



МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

11 КЛАСС. Вариант 1



1. [3 балла] Найдите все тройки натуральных чисел $(A; B; C)$ такие, что:

- A — четырёхзначное число, составленное из одинаковых цифр,
- B — трёхзначное число, хотя бы одна из цифр которого равна 2,
- C — двузначное число, хотя бы одна из цифр которого равна 3,
- произведение $A \cdot B \cdot C$ является квадратом некоторого натурального числа.

2. [3 балла] Положительные числа x и y таковы, что значение выражения $K = \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{2}{xy}$ не изменяется, если x уменьшить на 1, а y — увеличить на 1. Найдите все возможные значения выражения $M = x^3 - y^3 - 3xy$.

3. [5 баллов] а) Найдите все пары действительных чисел $(x; y)$ такие, что $(\sin \pi x + \sin \pi y) \sin \pi x = (\cos \pi x + \cos \pi y) \cos \pi x$.

б) Сколько пар целых чисел (x, y) удовлетворяют одновременно этому уравнению и неравенству

$$\arcsin \frac{x}{5} + \arccos \frac{y}{4} < \frac{3\pi}{2}?$$

4. [4 балла] В начале месяца было выделено 4 билета на праздничный концерт, которые планировалось случайным образом распределить между одиннадцатиклассниками. В конце месяца выяснилось, что будет выделено больше 4 билетов. Одиннадцатиклассники Петя и Вася выяснили, что вероятность им обоим вместе попасть на концерт в начале месяца была в 2,5 раза меньше, чем оказалась в конце месяца. Сколько всего было выделено билетов на концерт в конце месяца, если количество одиннадцатиклассников не изменилось?

5. [5 баллов] Точка O — центр окружности ω_1 , описанной около остроугольного треугольника ABC . Окружность ω_2 , описанная около треугольника BOC , пересекает отрезок AB в точке P . Найдите площадь треугольника ABC , если $AP = \frac{15}{2}$, $BP = 5$, $AC = 9$.

6. [6 баллов] На координатной плоскости изображена фигура $\Phi(\alpha)$, состоящая из всех точек, координаты $(x; y)$ которых удовлетворяют системе неравенств

$$\begin{cases} (x - 3\sqrt{2} \sin \alpha) (y - 3\sqrt{2} \cos \alpha) \leq 0, \\ x^2 + y^2 \leq 25. \end{cases}$$

Найдите максимальное значение M периметра (длины границы) фигуры $\Phi(\alpha)$ и укажите все значения α , при которых оно достигается.

7. [6 баллов] Шар Ω касается всех рёбер правильной усечённой пирамиды, а шар ω касается всех её граней. Пусть сторона верхнего основания меньше, чем сторона нижнего. Найдите отношение площади боковой поверхности пирамиды к площади её нижнего основания.



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
2 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются **отдельно**. Порча QR-кода недопустима!

и $\times 2$ в нечётной степени

Получим единственную тройку чисел:
(6666, 202, 33)

$$A \cdot B \cdot C = 101 \cdot 6 \cdot 101 \cdot 2 \cdot 11 \cdot 3 \cdot 11 = 11^2 \cdot 101^2 \cdot 3^2 \cdot 2^2$$

Ответ: (6666, 202, 33)



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
1 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Число a , т.к. представлено в виде \overline{aaaa} , где $a \in \mathbb{N}$ и $a \in \{1; 9\}$, то A делится нацело на 1111 и представлено в виде: $A = 1111 \cdot a$

$1111 = 101 \cdot 11$, где 101 и 11 - простые числа, значит произведение $A \cdot B \cdot C$ делится нацело на 101 и 11

$A \cdot B \cdot C = n^2$ (где $n \in \mathbb{N}$) $\Rightarrow n^2 : 101 \Rightarrow n : 101 \Rightarrow n^2 : 101^2$, аналогично $n^2 : 11$, а значит т.к. a не может делиться нацело ни на 11 ни на 101, значит число B или C должно делиться нацело на 101 и 11 (чтобы степень вхождения этих чисел в число была четной).

