$

$$2K \cdot y^2 - 3y - 5 = 0$$

$$\Delta = 9 + 4 \cdot 5 \cdot 2K$$

$$M = y^2(7y - 12)$$

$$M_1 = 5t^3 - t^3 - 12t^2$$

$$M_2 = t^3 - 5t^3 - 12t^2$$

$$2K y^2 = 3y + 5$$

$$y = 3 \pm \frac{\sqrt{9 + 40K}}{4K}$$

$$M_1 = 4t^3 - 12t^2$$

$$M_2 = -4t^3 - 12t^2$$

$$M_1 + M_2 = -24t^2$$

$$M_1 - M_2 = 14t^3$$

$$\frac{1 \cdot 2}{+} + \frac{1}{2y} + \frac{5}{y} = \frac{1}{+} + \frac{1}{y} + \frac{5}{y}$$

$$\frac{2}{+} + \frac{1}{2y} = \frac{1}{+} + \frac{1}{y}$$

$$2y + 1 = ?$$

$$\frac{1}{+} + \frac{1}{y} + \frac{5}{y} = \frac{2}{+} + \frac{1}{2y} + \frac{5}{y}$$

$$\frac{1}{+} + \frac{1}{y} = \frac{2}{+} + \frac{1}{2y}$$

$$K = \frac{1}{2y} + \frac{1}{y} + \frac{5}{2y^2} = \frac{2y + 2 + 5}{2y^2} = \frac{3y + 5}{2y^2} = K$$

$$1 = 2y$$

$$y = t$$

$$x = 2t$$

$$y = t$$

$$= \frac{3y + 5}{2y^2} = K$$

$$y^2 = \frac{3y + 5}{2K}$$

$$M = 8y^3 - y^3 - 6 \cdot 2y \cdot y = 7y^3 - 12y^2$$

$$x: 2y$$

$$y: y$$

$$y$$

$$2y$$

$$\frac{(M_1 + M_2)^3}{(M_1 - M_2)^2} = \frac{-24^3}{14^2}$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

1 2 3 4 5 6 7
☐ ☐ ☐ ☐ ☐ ☐ ☐

СТРАНИЦА
 __ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

13.

$$(\sin \pi + \sin \pi y) \cdot \sin \pi + = (\cos \pi + -\cos \pi y) \cdot \cos \pi +$$

$$\sin^2 \pi + + \sin \pi + \cdot \sin \pi y = \cos^2 \pi + - \cos \pi + \cdot \cos \pi y$$

$$\cos^2 \pi + - \sin^2 \pi + - (\cos \pi + \cdot \cos \pi y + \sin \pi + \cdot \sin \pi y) = 0$$

$$\cos 2\pi + - \cos(\pi + - \pi y) = 0$$

$$-1 \leq k - \frac{x}{2} \leq 1$$

$$\cos 2\pi + = \cos(\pi + - \pi y)$$

$$-1 \leq \frac{x}{2} - k \leq 1$$

$$\left[\begin{array}{l} 2\pi + = \pi + - \pi y + 2\pi k \\ 2\pi + = -\pi + + \pi y + 2\pi k \end{array} \right.$$

$$-2 \leq x - 2k \leq 2$$

$$\left[\begin{array}{l} 2\pi + = -\pi + + \pi y + 2\pi k \end{array} \right.$$

$$-2 + 2k \leq x \leq 2 + 2k$$

$$\left[\begin{array}{l} x = -y + 2k \\ 3x = y + 2\pi \end{array} \right.$$

$$x + y = 2k$$

$$\left[\begin{array}{l} 3x = y + 2\pi \end{array} \right.$$

$$3x - y = 2\pi$$

$$(\frac{y}{2}, -\frac{y}{2} +$$

$$y = -x + 2k \quad -1 \leq \frac{x}{6} \leq 1$$

$$y = 3x - 2\pi \quad -6 \leq x \leq 6$$

$$\text{пары: } (x; -x + 2k), k \in \mathbb{Z} \quad 0, 1, 2$$

$$(x; 3x - 2\pi), \pi \in \mathbb{Z} \quad -6, -5, -4, -3, -2, -1, 1, 2, 3, 4, 5, 6$$

$$b) \arcsin \frac{x}{6} + \arcsin \frac{1}{2}(-x + 2k) < \pi$$

$$\arcsin \frac{x}{6} + \arcsin(k - \frac{x}{2}) < \pi$$

$$\arcsin \frac{x}{6} \leq \frac{\pi}{2}$$

$$\arcsin \frac{x}{6} = \frac{\pi}{2}$$

$$\arcsin(k - \frac{x}{2}) \leq \frac{\pi}{2}$$

$$\arcsin(k - \frac{x}{2}) = \frac{\pi}{2}$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

1
☐2
☐3
☐4
☐5
☐6
☐7
☐СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\begin{array}{cc} t & \frac{t}{2} \\ 2t & 4t \end{array}$$

$$y = \frac{3 + \sqrt{9 + 40k}}{4k}$$

$$k = \frac{1}{t} + \frac{1}{2t} + \frac{5}{2t^2}$$

$$y^2 = \frac{3 + 9 + 40k + 6\sqrt{9 + 40k}}{16k^2}$$

$$k = \frac{2}{t} + \frac{1}{4t} +$$

$$y^3 = \frac{4 - 2t + 1}{6t + 5 - 2t}$$

$$y^3 = \frac{(3 + \sqrt{9 + 40k})}{4k} \cdot \frac{(12 + 40k + 6\sqrt{9 + 40k})}{16k^2} =$$

$$= \frac{(36 + 120k + 18\sqrt{9 + 40k} + 12\sqrt{9 + 40k} + 40k\sqrt{9 + 40k} + 6(9 + 40k))}{64k^3}$$

$$u = -7(36 + 120$$

$$\begin{array}{r} 1 \\ + 36 \\ + 5 - 4 \\ \hline 9 \ 0 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 120k \\ + 240k \\ \hline 360 \ k \end{array}$$

$$y^3 = \frac{(90 + 360k + 30\sqrt{9 + 40k} + 40k\sqrt{9 + 40k})}{64k^3}$$

$$u = 7y^3 - \frac{12(12 + 40k + 6\sqrt{9 + 40k})}{16k^2}$$

$$\begin{array}{r} 4 \ 12 \\ + 4 \ 4 \\ \hline 4 \ 8 \ k \\ + 6 \\ \hline 2 \ 8 \ 8 \end{array}$$

$$u = y^3(7y - 12)$$

$$I. \quad (+; -; +; 2k)$$

$$x = 0:$$

$$x = 2t$$

$$y = 6t - 2u =$$

$$= 2(3t - u)$$

$$x: \quad -6, -4, -2, 0, 2, 4, 6$$

$$y: \quad -2, 0, 2$$

$$x = 2t + 1$$

$$x: \quad -5, -3, -1, 1, 3, 5$$

$$y = -2t - 1 + 2k$$

$$y = -2t + 2k = 2(k - t)$$