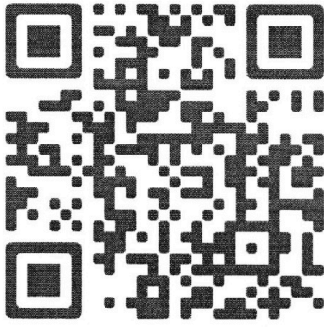




МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

11 КЛАСС. Вариант 1



1. [3 балла] Найдите все тройки натуральных чисел $(A; B; C)$ такие, что:

- A — четырёхзначное число, составленное из одинаковых цифр,
- B — трёхзначное число, хотя бы одна из цифр которого равна 2,
- C — двузначное число, хотя бы одна из цифр которого равна 3,
- произведение $A \cdot B \cdot C$ является квадратом некоторого натурального числа.

2. [3 балла] Положительные числа x и y таковы, что значение выражения $K = \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{2}{xy}$ не изменяется, если x уменьшить на 1, а y — увеличить на 1. Найдите все возможные значения выражения $M = x^3 - y^3 - 3xy$.

3. [5 баллов] а) Найдите все пары действительных чисел $(x; y)$ такие, что $(\sin \pi x + \sin \pi y) \sin \pi x = (\cos \pi x + \cos \pi y) \cos \pi x$.

б) Сколько пар целых чисел (x, y) удовлетворяют одновременно этому уравнению и неравенству

$$\arcsin \frac{x}{5} + \arccos \frac{y}{4} < \frac{3\pi}{2}?$$

4. [4 балла] В начале месяца было выделено 4 билета на праздничный концерт, которые планировалось случайным образом распределить между одиннадцатиклассниками. В конце месяца выяснилось, что будет выделено больше 4 билетов. Одиннадцатиклассники Петя и Вася высчитали, что вероятность им обоим вместе попасть на концерт в начале месяца была в 2,5 раза меньше, чем оказалась в конце месяца. Сколько всего было выделено билетов на концерт в конце месяца, если количество одиннадцатиклассников не изменилось?

5. [5 баллов] Точка O — центр окружности ω_1 , описанной около остроугольного треугольника ABC . Окружность ω_2 , описанная около треугольника BOC , пересекает отрезок AB в точке P . Найдите площадь треугольника ABC , если $AP = \frac{15}{2}$, $BP = 5$, $AC = 9$.

6. [6 баллов] На координатной плоскости изображена фигура $\Phi(\alpha)$, состоящая из всех точек, координаты $(x; y)$ которых удовлетворяют системе неравенств

$$\begin{cases} (x - 3\sqrt{2} \sin \alpha)(y - 3\sqrt{2} \cos \alpha) \leq 0, \\ x^2 + y^2 \leq 25. \end{cases}$$

Найдите максимальное значение M периметра (длины границы) фигуры $\Phi(\alpha)$ и укажите все значения α , при которых оно достигается.

7. [6 баллов] Шар Ω касается всех рёбер правильной усечённой пирамиды, а шар ω касается всех её граней. Пусть сторона верхнего основания меньше, чем сторона нижнего. Найдите отношение площади боковой поверхности пирамиды к площади её нижнего основания.



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

1	2	3	4	5	6	7
☒	☐	☐	☐	☐	☐	☐

СТРАНИЦА
2 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются **отдельно**. Порча QR-кода недопустима!

и ~~то~~ 2 в пятой степени

получили единственную тройку чисел:
(6666', 202', 33')

$$A \cdot B \cdot C = 101 \cdot 6 \cdot 101 \cdot 2 \cdot 11 \cdot 3 \cdot 11 = 11^2 \cdot 101^2 \cdot 3^2 \cdot 2^2$$

Ответ: (6666', 202', 33')



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

1 2 3 4 5 6 7

☒ ☐ ☐ ☐ ☐ ☐ ☐

СТРАНИЦА
1 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Число a , т.к. представлено в виде $\overline{aaaa}$, где $a \in \mathbb{N}$ и $a \in \{1; 9\}$, то A делится нацело на 1111 и представимо в виде: $A = 1111 \cdot a$

$1111 = 101 \cdot 11$, где 101 и 11 - простые числа, значит произведение $A \cdot B \cdot C$ делится нацело на 101 и 11

$A \cdot B \cdot C = n^2$ (где $n \in \mathbb{N}$) $\Rightarrow n^2 : 101 \Rightarrow n : 101 \Rightarrow n^2 : 101^2$, аналогично $n^2 : 11$, а значит т.к. a не может делиться нацело ни на 11 ни на 101, значит число B или C должно делиться нацело на 101 и 11 (чтобы степень вхождения этих чисел в число была четной).