Заметим что C - ^{двузначное} число, а значит оно не может делиться нацело на 101, значит на 101 делится число B , а значит $B = \{101; 202; 303; 404; 505; 606; 707; 808; 909\}$. Как мы видим, единственным вариантом числа, которое содержит 2, где число B - это 202. 202 не делится нацело на 11, а значит C делится нацело на 11. Т.к. число C должно содержать цифру 3, то единственным вариантом где число C является число 33; а значит:

$$ABC = 1111 \cdot a \cdot 33 \cdot 202 = 101 \cdot 11 \cdot a \cdot 11 \cdot 3 \cdot 101 \cdot 2 = 101^2 \cdot 11^2 \cdot 3 \cdot 2 \cdot a = n^2$$

В разложении квадрата числа на простые множители, каждый множитель должен входить в четной степени, а значит a должно делиться на 3 и на 2, а т.к. $a \in \{1; 9\}$, то единственный вариант где $a = 3 \cdot 2 = 6$ (в разложении числа a должно входить 3 в четной степени)



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
1 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\frac{1}{x-1} + \frac{1}{y+1} + \frac{2}{(x-1)(y+1)} = \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{2}{xy} \quad (\text{перенесём всё в одну сторону})$$

$$\frac{x-1-x}{x(x-1)} + \frac{y+1-y}{(y+1)y} + \frac{2(xy)(y+1)-2xy}{xy(x-1)(y+1)} = 0.$$

$$-\frac{1}{x(x-1)} + \frac{1}{(y+1)y} + \frac{x(x-y-1)}{xy(x-1)(y+1)} = 0$$

$$-\frac{y(y+1) + x(x-1) + 2(x-y-1)}{xy(x-1)(y+1)} = 0$$

$$-\frac{y^2 - y + x^2 - x + 2(xy - 1)}{xy(x-1)(y+1)} = 0$$

$$-\frac{(y+x) + (x-y)(x+y) + 2(x-y-1)}{xy(x-1)(y+1)} = 0$$

$$\frac{(x+y)(x-y-1) + 2(x-y-1)}{xy(x-1)(y+1)} = 0$$

$$\frac{(x-y-1)(x+y+2)}{xy(x-1)(y+1)} = 0$$

⊕ 3; $\begin{cases} x \neq 0 \text{ (по условию всегда выполняется т.к. } x > 0) \\ y \neq 0 \text{ (по условию всегда выполняется т.к. } y > 0) \\ x \neq 1 \\ y \neq -1 \end{cases} \Rightarrow$

\Rightarrow $\begin{cases} x > 0 \text{ (по услов.)} \\ y > 0 \\ x \neq 1 \\ y \neq -1 \end{cases}$

$x = 1$ а ⊕ 3 верно: $\begin{cases} x - y - 1 = 0 \\ x + y + 2 = 0 \end{cases}$

т.к. $x, y > 0$, то $x + y + 2 > 0$, значит $(x - y - 1) = 0$.

$x = y + 1$ (очевидно, что можно найти такие натуральные x и y , чтобы они удовлетворяли ⊕ 3).



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи **отдельно**.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
2 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$M = x^3 - y^3 - 3xy = (y+1)^3 - y^3 - 3(y+1)y = y^3 + 3y^2 + 3y + 1 - y^3 - 3y^2 - 3y = 1$$

Ответ: ~~$M=1$~~ . Данное значение M достигается, например, при $y=3, x=4$:

$$\frac{1}{4} + \frac{1}{3} + \frac{2}{12} = \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{2}{12} \quad (\text{условие на КВМ.})$$

$$4^3 - 3^3 - 3 \cdot 4 \cdot 3 = 64 - 27 - 36 = 1$$

Ответ: $M=1$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
2 ИЗ 3

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

случае, когда $\arcsin \frac{x}{5}$ и $\arccos \frac{y}{4}$ принимают свои максимальные значения, только тогда их сумма становится равной $\frac{3\pi}{2}$, во всех остальных случаях, она меньше этого значения. Найдем x и y , при которых достигается данное равенство:

$$\arcsin \frac{x}{5} = \frac{\pi}{2} \Rightarrow \frac{x}{5} = 1 \Rightarrow x = 5$$

$$\arccos \frac{y}{4} = \pi \Rightarrow \frac{y}{4} = -1 \Rightarrow y = -4.$$

Значит под данным неравенством нам подойдут все значения из \mathbb{D} для x и y , кроме $x = 5$ и $y = -4$.

Нам подходят значения: $x \in [-5; 5)$
 $y \in (-4; 4]$

из пункта а найдем все подходящие пары целых чисел.

