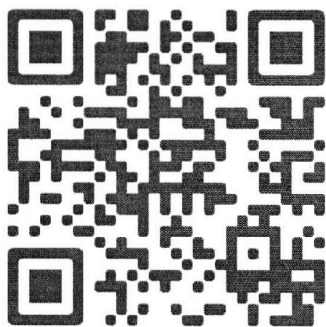




МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

11 КЛАСС. Вариант 2



1. [3 балла] Найдите все тройки натуральных чисел $(A; B; C)$ такие, что:
 - A — четырёхзначное число, составленное из одинаковых цифр,
 - B — трёхзначное число, хотя бы одна из цифр которого равна 1,
 - C — двузначное число, хотя бы одна из цифр которого равна 5,
 - произведение $A \cdot B \cdot C$ является квадратом некоторого натурального числа.
2. [3 балла] Положительные числа x и y таковы, что значение выражения $K = \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{xy}$ не изменяется, если x уменьшить на 3, а y — увеличить на 3. Найдите все возможные значения выражения $M = x^3 - y^3 - 9xy$.
3. [5 баллов] а) Найдите все пары действительных чисел $(x; y)$ такие, что $(\sin \pi x - \sin \pi y) \sin \pi x = (\cos \pi x + \cos \pi y) \cos \pi x$.
б) Сколько пар целых чисел (x, y) удовлетворяют одновременно этому уравнению и неравенству

$$\arccos \frac{x}{4} + \arccos \frac{y}{9} < 2\pi?$$

4. [4 балла] В начале месяца было выделено 4 билета на праздничный концерт, которые планировалось случайным образом распределить между одиннадцатиклассниками. В конце месяца выяснилось, что будет выделено больше 4 билетов. Одиннадцатиклассники Петя и Вася вычислили, что вероятность им обоим вместе попасть на концерт в начале месяца была в 3,5 раза меньше, чем оказалась в конце месяца. Сколько всего было выделено билетов на концерт в конце месяца, если количество одиннадцатиклассников не изменилось?
5. [5 баллов] Точка O — центр окружности ω_1 , описанной около остроугольного треугольника ABC . Окружность ω_2 , описанная около треугольника BOC , пересекает отрезок AB в точке P . Найдите площадь треугольника ABC , если $AP = \frac{16}{5}$, $BP = 2$, $AC = 4$.
6. [6 баллов] На координатной плоскости изображена фигура $\Phi(\alpha)$, состоящая из всех точек, координаты $(x; y)$ которых удовлетворяют системе неравенств

$$\begin{cases} (x - 2 \cos \alpha)(y - 2 \sin \alpha) \geq 0, \\ x^2 + y^2 \leq 9. \end{cases}$$

Найдите максимальное значение M периметра (длины границы) фигуры $\Phi(\alpha)$ и укажите все значения α , при которых оно достигается.

7. [6 баллов] Шар Ω касается всех рёбер правильной усечённой пирамиды, а шар ω касается всех её граней. Найдите угол наклона бокового ребра пирамиды к плоскости её основания.



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

1	2	3	4	5	6	7
☒	☐	☐	☐	☐	☐	☐

СТРАНИЦА
2 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. **Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно**. Порча QR-кода недопустима!

если $(1111; 101; 55)$ то $A \cdot B \cdot C$ содержит 5 в 1015 степен $\Rightarrow$ не кб
Ответ: $(1111; 101; 55)$, $(5555; 101; 55)$
 $5555 \cdot 101 \cdot 55 = 5 \cdot 11^2 \cdot 101^2$.



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☒ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА
1 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$A = \overline{k k k k} \quad k \in \mathbb{Z} \quad k \in [1; 9]$$

$$\Rightarrow A = k \cdot 1111 = k \cdot 11 \cdot 101 \quad k \neq 11 \quad k \neq 101$$

т.к. $A \cdot B \cdot C$ явл. квадратами, то среди ~~их~~ делителей числа B и C ^{но} ~~должно~~ быть число 101 с двумя $\Rightarrow$

$$B : 101 \quad \cancel{101 \cdot k} \quad 101 \cdot q = \overline{q 0 q} \quad q \in \mathbb{Z} \quad q \in [1; 9]$$

т.к. в записи числа q B есть $1 \Rightarrow q = 1 \Rightarrow B = 101$

$\Rightarrow$ ~~е делитель~~ $A \cdot B \cdot C$ явл. квадратами $\Rightarrow$ в

делителей числа C есть число $\overline{k k}$

$$\text{пусть } k = 1 \quad A = 1111 = 11 \cdot 101$$

тогда $C : 11$ и содержит $5 \Rightarrow C = 55$

$$k = 2 \quad A = 2 \cdot 11 \cdot 101 \Rightarrow C : 22 \text{ и содержит } 100$$

$$5. \quad (22 \cdot 2 = 44, 22 \cdot 3 = 66, 22 \cdot 4 = 88, 22 \cdot 5 > 100) \Rightarrow \text{нет } C$$

$$k = 3 \quad A = 3 \cdot 11 \cdot 101 \quad C : 33 \quad (33 \cdot 1 = 33, 33 \cdot 2 = 66, 33 \cdot 3 = 99) \text{ нет } C$$

$$k = 4 \quad A = 4 \cdot 11 \cdot 101 \quad C : 44 \quad (44 \cdot 1 = 44, 44 \cdot 2 = 88, 44 \cdot 3 > 100) \text{ нет } C$$

$$k = 5 \quad A = 5 \cdot 11 \cdot 101 \quad C : 55 \quad (55 \cdot 1 = 55, 55 \cdot 2 > 100) \text{ нет } C$$

$$k = 6 \quad A = 6 \cdot 11 \cdot 101 \quad C : 66 \quad (66 \cdot 1 = 66, 66 \cdot 2 > 100) \text{ нет } C$$

$$k = 7 \quad A = 7 \cdot 11 \cdot 101 \quad C : 77 \text{ нет } C$$

$$k = 8 \quad A = 8 \cdot 11 \cdot 101 \quad C : 88 \text{ нет } C$$

$$k = 9 \quad A = 9 \cdot 11 \cdot 101 \quad C : 99 \text{ нет } C$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

1	2	3	4	5	6	7
☐	☒	☐	☐	☐	☐	☐

СТРАНИЦА
1 из 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{xy} = \frac{xy^2 + x^2y + 1}{xy}$$

$$\frac{1}{x-3} + \frac{1}{y+3} + \frac{1}{(x-3)(y+3)} = \frac{(x-3)^2(y+3) + (y+3)^2(x-3) + 1}{(x-3)(y+3)}$$

$$\frac{xy^2 + x^2y + 1}{xy} = \frac{(x^2 - 6x + 9)(y+3) + (y^2 + 6y + 9)(x-3) + 1}{(xy + 3x - 3y - 9)}$$

$$(xy^2 + x^2y + 1)(xy + 3x - 3y - 9) = xy(x^2y - 6xy + 9y + 3x^2 - 18x + 27 + y^2x - 3y^2 + 6xy - 18y + 9x - 27 + 1)$$

$$(xy^2 + x^2y + 1)(xy + 3x - 3y - 9) = xy(x^2y + y^2x + 9x + 9y + 3x^2 + 3y^2 + 1)$$

$$\begin{aligned} & \underline{x^2y^3 + x^3y^2 + xy + 3(xy)^2 + 3x^3y + 3x - 3xy^3 - 3x^2y^2 - 3y - 9xy^2 -} \\ & \underline{- 9x^2y - 9} = \underline{x^3y^2 + y^3x^2 - 9x^2y - 9y^2x + 3x^3y - 3y^3x + xy} \\ & 3x - 3y - 9 = 0 \end{aligned}$$

$$x - y = 3$$

$$M = (x^3 - y^3 - 9xy) = (x - y)(x^2 + y^2 + xy) - 9xy = (x - y)(x - y)^2 + 3xy) -$$

$$- 9xy = 3(9 + 3xy) - 9xy = 27 + 9xy - 9xy = 27$$

Ответ: 27.