Заметим что C - ^{двузначное} число, а значит оно не может делиться нацело на 101, значит на 101 делится число B , а значит $B = \{101; 202; 303; 404; 505; 606; 707; 808; 909\}$. Как мы видим, единственный вариант числа, которое содержит 2, где число B - это 202. 202 не делится нацело на 11, а значит C делится нацело на 11. Т.к. и число C должно содержать цифру 3, то единственным вариантом для числа C является число 33; а значит:

$$ABC = 1111 \cdot a \cdot 33 \cdot 202 = 101 \cdot 11 \cdot a \cdot 11 \cdot 3 \cdot 101 \cdot 2 = 101^2 \cdot 11^2 \cdot 3 \cdot 2 \cdot a = n^2.$$

В ^{разложении} квадрата числа на простые множители, каждый множитель должен входить в четной степени, а значит a должно делиться на 3 и на 2, а т.к. $a \in \{1; 9\}$, то единственный вариант для a - $3 \cdot 2 = 6$ (в разложении числа a должно входить 3 в нечетной степени)



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☒ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА
1 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\frac{1}{x-1} + \frac{1}{y+1} + \frac{2}{(x-1)(y+1)} = \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{2}{xy} \quad (\text{перенесём всё в одну сторону})$$

$$\frac{x-1-x}{x(x-1)} + \frac{y+1-y}{(y+1)y} + \frac{2(x-1)(y+1)-2xy}{xy(x-1)(y+1)} = 0.$$

$$-\frac{1}{x(x-1)} + \frac{1}{(y+1)y} + \frac{x(x-y-1)}{xy(x-1)(y+1)} = 0$$

$$-\frac{y(y+1) + x(x-1) + 2(x-y-1)}{xy(x-1)(y+1)} = 0$$

$$-\frac{y^2 - y + x^2 - x + 2(xy - 1)}{xy(x-1)(y+1)} = 0$$

$$-\frac{(y+x) + (x-y)(x+y) + 2(x-y-1)}{xy(x-1)(y+1)} = 0$$

$$\frac{(x+y)(x-y-1) + 2(x-y-1)}{xy(x-1)(y+1)} = 0$$

$$\frac{(x-y-1)(x+y+2)}{xy(x-1)(y+1)} = 0$$

$$\Leftrightarrow 3: \begin{cases} x \neq 0 \text{ (по условию всегда выполняется т.к. } x > 0) \\ y \neq 0 \text{ (по условию всегда выполняется т.к. } y > 0) \\ x \neq 1 \\ y \neq -1 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x > 0 \text{ (по улов.)} \\ y > 0 \\ x \neq 1 \\ y \neq -1 \end{cases}$$

$$x \neq 1 \text{ и } y \neq -1 \text{ верно: } \begin{cases} x-y-1=0 \\ x+y+2=0 \end{cases}$$

т.к. $x, y > 0$, то $x+y+2 > 0$, значит $(x-y-1) = 0$.

$x = y+1$ (очевидно, что можно найти такие x и y , чтобы они удовлетворяли ОЗ).



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1
☐

2
☒

3
☐

4
☐

5
☐

6
☐

7
☐

СТРАНИЦА
2 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$M = x^3 - y^3 - 3xy = (y+1)^3 - y^3 - 3(y+1)y = y^3 + 3y^2 + 3y + 1 - y^3 - 3y^2 - 3y = 1$$

Ответ: $M=1$. Данное значение M достигнимо, например при $y=3, x=4$.

$$\frac{1}{4} + \frac{1}{3} + \frac{2}{12} = \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{2}{12} \quad (\text{условие на К.В.М.})$$

$$4^3 - 3^3 - 3 \cdot 4 \cdot 3 = 64 - 27 - 36 = 1$$

Ответ: $M=1$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☒	☐	☐	☐	☐

СТРАНИЦА
2 ИЗ 3

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

случае, когда $\arcsin \frac{x}{5}$ и $\arccos \frac{y}{4}$ принимают свои максимальные значения, только тогда их сумма становится равной $\frac{3\pi}{2}$, во всех остальных случаях, она меньше этого значения. Найдем x и y , при которых достигается данное равенство:

$$\arcsin \frac{x}{5} = \frac{\pi}{2} \Rightarrow \frac{x}{5} = 1 \Rightarrow x = 5$$

$$\arccos \frac{y}{4} = \pi \Rightarrow \frac{y}{4} = -1 \Rightarrow y = -4.$$

Значит под данное неравенство нам подойдут все значения из $\mathbb{Q}$ для x и y , кроме $x = 5$ и $y = -4$.