~~$x = 4; x = -4:$ $\begin{cases} y = 1 + (-12) + 2k \\ y = -4 - 1 - 2k \end{cases}$ Тогда для значения $y =$~~

~~$x = -3:$ $\begin{cases} y = 7 - 9 + 2k \\ y = -3 - 1 - 2k \end{cases}$ значение для $y:$~~

Заметим, что при целых значениях x , серии решений для y одинаковы в обоих случаях для одного определенного значения x :

$y = 7 + 3x + 2k$ - задаёт все целые значения $y \equiv 3x + 1$

$y = x - 1 - 2k$ - задаёт все целые значения $y \equiv x - 1$,

а т.к. $3x + 1 \equiv x - 1$, то данные серии



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
1 из 3

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\begin{aligned} a) \sin^2 \pi x + \sin \pi y \sin \pi x &= \cos^2 \pi x + \cos \pi y \cos \pi x \\ \cos^2 \pi x - \sin^2 \pi x + \cos \pi y \cos \pi x - \sin \pi y \sin \pi x &= 0 \\ \cos 2\pi x + \cos(\pi x + \pi y) &= 0. \end{aligned}$$

По формуле суммы косинусов:

$$2 \cos\left(\frac{3\pi}{2}x + \frac{\pi}{2}y\right) \cos\left(\frac{\pi}{2}x - \frac{\pi}{2}y\right) = 0 \quad (\text{равенство выполняется});$$

$$\begin{cases} \cos\left(\frac{3\pi}{2}x + \frac{\pi}{2}y\right) = 0 \\ \cos\left(\frac{\pi}{2}x - \frac{\pi}{2}y\right) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{3\pi}{2}x + \frac{\pi}{2}y = \frac{\pi}{2} + \pi k \quad (k \in \mathbb{Z}) \\ \frac{\pi}{2}x - \frac{\pi}{2}y = \frac{\pi}{2} + \pi k \quad (k \in \mathbb{Z}) \end{cases} \Leftrightarrow$$

(сократим на $\frac{\pi}{2}$)

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 3x + y = 1 + 2k \\ x - y = 1 + 2k \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 1 + 3x + 2k \\ y = x - 1 - 2k \end{cases}$$

а) Ответ: $(x, 1 + 3x + 2k)^*$, $(x, x - 1 - 2k)$, где $k \in \mathbb{Z}$.

$$b) \arcsin \frac{x}{5} + \arccos \frac{y}{4} < \frac{3\pi}{2}.$$

$$\text{ОДЗ: } \begin{cases} \frac{x}{5} \geq -1 \\ \frac{x}{5} \leq 1 \\ \frac{y}{4} \geq -1 \\ \frac{y}{4} \leq 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq -5 \\ x \leq 5 \\ y \geq -4 \\ y \leq 4 \end{cases}$$

По определению: $(\arcsin \frac{x}{5}) \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$.

$(\arccos \frac{y}{4}) \in [0, \pi]$.

Значит их сумма $(\arcsin \frac{x}{5} + \arccos \frac{y}{4}) \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}]$

Мы видим, что при всех значениях, кроме одного выполняется исходное неравенство. Неравенство не выполняется только в единицу.



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
3 ИЗ 3

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

решений для y при одних и тех же x совпадают. Пусть при x можно найти n -во целых значений y ; при определенном значении x , нужно посчитать n -во целых $y \in x-1$ и которое лежат в промежутке $(-4, 4]$.

Же три четных значения x :

$y \equiv 1 \pmod{2}$, таких значений для каждого четного x y нас 4.

Три нечетных значения x ; из промежутка $(-4, 4]$.

$y \equiv 0 \pmod{2}$, таких значений для каждого нечетного x нас 4.

Четных значений x в промежутке $[-5, 5]$: 5

Нечетных значений x в промежутке $[-5, 5]$: 5

Значит всего целых пар решений равно:

$$5 \cdot 4 + 5 \cdot 4 = 40$$

Ответ: 40.



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
2 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$y^2 - y - 30 = 0$$

$$D = 1 + 120 = 121 \quad y_1 = \frac{1-11}{2} = -5 \text{ (не удовл. условию)}$$

$$y_2 = \frac{1+11}{2} = 6$$

Ответ: 6 билетов.



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА

1 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Пусть одна квадратная масса x чел., а билетов в конце месяца было выделено y ($y > 4$), причём можно считать, что $y \leq x$.

Рассчитаем вероятность Васе и Теме вместе попасть на концерт в начале в конце месяца

① в начале:

Всего способов ^{сколько} выбрать 4-ех людей из x , то есть: C_x^4

Всего способов, в которых Теме и Васе вместе идут на концерт: Мы уже знаем, что конкретные двое человек идут на концерт, значит нам останется выбрать две другие ^{из (x-2) оставшихся} двоих, которые пойдут вместе с ними на концерт, а способов это сделать: C_{x-2}^2

$$P_1 = \frac{C_{x-2}^2}{C_x^4} = \frac{(x-2)! \cdot 4! \cdot (x-4)!}{2! \cdot (x-4)! \cdot x!} = \frac{12}{x(x-1)}$$

② в конце месяца.