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☒ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА
1 из 4

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$(\sin \pi x - \sin \pi y) \sin \pi x = (\cos \pi x + \cos \pi y) \cos \pi x$$

$$\sin^2 \pi x - \sin \pi y \sin \pi x = \cos^2 \pi x + \cos \pi y \cdot \cos \pi x$$

$$\cos 2\pi x + \cos((y-x)\pi) = 0$$

$$2 \cos\left(\frac{2x+y-y}{2}\pi\right) \cos\left(\frac{2x+y-x}{2}\pi\right) = 0$$

$$\cos\left(\frac{x+y}{2}\pi\right) \cos\left(\frac{-3x+y}{2}\pi\right) = 0$$

$$\begin{cases} \cos\left(\frac{x+y}{2}\pi\right) = 0 \\ \cos\left(\frac{-3x+y}{2}\pi\right) = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} \frac{x+y}{2}\pi = \frac{\pi}{2} + \pi q & q \in \mathbb{Z} \\ \frac{-3x+y}{2}\pi = \frac{\pi}{2} + \pi s & s \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

$$\begin{cases} y = 1 + 2q - x & q \in \mathbb{Z} \\ y = 3x + 1 + 2s & s \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

Ответ: $(x; 1 + 2q - x), (x; 3x + 1 + 2s) \quad q \in \mathbb{Z} \quad s \in \mathbb{Z}$

~~также~~ $\arccos t \in [-1; 1]$

$x \in [-1; 1] \quad y \in [-1; 1] \quad \text{также}$ Если x, y целые, то

пары $(x; 1 + 2q - x) \quad x = -1; 0; 1$

$x = \pm 1 \quad y = 2q \quad y \in [-1; 1] \quad -1 \leq 2q \leq 1 \quad q \in \mathbb{Z}$
 $-\frac{1}{2} \leq q \leq \frac{1}{2} \Rightarrow q = 0$

$[(+1; 0)]$

$x = 0 \quad y = 1 + 2q \quad y \in [-1; 1] \quad -1 \leq 1 + 2q \leq 1$
 $-2 \leq 2q \leq 0 \quad q \in \mathbb{Z}$
 $q \in [-1; 0] \quad q = -1 \quad q = 0$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

☐ 1

☐ 2

☒ 3

☐ 4

☐ 5

☐ 6

☐ 7

СТРАНИЦА
2 из 4

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$-1 \leq \frac{x}{4} \leq 1$$

$$-4 \leq x \leq 4$$

$$-1 \leq \frac{y}{9} \leq 1$$

$$-9 \leq y \leq 9$$

Лант вара $(x; 1+2q-x)$

$$x=-4 \quad y=2q+5 \quad -9 \leq 2q+5 \leq 9$$

$$\arccos(t) + \arccos(-t) = \pi$$

$$\arccos t \in [0; \pi]$$

$\Rightarrow$ сумма двух ~~арккос~~ $\arccos \frac{x}{4} + \arccos \frac{y}{9} < 2\pi$, кога

$$\arccos\left(\frac{x}{4}\right) \neq \pi + 2\pi n \quad n \in \mathbb{Z}$$

$$\arccos\left(\frac{y}{9}\right) \neq \pi + 2\pi z \quad z \in \mathbb{Z}$$

$$\Leftrightarrow \frac{x}{4} \neq -1 \quad \frac{y}{9} \neq -1$$

$$\arccos t \text{ цмс. } t \in (-1; 1) \Rightarrow \frac{x}{4} \in (-1; 1)$$

$$\frac{y}{9} \in (-1; 1)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} x \in (-4; 4) \\ y \in (-9; 9) \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} x \in (-4; 4) \\ y \in (-9; 9) \end{array} \right.$$

Лант вара $(x; 1+2q-x)$

$$x=-3 \quad y=4+2q \quad -9 \leq 4+2q \leq 9$$

$$\begin{array}{cc} -6,5 & 2,5 \\ -\frac{13}{2} & \frac{5}{2} \end{array}$$

$$q \in [-6; 2] \text{ грсм}$$

$$x=-2 \quad y=2q+3 \quad -9 \leq 2q+3 \leq 9$$

$$-\frac{12}{2} \leq$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☒ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

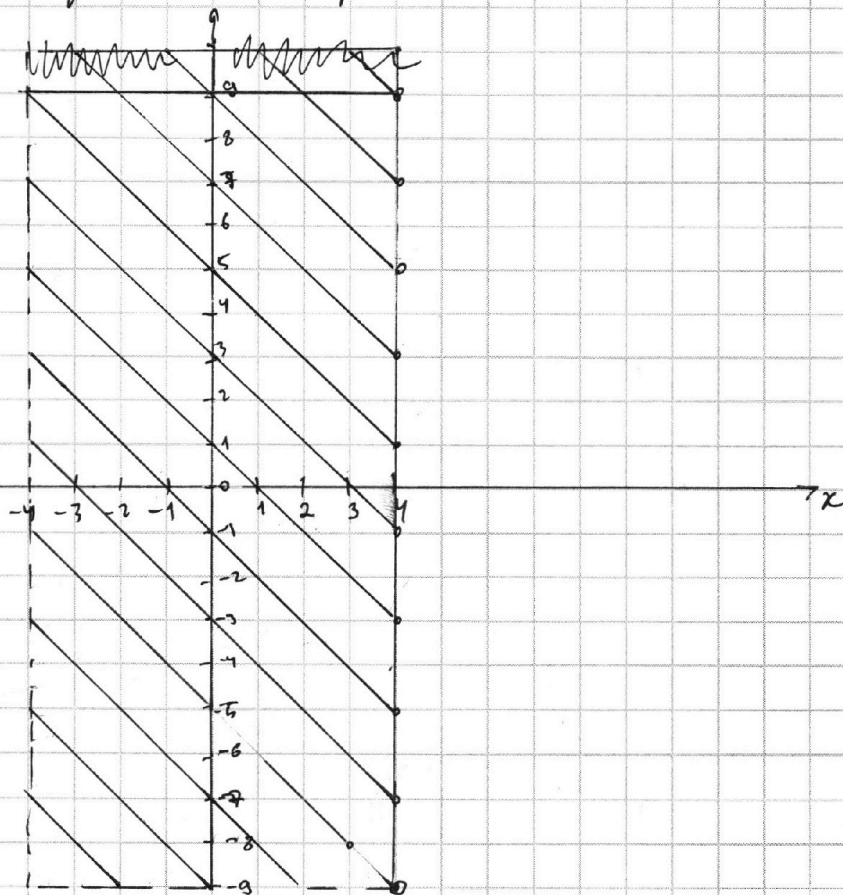
СТРАНИЦА
3 из 4

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$y = 1 + 2x - x \quad x \in \mathbb{Z} \quad \text{графиками экв. парал.}$$