Нам подойдут значения: $x \in [-5; 5)$
 $y \in (-4; 4]$

из пункта а найдем все подходящие пары целых чисел.

~~$x = 4; x = -4:$~~
$$\begin{cases} y = 1 + (-12) + 2k \\ y = -4 - 1 - 2k \end{cases}$$
 Тогда для значения $y =$

~~$x = -3:$~~
$$\begin{cases} y = 7 - 9 + 2k \\ y = -3 - 1 - 2k \end{cases}$$
 значение для $y:$

~~$\begin{cases} y = 1 \\ y = -1 \\ y = 1 \\ y = 3 \end{cases}$~~

Заметим, что при целых значениях x , серии решений для y одинаковы в обоих случаях для одного определенного значения x :

$y = 1 + 3x + 2k$ — задаёт все целые значения $y \equiv 3x + 1$

$y = x - 1 - 2k$ — задаёт все целые значения $y \equiv x - 1$,

а т.к. $3x + 1 \equiv x - 1$, то данные серии



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☒ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА
1 из 3

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\begin{aligned} a) \sin^2 \pi x + \sin \pi y \sin \pi x &= \cos^2 \pi x + \cos \pi y \cos \pi x \\ \cos^2 \pi x - \sin^2 \pi x + \cos \pi y \cos \pi x - \sin \pi y \sin \pi x &= 0 \\ \cos 2\pi x + \cos(\pi x + \pi y) &= 0. \end{aligned}$$

По формуле суммы косинусов:

$$2 \cos\left(\frac{3\pi}{2}x + \frac{\pi}{2}y\right) \cos\left(\frac{\pi}{2}x - \frac{\pi}{2}y\right) = 0 \text{ (равенство совокупности);}$$

$$\begin{cases} \cos\left(\frac{3\pi}{2}x + \frac{\pi}{2}y\right) = 0 \\ \cos\left(\frac{\pi}{2}x - \frac{\pi}{2}y\right) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{3\pi}{2}x + \frac{\pi}{2}y = \frac{\pi}{2} + \pi k \quad (k \in \mathbb{Z}) \\ \frac{\pi}{2}x - \frac{\pi}{2}y = \frac{\pi}{2} + \pi k \quad (k \in \mathbb{Z}) \end{cases} \Leftrightarrow$$

(сократим на $\frac{\pi}{2}$)

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 3x + y = 1 + 2k \\ x - y = 1 + 2k \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 1 + 3x + 2k \\ y = x - 1 - 2k \end{cases}$$

а) Ответ: $(x, 1 + 3x + 2k)$, $(x, x - 1 - 2k)$, где $k \in \mathbb{Z}$.

$$б) \arcsin \frac{x}{5} + \arccos \frac{y}{4} < \frac{3\pi}{2}.$$

$$0 \leq 3; \begin{cases} \frac{x}{5} \geq -1 \\ \frac{x}{5} \leq 1 \\ \frac{y}{4} \geq -1 \\ \frac{y}{4} \leq 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq -5 \\ x \leq 5 \\ y \geq -4 \\ y \leq 4 \end{cases}$$

По определению: $(\arcsin \frac{x}{5}) \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$.

$(\arccos \frac{y}{4}) \in [0, \pi]$.

Значит их сумма: $(\arcsin \frac{x}{5} + \arccos \frac{y}{4}) \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}]$

Мы видим, что при всех значениях, кроме одного выполняется исходное неравенство. Неравенство не выполняется только в единицу.



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☒	☐	☐	☐	☐

СТРАНИЦА
3 из 3

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

решений для y при одних и тех же x совпадают. Пусть при x нужно найти n -во целых значений y ; при определенном значении x , нужно посчитать n -во целых $y \in x-1$ и которые лежат в промежутке $(-4, 4]$.

Три четных значения x :

$y \equiv 1$, таких значений ^{в промежутке} для каждого четного x y нас 4.

Три нечетных значения x :

$y \equiv 0$, таких значений ^{из промежутка $(-4, 4]$} для каждого нечет. x y нас 4.

Четных значений x в промежутке $[-5; 5]$: 5

Нечетных значений x в промежутке $[-5; 5]$: 5

Значит всего целых пар решений равно:

$$5 \cdot 4 + 5 \cdot 4 = 40$$

Ответ: 40.