Аналогично п.1, всего способов C_x^4

Способов с Васей и Темей: Мы так же можем выбрать к ним двоих ещё $(y-2)$ человек из $(x-2)$ оставшихся C_{x-2}^{y-2}

$$P_2 = \frac{C_{x-2}^{y-2}}{C_x^4} = \frac{y \cdot (y-1) \cdot (x-2)! \cdot (y-2)! \cdot (x-4)!}{(y-2)! \cdot (x-2-y+2)! \cdot y! \cdot x!} = \frac{y \cdot (y-1)}{x \cdot (x-1)}$$

По условию:

$$\frac{12}{x(x-1)} \cdot 2,5 = \frac{y(y-1)}{x(x-1)} \quad (т.к. $x \geq 4$, то можно записать):$$

$$30 = y(y-1)$$

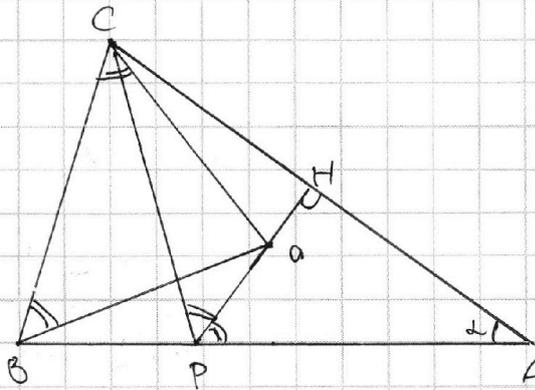


На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
| ИЗ |

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



Пусть $\angle A = \alpha$, тогда

$\angle COB = 2\alpha$, т.к. является центральным и опирается на ту же дугу, что и угол A дуге окружности (ABC) .

$CO = OB$ (как радиусы) $\Rightarrow \triangle COB$ - равнобедренный \Rightarrow

$$\Rightarrow \angle OCB = \angle CBO = (180 - 2\alpha) \cdot \frac{1}{2} = 90 - \alpha$$

$\angle CBO = \angle CPO$ (т.к. ч-ки CO и PB - висс. и углы опираются на одну и ту же дугу)

$$\angle BPO = 180^\circ - \angle BCO \text{ (из вписанности } COB) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \angle OPA = 180 - \angle BPO = \angle BCO = 90 - \alpha \Rightarrow \angle CPO = \angle OPA$$

Продлим PO до пересечения с CA в т. H .

$$\angle PHA = 90^\circ = 180^\circ - \angle HPA - \angle HAP = 180 - \alpha - 90 + \alpha =$$

$= 90$. В $\triangle PHA$ и $\triangle CPA$ висс-са совпадает с

высотой, а значит $\triangle CPA$ - $prb \Rightarrow$

$$\Rightarrow CH = HA = \frac{AC}{2} = \frac{9}{2}$$

$$\text{По т. Пифагора: } HP = \sqrt{AP^2 - HA^2} = \sqrt{\frac{225}{4} - \frac{81}{4}} =$$

$$= \sqrt{\frac{144}{4}} = \frac{12}{2} = 6.$$

$$\sin \alpha = \frac{PH}{AP} = \frac{6 \cdot 2}{15} = \frac{12}{15}$$

$$S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} \cdot AC \cdot BA \cdot \sin \alpha = \frac{1}{2} \cdot 25 \cdot \frac{12}{15} \cdot 9 = 45$$

Ответ: 45



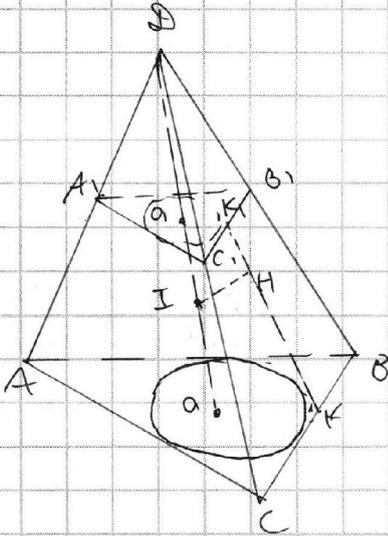
На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>					

СТРАНИЦА

1 из 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



$\triangle ABC$ и $\triangle A_1 B_1 C_1$ - впис. по
услов.

Точка I - центр сферы ω .