прямые целые точки принадлежат $x \in (-4; 4)$

$y \in (-9; 9)$ экв. решением пер-ва



кол-во решений
для каждого x

$x_0 \quad 9 \quad 8 \quad 7 \quad 6 \quad 5 \quad 4 \quad 3 \quad 2 \quad 1 \quad 0 \quad -1 \quad -2 \quad -3 \quad -4$
того $(10+9) \cdot 4 = 19 \cdot 4 = 76$

Аналогичное рассуждение можно провести

и для $y = 1 + 3x + 2x$ это будет:

это будут параллельные прямые, целые точки которых будут экв. решением



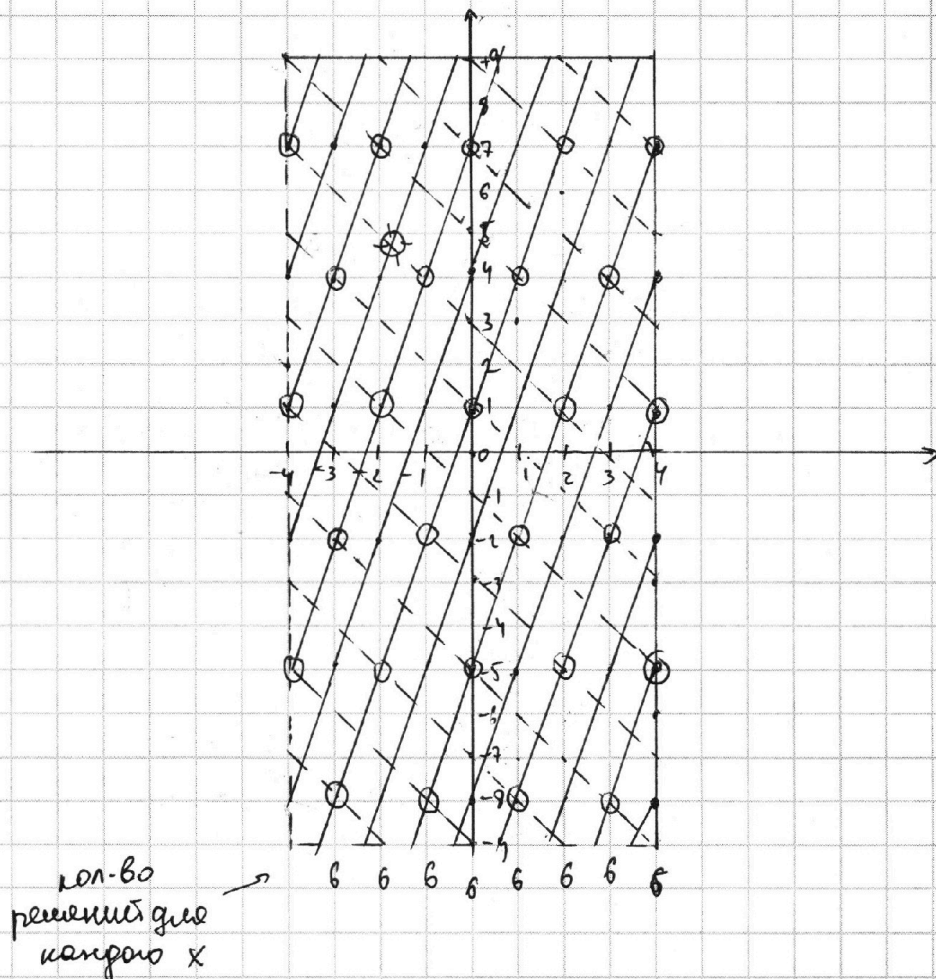
На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☒ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА

4 из 4

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



6 · 8 решений выкопанные точки показывают решения для одних выров пар
Всего ~~$6 \cdot 4 + 6 \cdot 8 = 4(16 + 12) = 4 \cdot 28 = 112$~~

одних 3 · 8

Всего $9 \cdot 8 + 6 \cdot 8 - 3 \cdot 8 = (9 + 6 - 3) \cdot 8 = 6 \cdot 2 \cdot 8 = 12 \cdot 8 = 96$

Ответ: 96 пар.



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☒ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА

1 из 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

если есть f билетов и q ординарных классиков
то положительной идеей: взяли Петю и Васю и
еще $f-2$ людей ^{из q} то можно считать

$$\frac{(q-2)(q-f+1)}{(f-2)!} \text{ способов}$$

(Здесь $q-2$ способов, что $q-3, \dots, f-2$ и $q-f+1$ способ.)
порядок не важен) $Q = \frac{(q-2)(q-3) \dots (q-f+1)}{(f-2)!}$

всего способов выбрать f из q

$$S = \frac{q(q-1) \dots (q-f+1)}{f!} \quad (1 \text{ из } q \text{ способ, } 2 \text{ из } q-1, \dots)$$

$\dots f$ из $q-f+1$ способ, порядок не важен)

$$\text{вероятность отом, попасть на концерт;} \quad \frac{Q}{S} = \frac{\frac{(q-2)(q-3) \dots (q-f+1)}{(f-2)!}}{\frac{q(q-1) \dots (q-f+1)}{f!}} =$$

$$= \frac{f(f-1)}{q(q-1)}$$

когда $f=4$ $P = \frac{12}{q(q-1)}$ вероятность отом и попасть на концерт

В конце месяца $P=3,5$ $\frac{7 \cdot 12}{q(q-1)} = \frac{7 \cdot 6}{q(q-1)} =$

$$= \frac{f(f-1)}{q(q-1)} \Rightarrow f=4$$

Ответ: выделено всего 4 билета.

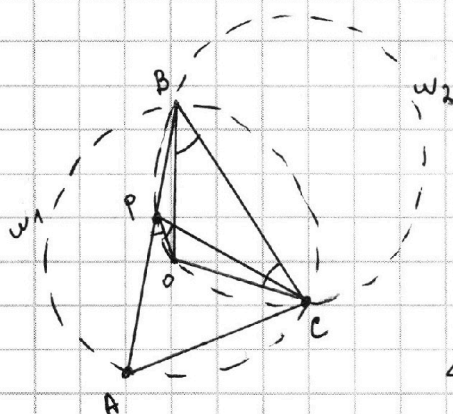


На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.