$г. H$ - проекция I на $CC_1, B_1 B$

Проверим через H - вос-
сому трапеции KIK

1



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Черновик.

$$3. (\sin \pi x + \sin \pi y) \sin \pi x =$$

$$\sin \alpha \cos \beta = 2 \sin \frac{\alpha + \beta}{2} \cos \frac{\alpha - \beta}{2}$$

$$\alpha = \frac{\pi + y}{2} \quad \beta = \frac{\pi - y}{2}$$

$$2 \sin \frac{\pi + y}{2} \cos \frac{\pi - y}{2} = \sin \pi x + \sin y$$

$$2 \sin \frac{\pi(\pi + y)}{2} \cos \frac{\pi(\pi - y)}{2} \sin \pi x$$

$$\sin^2 \pi x + \sin \pi y \sin \pi x = \cos^2 \frac{\pi}{2} x + \cos \pi y \cos \pi x$$

$$\cos 2\pi x + \cos \pi(\pi + y) = 0$$

$$\cos \pi x + \cos \pi y = 2 \cos \frac{\pi + y}{2} \cos \frac{\pi - y}{2}$$

$$2 \sin \frac{\alpha + \beta}{2} \cos \frac{\alpha - \beta}{2} = \cos \frac{\alpha}{2} \cos \frac{\beta}{2} + \sin \frac{\alpha}{2} \sin \frac{\beta}{2} + \cos \frac{\alpha}{2} \cos \frac{\beta}{2} + \sin \frac{\alpha}{2} \sin \frac{\beta}{2}$$

$$2 \cos \frac{\alpha}{2} \cos \frac{\beta}{2}$$

$$2 \cos \pi(2\pi + y) \cos$$

$$2 \cos(\frac{3}{2}\pi + \frac{y}{2}) \cos(\frac{\pi}{2}\pi - \frac{y}{2})$$

$$2 \cos$$

$$\frac{2\pi x + \pi x + \pi y}{2} \sin(\frac{3}{2}\pi + \frac{y}{2})$$

$$\cos 0 + \cos 30 = 2 \cos 45 \cos$$

$$2 \cos 60 + \cos 30 = 2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$0 + \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\cos 0 + \cos 60 = 2 \cdot \cos 30 + \cos 30 =$$

$$1 + \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$$

$$2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{3}{2}$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Черновик

$$\arcsin \frac{x}{5} + \arccos \frac{y}{4} < \frac{3\pi}{2}$$

$$\text{O} \oplus 3: \frac{x}{5} \in \left(\frac{\pi}{5}, \frac{3\pi}{5} \right) \Rightarrow \begin{cases} \frac{x}{5} \leq 1 \\ \frac{x}{5} \geq -1 \\ \frac{y}{4} \geq -1 \\ \frac{y}{4} \leq 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \leq 5 \\ x \geq -5 \\ y \geq -4 \\ y \leq 4 \end{cases}$$

$$\arcsin \frac{x}{5} + \arccos \frac{y}{4} \leq \frac{3\pi}{2}$$

$$\arcsin \frac{x}{5} \leq \frac{\pi}{2} \Rightarrow \frac{x}{5} \leq 1 \Rightarrow x \leq 5$$

$$\frac{y}{4} \leq -1 \Rightarrow y \leq -4$$

$$\begin{cases} x < 5 \\ x \geq -5 \\ y \end{cases}$$

$$x: 1 + 3k + 2k$$

$$x: k - 1 - 2k$$

$$-7 + 2k$$

$$-7 - 9 - 7 - 5 - 3 - 1 \quad 3$$

$$-3 - 3 \quad k = k + 1 + k$$

$$k = \quad -1 - 2k$$

$$1 + 3 + 2k \quad 2$$

$$k + 2k$$

$$-2k$$

$$1 + 3k + 2k \equiv 1 + k$$

$$-5 - 3 - 7 \quad 3$$

$$-8$$

$$1 + 3k + 2k$$

$$-4$$

$$k - 1 - 2k$$

На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.



1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Черновик

$$2) \quad x, y > 0 \quad K = \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{2}{xy} \quad M = x^3 - y^3 - 3xy$$

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{2}{xy} = \frac{1}{(x-1)} + \frac{1}{(y+1)} + \frac{2}{(x-1)(y+1)}$$

$$\frac{x-1-x}{x(x-1)} + \frac{y+1-y}{(y+1)y} + \frac{2(x-1)(y+1) - 2xy}{xy(x-1)(y+1)} = 0$$

$$-\frac{1}{x(x-1)} + \frac{1}{(y+1)y} + \frac{2xy - 2y + 2x - 2 - 2xy}{xy(x-1)(y+1)} = 0$$

$$2x - 2y - 2$$

$$x(x-y-1)$$

$$\frac{-y^2 + x^2 - y + x^2 - x}{x(x-1)(y+1)y} = \frac{(x-y)(x+y) - (x+y)}{x(x-1)(y+1)y} = \frac{(x+y)(x-y-1)}{x(x-1)(y+1)y}$$

$$\frac{(x+y)(x-y-1)}{x(x-1)(y+1)y} + \frac{2(x-y-1)}{x(x-1)(y+1)y} = 0$$

$$(x-y-1)(x+y+2) = 0$$

$$O \oplus 3: \quad x \neq 1; \quad y \neq -1; \quad y \neq 0; \quad x \neq 0$$

$$x = y + 1 \quad \vee \quad x = -2 - y \Rightarrow 2(y+1) - (y+2)$$

$$\frac{1}{y+1} + \frac{1}{y} + \frac{2}{y(y+1)} \leq \frac{1}{y} + \frac{1}{y+1} + \frac{2}{y}$$

$$\frac{2}{-2-y} + \frac{1}{y} + \frac{2}{y(-2-y)} = \frac{1}{-3-y} + \frac{1}{y+1} + \frac{2}{(y+1)(-3-y)}$$

$$y^3 + 3y^2 + 3y + 1 - y^3 - 3y(y+1) = 0 \quad (1)$$

$$y^3 - 8(y^3 + 3y^2 + 3y + 1) - (y^3 + 6y^2 + 12y + 8) - y^3 + 3y^2 + 6y = -2y^3 - 3y^2 - 6y + 8 =$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$A, B, C \in N$ Черновик

$$A = \overline{aaaa}$$

$$B = \overline{2b_1 b_2}$$

$$C = \overline{c_3 c_3}$$

$$\overline{b_1 2 b_2}$$

$$c \overline{3 c}$$

$$\overline{b_1 b_2 2}$$

$$+ \overline{aaaa}$$

$$\overline{2b_1 b_2}$$

$$A \cdot B \cdot C = n^2$$

$$+ \overline{aaaa}$$

$$+ \overline{aaaa}$$

Пусть $B = \overline{b_1 b_2 2}$, тогда $n : 4$.

$$\begin{array}{r} 1111 \\ 2222 \\ 3333 \end{array}$$

① Если $A = \overline{1111}$, то $n : 12$

$$\begin{array}{r} 1111 \overline{) 11} \\ \underline{- 7} \\ 31 \\ \underline{- 28} \\ 31 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 1111 \overline{) 101} \\ \underline{- 11} \\ 011 \end{array}$$

$B : 101 \vee C$ не может делиться на $101 \Rightarrow B : 101$

$$\begin{array}{r} 101 \\ 202 \\ 303 \end{array}$$

$$C : \begin{array}{r} 11 \\ 33 \end{array}$$

1) $(1111, 202, 33)$

② Если $A = \overline{2222}$, то $A = 101 \cdot 11 \cdot 2$.

$$\begin{array}{r} 202 \\ 2 \cdot 101 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 33 \\ 11 \cdot 3^x \end{array}$$

3) Если $A = \overline{3333}$, то $A = 101 \cdot 11 \cdot 3$

$$B = \begin{array}{r} 202 \\ 101 \cdot 2 \end{array}$$

$$C = \begin{array}{r} 33 \\ 3 \cdot 11 \end{array}$$

Все группы не подходят.

Ответ: 11

11 22 33 44 55 66 77 88 99.