СТРАНИЦА
1 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



$$\triangle BOE : OB = OE \Rightarrow \triangle BOE \text{ р/о } z.$$

$$\Rightarrow \angle OBE = \angle OEB$$

РВЕО вписан. в окр-ть w_2

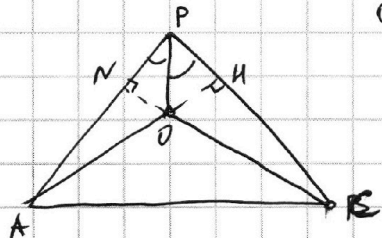
$$\Rightarrow \angle OPB + \angle OEB = 180^\circ$$

$$\angle APO + \angle OPB = 180^\circ \text{ (смежные)}$$

$$\Rightarrow \angle APO = \angle OEB \quad \angle B$$

$$\angle OBE = \angle OPE \text{ (в окр-ти } w_2 \text{ опир на дугу } OE \text{ да)} \Rightarrow$$

$$\angle APO = \angle OPE$$



$$ON \perp AP \quad OH \perp PE$$

$$\triangle ONP = \triangle OHP \text{ (по ост. углу и общ. гипот.)}$$

$$\text{гипот. } PO$$

$$NP = PH$$

$$\Rightarrow ON = OH \Rightarrow \triangle ONA = \triangle OHC \text{ (по}$$

катету и гипот.: $AO = OC$ (O - равноудалена от вершин)

$$\Rightarrow AN = HC \Rightarrow AP = PC \Rightarrow \triangle APC \text{ р/о}$$

$$AP = PC = \frac{16}{5}$$

$$\text{пот. косинусов для } \triangle APC: AP^2 + AC^2 - 2AP \cdot AC \cos \angle PAC =$$

$$= PC^2 \quad 4^2 - 2 \cdot \frac{16}{5} \cdot 4 \cdot \cos \angle PAC = 0 \quad \cos \angle PAC = \frac{4}{\frac{2 \cdot 16}{5}} = \frac{5}{8}$$

$$\triangle \text{ по т. косинусов для } \triangle BAE: AB^2 + AC^2 - 2AB \cdot AC \cos \angle PAC = BE$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☒ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА
2 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\angle PAE < 90^\circ \Rightarrow \sin \angle PAE = \sqrt{1 - \cos^2 \angle PAE} = \sqrt{1 - \frac{25}{64}} = \frac{\sqrt{39}}{8}$$

$$\begin{aligned} S_{ABCE} &= \frac{1}{2} \sin \angle PAE \cdot AP \cdot AE = \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{39}}{8} \cdot \left(\frac{16}{5} + 2 \right) \cdot 4 = \\ &= \frac{1}{4} \sqrt{39} \left(\frac{16+10}{5} \right) = \frac{26\sqrt{39}}{2 \cdot 10} = \frac{13\sqrt{39}}{10} \end{aligned}$$

$$\text{Ответ: } S_{ABCE} = \frac{13\sqrt{39}}{10}$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.



СТРАНИЦА
2 из 4

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\text{длина дуги } FE = \frac{1}{2} VFE \cdot 3$$

$$\text{дуга } CD = \frac{1}{2} \cdot VCD \cdot 3$$

$$\text{сумма дуг } \frac{1}{2} \cdot 3 (VFE + VCD) = \frac{1}{2} \cdot 3 = \frac{3\pi}{2}$$

$\Rightarrow$ она вне зависимости угла α равна $\frac{3\pi}{2}$

$\Rightarrow$ радиус в периметрах лишь за счет

Длин CE и FD ~~$FE + CD$~~

(т.к. периметр: сумма дуг и длин
секторов)

$$\triangle OAN \quad \text{AN} \perp ON \quad \angle OAN = \alpha \quad ON = 2 \cdot \cos \alpha$$

$$\Rightarrow \triangle CON \text{ по т. Пифагора } CO^2 = ON^2 + CN^2 \quad CN =$$

$$= \sqrt{9 - (2\cos \alpha)^2} \quad CN = NE \quad \text{т.к. } ON \text{ перпенд. на } OM \text{ и}$$

$$ON \perp CE$$

$$DZ \perp OZ \quad \angle ZAO = \angle AON = \alpha \Rightarrow OZ = 2 \cdot \cos \alpha \sin \alpha$$

$$\triangle DOZ \text{ по т. Пифагора } DZ = \sqrt{DO^2 - OZ^2} =$$

$$= \sqrt{9 - (2\sin \alpha)^2} = \sqrt{9 - 4\sin^2 \alpha} = \sqrt{5 + 4\cos^2 \alpha}$$

$$OZ \text{ перпенд. на } OM \quad OZ \perp FD \Rightarrow FZ = ZD$$

$$FD + CE = 2 \left(\sqrt{5 + 4\cos^2 \alpha} + \sqrt{9 - 4\cos^2 \alpha} \right) \text{ Пусть } \cos^2 \alpha = h$$

$$FD + CE = 2 \left(\sqrt{5 + 4h} + \sqrt{9 - 4h} \right) \quad f(h) = 2 \left(\sqrt{5 + 4h} + \sqrt{9 - 4h} \right) \quad h \in [0; 1]$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☒ 7 ☐

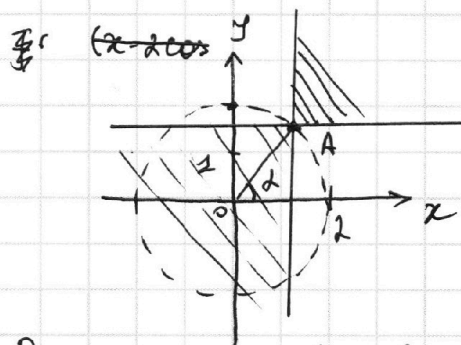
СТРАНИЦА
1 из 4

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\begin{cases} (x-2\cos\alpha)(y-2\sin\alpha) \geq 0 & (1) \\ x^2+y^2 \leq 9 & (2) \end{cases}$$

$$(1) (x-2\cos\alpha)(y-2\sin\alpha) \geq 0$$

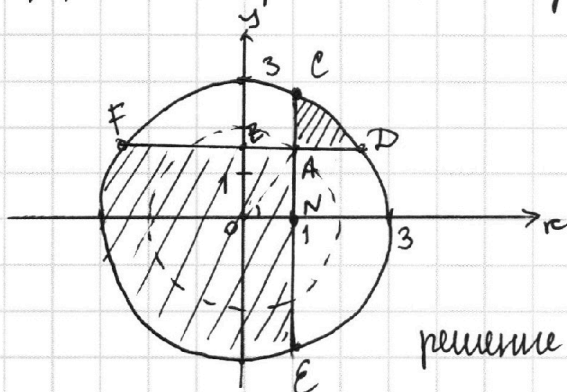
$$\begin{cases} x \geq 2\cos\alpha \\ y \geq 2\sin\alpha \\ x \leq 2\cos\alpha \\ y \leq 2\sin\alpha \\ x = 2\cos\alpha \\ y = 2\sin\alpha \end{cases}$$



Решением пер-ва явл. закраш.