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

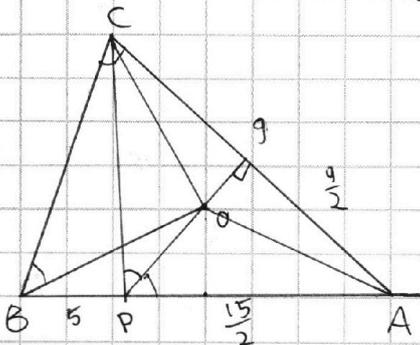
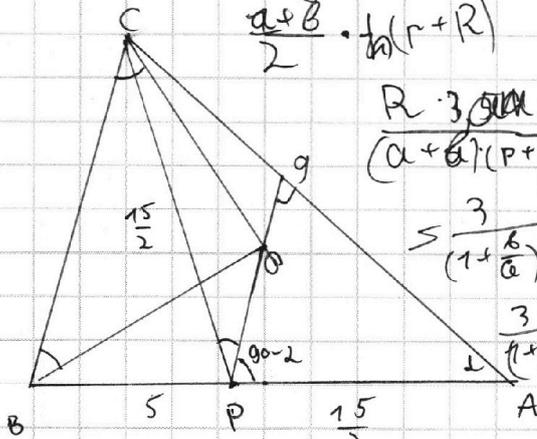
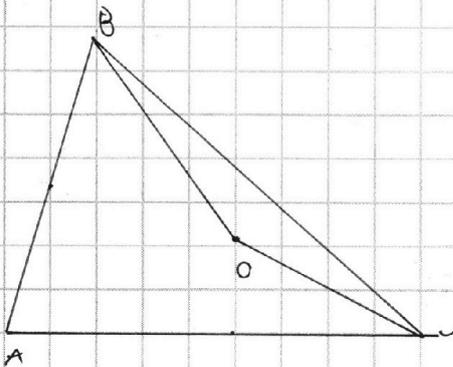
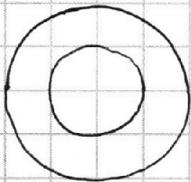
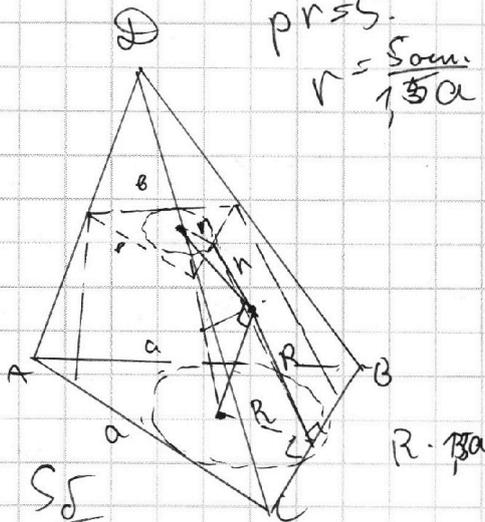
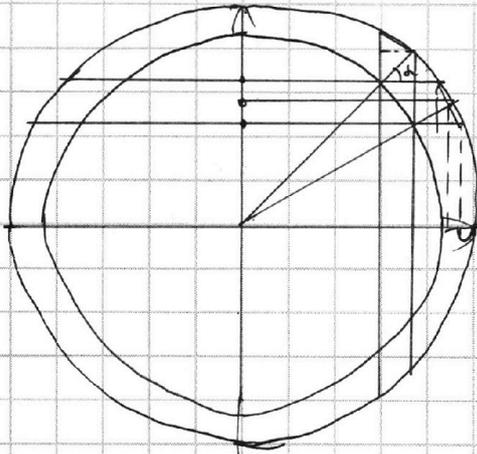
1
 2
 3
 4
 5
 6
 7

СТРАНИЦА
 __ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Черновики

5 $3\sqrt{2}$



$$5 \sqrt{\frac{225}{4} - \frac{81}{4}} = \frac{12}{2}$$

$$S_{\text{инд}} = \frac{225}{81} = \frac{744}{81}$$

$$R = 300$$

$$\frac{(a+b)(r+R)}{2} = S$$

$$= \frac{3}{(1+\frac{b}{a})(\frac{r}{R}+1)}$$

$$\frac{3}{(1+\frac{b}{a})^2}$$



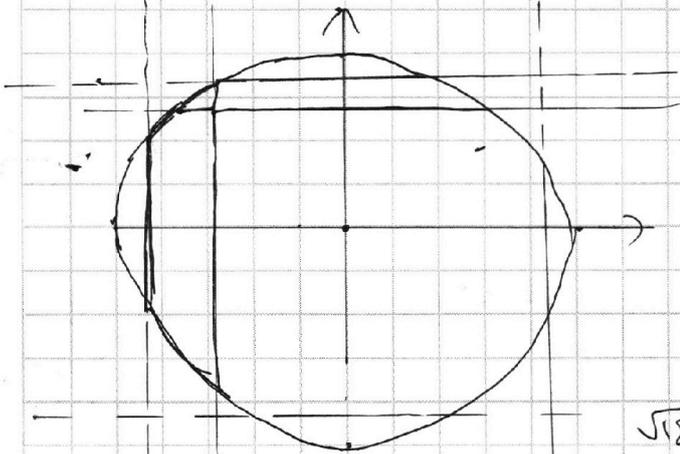
На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Черновики