область, т.к. может пробегать по всей трогон увелич.
в обе трогон. окр-ти

(2) Окруж с центром (0;0) радиусом 3

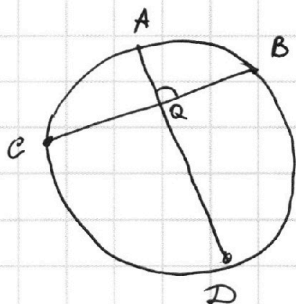


т.к. пробегает по

пунктир окр-ть

закрашенная область -

решение пер-ва



$$\angle AQB = \frac{1}{2} (\angle AOB + \angle AOC + \angle BOD)$$

В данной задаче угол между
секциями $\frac{\pi}{2} \Rightarrow \angle AQB = \frac{\pi}{2} \Rightarrow \angle AOB + \angle AOC + \angle BOD = \pi$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☒ 7 ☐

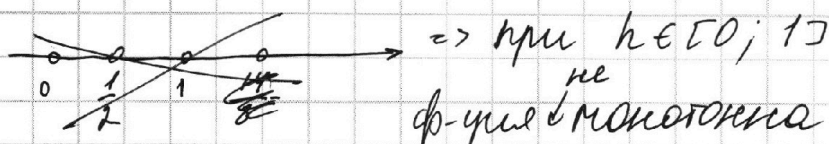
СТРАНИЦА
3 из 4

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$(FD) (\sqrt{5+4h} + \sqrt{9-4h})' = \frac{4}{2\sqrt{5+4h}} - \frac{4}{2\sqrt{9-4h}} = 0$$

$$\frac{1}{\sqrt{5+4h}} = \frac{1}{\sqrt{9-4h}}$$

$$\begin{cases} 9-4h = 5+4h \\ 9 > 4h \end{cases} \quad \begin{cases} 4 = 8h \\ h < \frac{9}{4} \end{cases} \quad \begin{cases} h = \frac{1}{2} \\ h < \frac{9}{4} \end{cases}$$



$$f(h) = 2(\sqrt{5+4h} + \sqrt{9-4h})$$

$$f(0) = 2(\sqrt{5} + 3)$$

$$f(1) = 2(3 + \sqrt{5})$$

$$f\left(\frac{1}{2}\right) = 2(\sqrt{5+2} + \sqrt{9-2}) = 2 \cdot 2\sqrt{7} = 4\sqrt{7}$$

$$4\sqrt{7} \quad \vee \quad 2(\sqrt{5} + 3)$$

$$2\sqrt{7} \quad \vee \quad \sqrt{5} + 3$$

$$4 \cdot 7 \quad \vee \quad 5 + 9 + 6\sqrt{5}$$

$$28 \quad \vee \quad 14 + 6\sqrt{5}$$

$$14 \quad \vee \quad 6\sqrt{5}$$

$$\sqrt{14^2} \quad \vee \quad \sqrt{14^2 + 5 \cdot 36}$$

$$f\left(\frac{1}{2}\right) > f(0) \quad f\left(\frac{1}{2}\right) > f(1) \Rightarrow \text{при } h = \frac{1}{2} \text{ ф-ция}$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1
☐

2
☐

3
☐

4
☐

5
☐

6
☒

7
☐

СТРАНИЦА

4 из 4

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

принимает максимальный знак

$$\cos^2 d = \frac{1}{2} \quad \cos d = \pm \frac{1}{\sqrt{2}} \quad d = \pm \frac{\pi}{4} + \pi k \quad k \in \mathbb{Z}$$

$\Rightarrow$ при этих d и все периметр принимает макс. значение

Ответ; $\frac{3\pi}{\lambda} + 4\sqrt{2}$, при $d = \pm \frac{\pi}{4} + \pi k \quad k \in \mathbb{Z}$

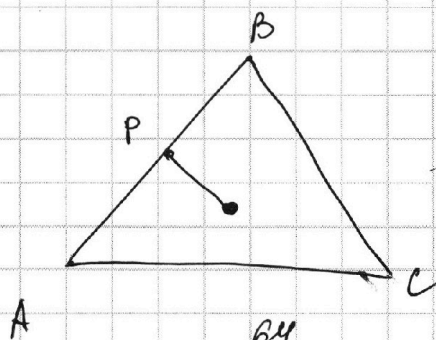
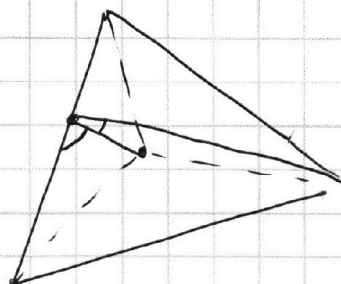
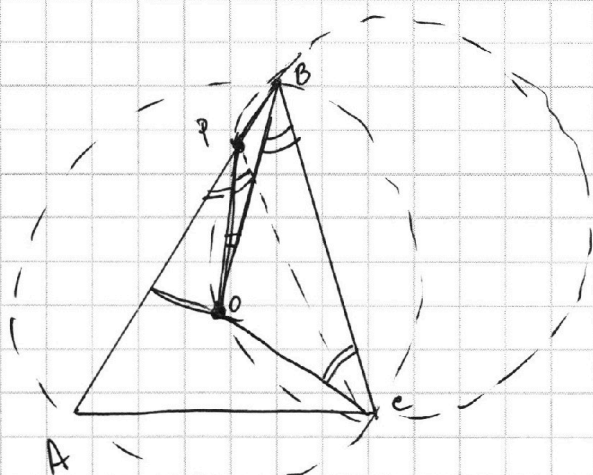
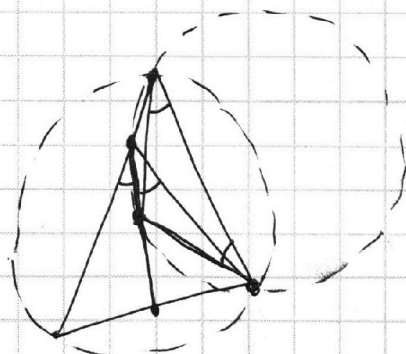
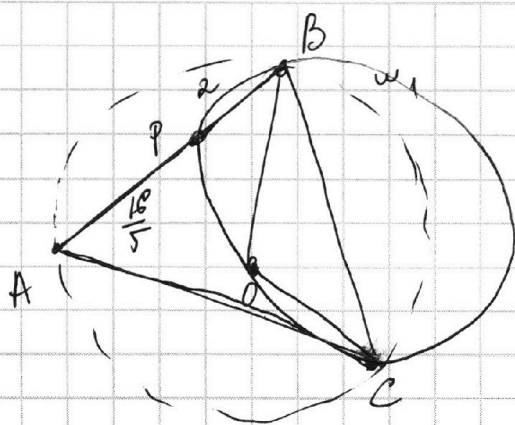


На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



$$\frac{64}{25} - \frac{39}{25}$$

$$\cos x \cos y = \frac{1}{2}$$
$$(\cos(x+y) + \cos(x-y))$$

$$\frac{t+f}{2} \quad \frac{t-f}{2}$$



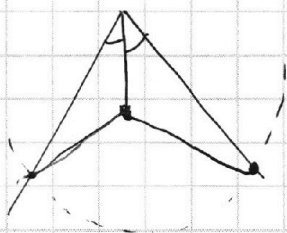
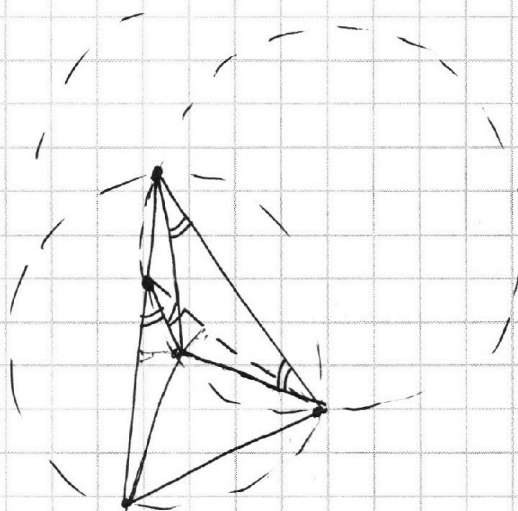
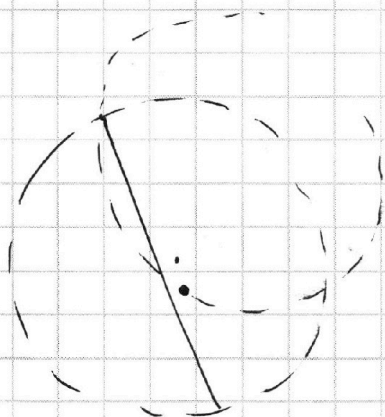
На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.



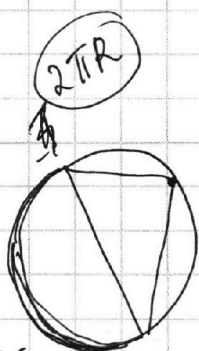
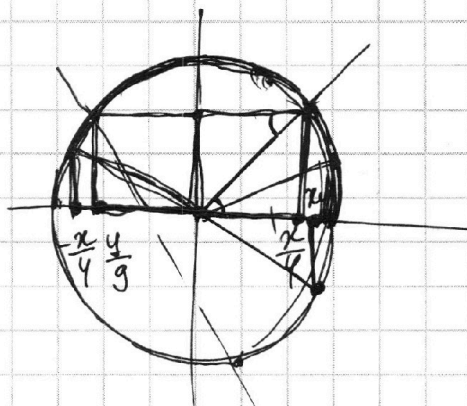
СТРАНИЦА

__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



$$x; 1+2g-x$$



2π

$\pm \arccos$

$\pi - \sin$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☒ 4 ☒ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА

__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$q = -1 \quad y = 1 - 2 = -1$$

$$q = 0 \quad y = 1$$

$$[(0; -1), (0; 1)]$$

$$x = -1$$

$$y = 2 + 2q$$

$$q \in \mathbb{R}$$

$$-1 \leq 2 + 2q \leq 1$$

$$-3 \leq 2q \leq -1$$

$$-1.5 \leq q \leq -0.5 \quad q = -1 \quad y = 0$$

$$[(-1; 0)]$$

$$\text{Параметризация } (x; 3x + 1 + 2s) \quad s \in \mathbb{R}$$

$$x = 1 \quad y = 4 + 2s \quad -1 \leq 4 + 2s \leq 1 \quad -\frac{5}{2} \leq s \leq -\frac{3}{2} \quad s = -2 \quad y = 0$$

$$[(1; 0)]$$

$$x = 0 \quad y = 1 + 2s \quad -1 \leq 1 + 2s \leq 1 \quad -1 \leq s \leq 0 \quad s = -1; s = 0$$

$$y = -1; y = 0$$

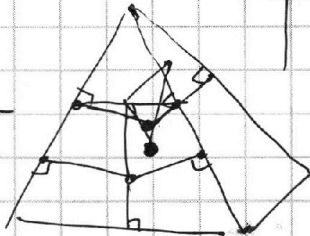
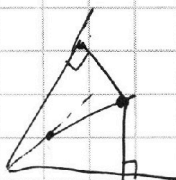
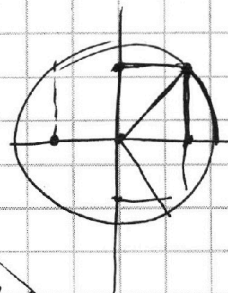
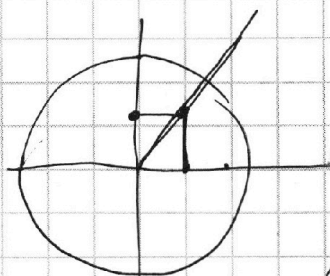
$$[(0; -1), (0; 0)]$$

$$x = -1 \quad y = 2s - 2 \quad -1 \leq 2s - 2 \leq 1 \quad 1 \leq 2s \leq 3 \quad 0.5 \leq s \leq 1.5 \quad s = 1$$

$$y = 0$$

$$[(-1; 0)]$$

Итак, по



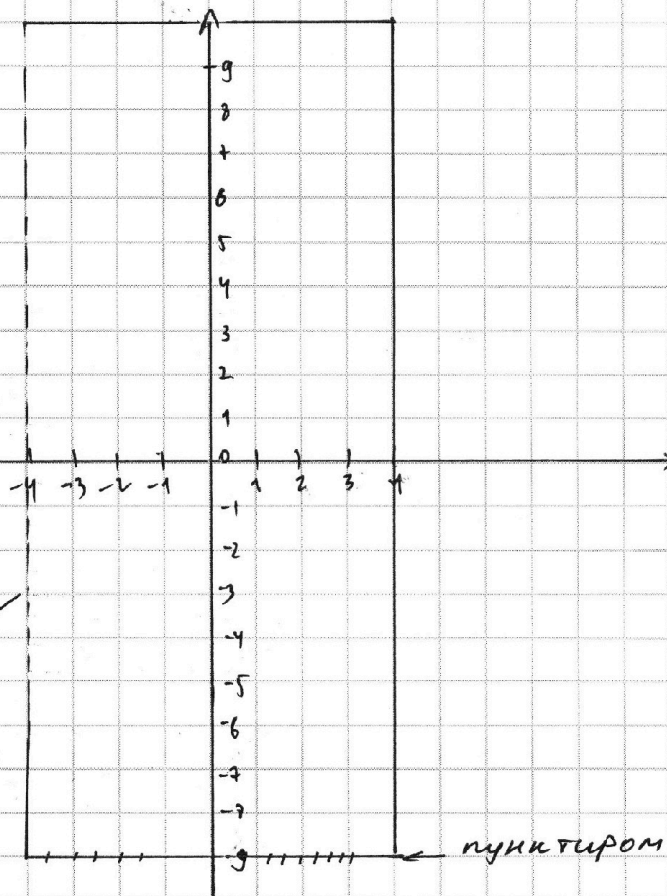
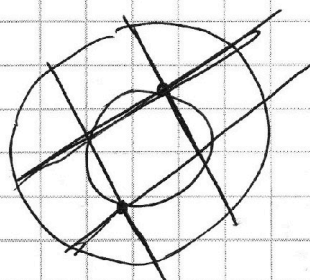
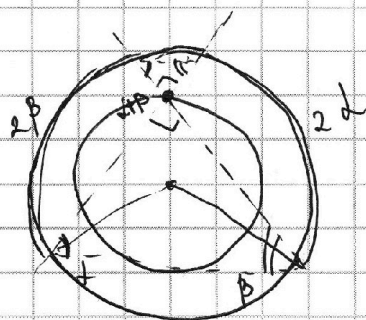