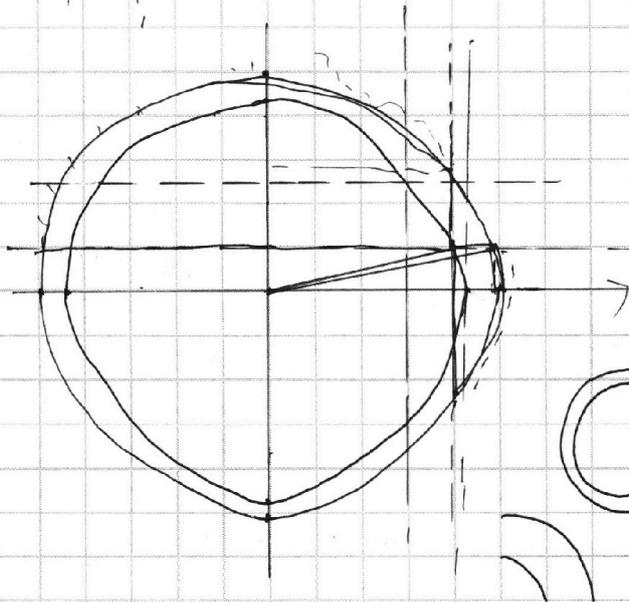


$$x = 3\sqrt{2} \sin \alpha$$
$$y = 3\sqrt{2} \cos \alpha$$

$$x < 3\sqrt{2} \sin \alpha$$
$$y > 3\sqrt{2} \cos \alpha$$

$$\sqrt{8} \sin \alpha > 0 \quad \cos \alpha > 0$$

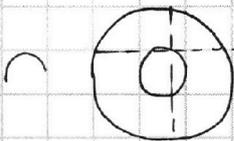
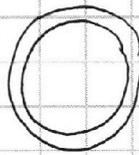
углы всегда равны



$$1 - \cos \alpha$$

$$3\sqrt{2}(1 - \cos \alpha)$$

$$2(5 - 3\sqrt{2}(1 - \cos \alpha)) +$$
$$+$$





На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
_ ИЗ _

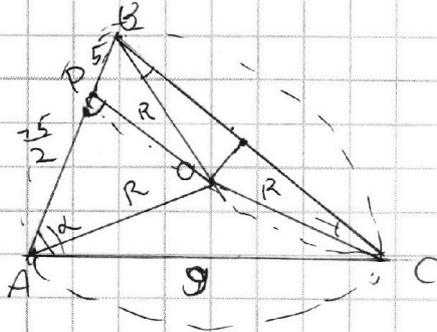
Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Черновик

N 5

$$AP = \frac{15}{2} \quad BP = 5 \quad AC = 9$$

$S_{ABC} = ?$



180°

22

$180^\circ + \alpha$

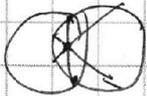
$12,5$

$7,5$

$62,5$

$87,5$

$93,75$



$$90^\circ - \alpha - 90^\circ - \alpha$$

$$12,5^2 + 9^2 - 2 \cdot 12,5 \cdot 9 \cdot \cos 2\alpha = R^2 + R^2 - 2 \cdot 12,5 \cdot R \cdot \cos 2\alpha$$

$$3R^2 - 4R^2 \cos^2 \alpha$$

$$\begin{cases} (x - 3\sqrt{2} \sin \alpha)(y - 3\sqrt{2} \cos \alpha) \leq 0 \\ x^2 + y^2 \leq 25 \end{cases}$$

max знач. периметра?

$$\frac{\sqrt{3}}{2} = 3\sqrt{2}k$$

$$k = \frac{\sqrt{3}}{2 \cdot 3\sqrt{2}} = \frac{1}{2\sqrt{6}}$$

$$x = 3\sqrt{2} \sin 2\alpha$$

Построим квадратик

линейный и 0



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Черновик
4 билета на концерт.

x
0,5 0,3.
 $1,5 + 1$ $1,9 + 2x$ $-0,7 - 2x$
4 билет 1,3.

В начале: 4 билета
В конце: 7 ч.

x одиноким и 4 билета в паре

C_n^4 - всего способов

C_{n-2}^2 - блоч.

$$\rightarrow 2 \cdot \frac{10}{4} = 20$$

$$C_n^4 \cdot 2,5 \cdot \frac{C_{n-2}^2}{C_n^4} = 2,5 \cdot \frac{C_{n-2}^2}{C_n^4}$$

$$\rightarrow \frac{2}{2,5}$$

$$\frac{(n-2) \cdot (n-3)}{2} \cdot 2,5 = \frac{(n-2)(n-3) \cdot 2,5 \cdot 24}{2 \cdot n \cdot (n-1)(n-2)(n-3)} = \frac{30}{n(n-1)}$$

$$C_{n-2}^{y-2} = \frac{(n-2)!}{(y-2)!(n-y)!} = \frac{(n-2)! \cdot y!}{(n!) \cdot (y-2)!} = \frac{y \cdot (y-1)}{n \cdot (n-1)}$$

$$y(y-1) = 30$$

$$y^2 - y - 30 = 0$$

$$(y+6)(y-5) = 0$$

$$y = 0 \vee y = 5.$$

$y = 6$ билетов

$$\frac{1}{2,5} = \frac{4}{10} = 0,4$$

C

$$\frac{12}{n(n-1)} = 0,4$$

30

$$12 = 0,4n^2 - 0,4n$$

$$0,4n^2 - 0,4n - 12 = 0$$

⊖

$$n^2 - n - 30 = 0$$

$$D = 1 + 120 = 121$$

$$n_1 = \frac{1 + \sqrt{121}}{2} = 5$$

$$n_2 = \frac{1 - \sqrt{121}}{2} = -5$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>						

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