На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☒ 4 ☒ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

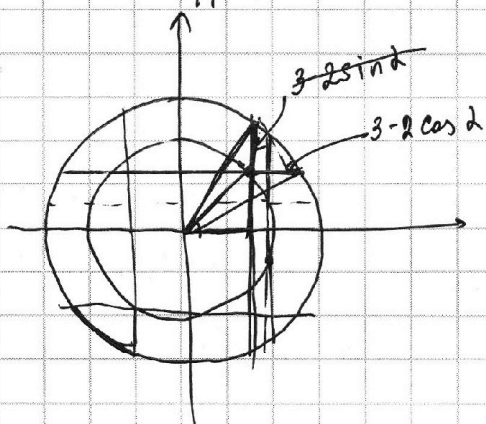
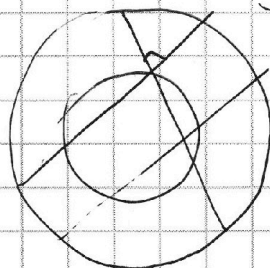
Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



$$\begin{array}{r} \times 12 \\ 8 \end{array} \quad 4$$

$$\begin{array}{r} \times 14 \\ 2 \end{array} \quad \begin{array}{r} \times 28 \\ 4 \end{array} \quad 3 \quad 96$$

$$\begin{array}{r} \times 12 \\ 8 \end{array} \quad 1$$



$$9 - 12 \sin \alpha + 4 \sin^2 \alpha + 9 - 12 \cos \alpha + 4 \cos^2 \alpha = 26 - 12(\sin \alpha + \cos \alpha)$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

1 2 3 4 5 6 7
☐ ☐ ☐ ☐ ☐ ☐ ☐

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

q - ординаты классиков

$$+ \frac{(q-2)(q-3)}{2}$$

всё $\frac{q(q-1)(q-2)(q-3)}{4! = 4 \cdot 2 \cdot 3}$

$$\frac{14 \cdot 3}{2(q)(q-1)} = \frac{12}{q(q-1)}$$

$$\cdot 3,5 = \frac{7}{2} \cdot 12 = 32$$

$$+ \frac{(q-2)(q-3) \dots (q-f+1)}{(f-2)!}$$

всё $\frac{(q-2) \cdot q \dots (q-f+1)}{f!}$

4 димета:

$$\frac{(q-2)(q-3)}{2 \cdot (q)(q-1) \cdot 6}$$

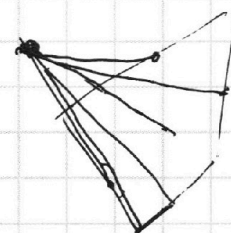
$$\frac{9 \cdot 6}{2 \cdot 12}$$

$$\frac{54}{24}$$

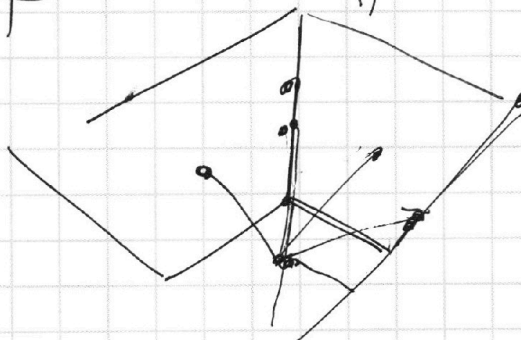
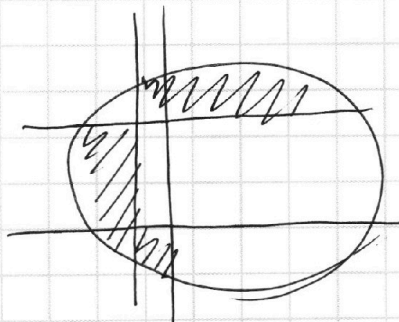
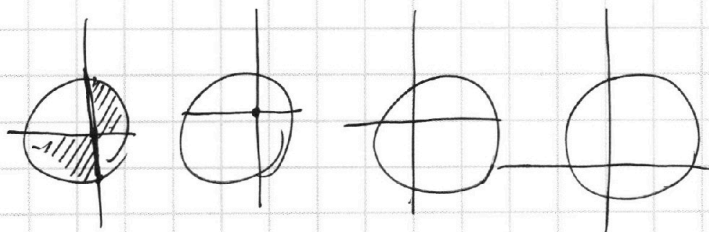
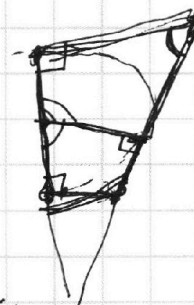
$$\frac{9}{4}$$

$$\frac{9}{4} \cdot 12 = 27$$

$$0,21 = 9 \cdot 2$$



$$\frac{f(f-1)}{q(q-1)}$$



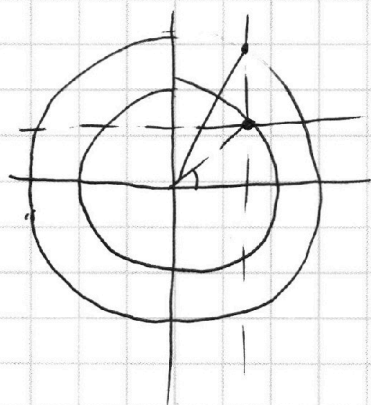
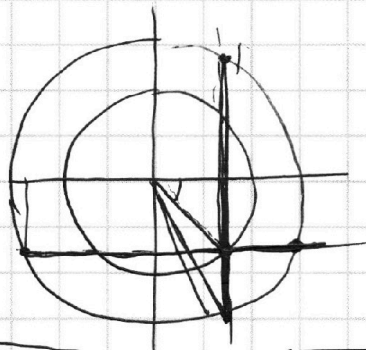
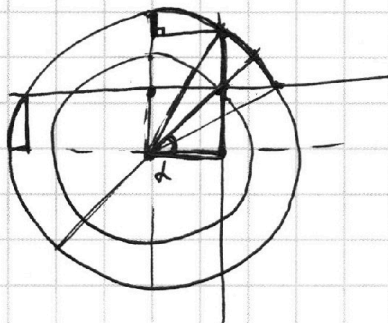


На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



$$\frac{\sqrt{3^2 - \cos^2(2\cos d)} + \sqrt{3^2 - (2\sin^2 d)}}{2\cos 2(2\cos d)2\cos d \sin d} =$$
$$= \frac{2\sqrt{3^2 - (2\cos^2 d)^2}}{2}$$

$$= \frac{1}{2}$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

СТРАНИЦА _____ ИЗ _____

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порядк QR-кода недопустим!

$$(\sin(\pi x) - \sin \pi y) \sin \pi x = (\cos \pi x + \cos \pi y) \cos \pi x$$

$$8 \text{ Пусть } t = \sin \pi x = t \quad \pi y = g$$

$$(\sin t - \sin g) \sin t = (\cos t + \cos g) \cos t$$

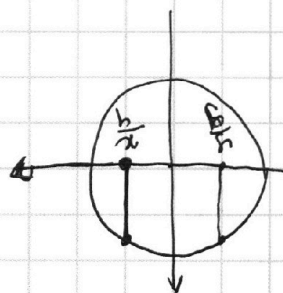
$$\sin^2 t - \sin g \sin t = \cos^2 t + \cos g \cos t$$

$$0 = \cos 2t + \cos(g-t)$$

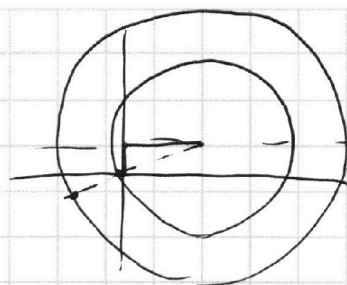
$$0 = 2 \cos\left(\frac{2t+g-t}{2}\right) \cos\left(\frac{g-t-2t}{2}\right)$$

$$\begin{cases} \cos\left(\frac{t+g}{2}\right) = 0 \\ \cos\left(\frac{g-3t}{2}\right) = 0 \end{cases}$$

$$\cos\left(\pi\left(\frac{g-3x}{2}\right)\right) = 0$$



$$a \cos\left(\frac{g}{2}\right)$$



$$a \cos(\pi x) = \pi - a \cos(\pi - x)$$

$$a \cos(\pi - x) = \pi - a \cos(\pi - x)$$

$$(x; 1 + g + 3x)$$

$$(x; 1 + 2k - x)$$

$$x + y = 1 + 2k \quad x - 3x = 1 + 2f \quad \frac{x}{2} + \frac{y}{2} = \frac{1}{2} + \frac{f}{2}$$

$$2 \cos \frac{g+f}{2} \cos \frac{g-f}{2} = \cos(g) + \cos(f)$$

$$2 \cos \pi \cos y = \cos(x+y) + \cos(x-y)$$

$$\cos \pi \cos \pi y = \frac{1}{2} (\cos(x+y) + \cos(x-y))$$



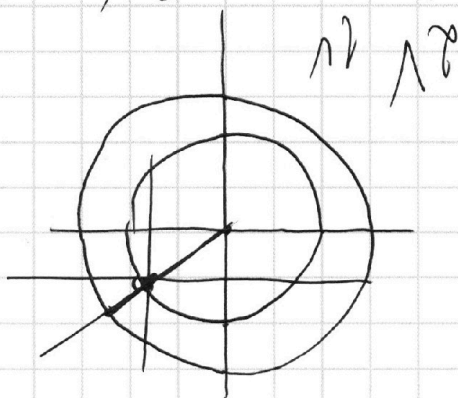
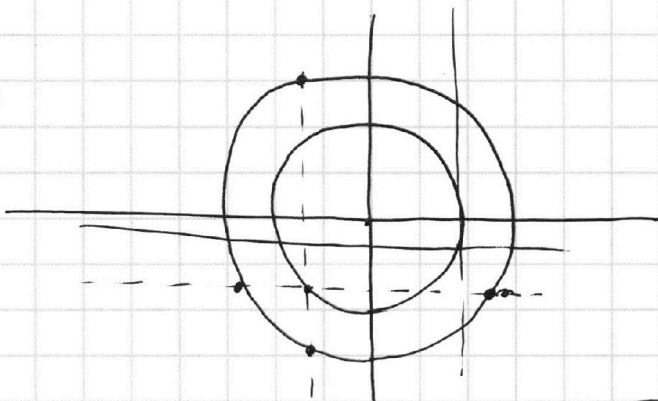
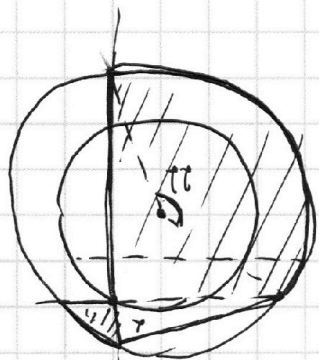
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

СТРАНИЦА _____ ИЗ _____

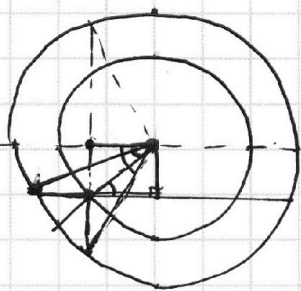
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐
1	2	3	4	5	6	7	

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Поля QR-кода недопустимы!

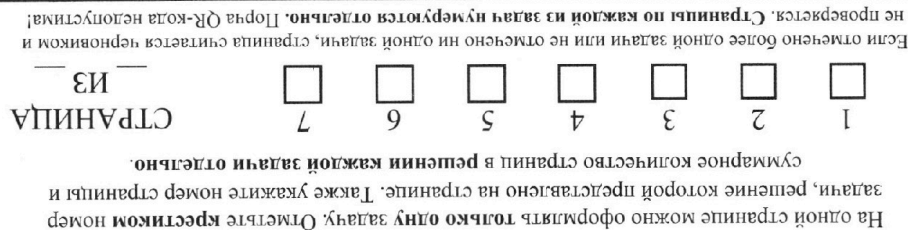
$$(x - 2 \cos \varphi)(y - 2 \sin \varphi) \geq 0$$



6V 3V 5V 4V 2V



$$\sqrt{3^2 (\cos \varphi)^2 + 2^2} \cdot 2$$
$$\sqrt{3^2 (\sin \varphi)^2 + 2^2} \cdot 2$$



$$A = \begin{pmatrix} k & k & k & k \\ k & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$C = -5 \text{ mm} \quad -5$$

$$\underline{\underline{A|B \Rightarrow B=101}}$$

2. $11 \leq 55 \leq 5$

$$\frac{x}{1} + \frac{y}{1} + \frac{xy}{1} = \frac{x-3}{1} + \frac{y+3}{1} + \frac{(x-3)(y+3)}{1}$$

$$\frac{(x+3)(x-3)}{1 + (x+3)(x-3)} = \frac{p_x}{1 + h_x x + g_x x} \cdot h$$

$$\begin{aligned}
 & (h+x)g_1 - \\
 & - (h_2x)g_2 + (h+x)g_2 + (h+x)h_2x + h_2x \\
 & 1 + \overline{h_2x} + xg_1 - h_2x + h_2x \\
 & + \overline{h_2x} - h_2x + \overline{h_2x} - h_2x - h_2x + \overline{h_2x} + h_2x \\
 & F + (g+h)(g+x) + (g+h)(g+x) = (h-x)
 \end{aligned}$$

$$1 + \overline{t_0} + x_1 - t_2 \overline{x_2} + \overline{h_6} +$$