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

1
☐

2
☐

3
☐

4
☒

5
☐

6
☐

7
☐

СТРАНИЦА
2 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются **отдельно**. Порча QR-кода недопустима!

$$y^2 - y - 30 = 0$$

$$D = 1 + 120 = 121 \quad y_1 = \frac{1-11}{2} = -5 \text{ (не удов. условию)}$$

$$y_2 = \frac{1+11}{2} = 6$$

Ответ: 6 билетов.



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☒	☐	☐	☐

СТРАНИЦА

1 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Пусть одна из двадцати массовых - x чел., а билетов в конце месяца было выделено y ($y > 4$), причём можно считать, что $y \leq x$, иначе

Рассчитаем вероятность Васе и Теме вместе попасть на концерт в начале в конце месяца

① в начале:

Всего исходов x способов, сколько способов выбрать 4-х людей из x , то есть: C_x^4

Всего исходов, в которых Теме и Васе вместе идут на концерт: Мы уже знаем, что конкретные двое человек идут на концерт, значит нам останется выбрать две другие из $(x-2)$ оставшихся. Сколько способов выбрать 2-х людей из $(x-2)$ оставшихся? C_{x-2}^2

$$P_1 = \frac{C_{x-2}^2}{C_x^4} = \frac{(x-2)! \cdot 4! \cdot (x-4)!}{2! \cdot (x-4)! \cdot x!} = \frac{12}{x(x-1)}$$

② в конце месяца.

Аналогично п.1, всего исходов C_x^4

Исходов с Васей и Темой: Мы так же можем выбрать к ним двоих ещё $(y-2)$ человека из $(x-2)$ оставшихся C_{x-2}^{y-2}

$$P_2 = \frac{C_{x-2}^{y-2}}{C_x^4} = \frac{y \cdot (y-1) \cdot (x-2)! \cdot y! \cdot (x-4)!}{(y-2)! \cdot (x-2-y+2)! \cdot y! \cdot x!} = \frac{y \cdot (y-1)}{x \cdot (x-1)}$$

По условию:

$$\frac{12}{x(x-1)} \cdot 2,5 = \frac{y(y-1)}{x(x-1)} \quad (т.к. $x \geq 4$, то можно записать):$$

$$30 = y(y-1)$$



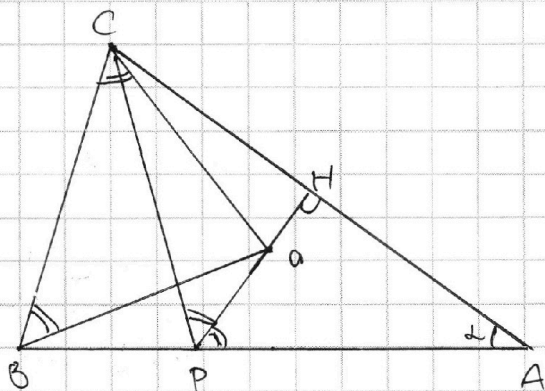
На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☒ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА

1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



Пусть $\angle A = 2^\circ$, тогда

$\angle COB = 2^\circ$, т.к. является центральным и опирается на ту же дугу, что и угол A дуги окружности (ABC) .

$CO = OB$ (как радиусы) $\Rightarrow \triangle COB$ - равнобедренный

$$\Rightarrow \angle OCB = \angle CBO = (180 - 2) \cdot \frac{1}{2} = 90 - 2$$

$\angle CBO = \angle CPO$ (т.к. ч-ки CO и PO - впис. и опираются на одну и ту же дугу)

$$\angle BPO = 180^\circ - \angle BCO \text{ (из вписанности } COB) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \angle OPA = 180 - \angle BPO = \angle BCO = 90 - 2 \Rightarrow \angle CPO = \angle CPA$$

продлим PO до пересечения с CA в т. H .

$$\angle PHA = 90^\circ = 180^\circ - \angle HPA - \angle HAP = 180 - 2 - 90 + 2 =$$

$$= 90. \text{ В } \triangle PHA \text{ бис-са совпадает с}$$

высотой, а значит $\triangle CPA$ - рб $\Rightarrow$

$$\Rightarrow CH = HA = \frac{AC}{2} = \frac{9}{2}$$

$$\text{По т. Пифагора: } HP = \sqrt{AP^2 - HA^2} = \sqrt{\frac{225}{4} - \frac{81}{4}} =$$

$$= \sqrt{\frac{144}{4}} = \frac{12}{2} = 6.$$

$$\sin \alpha = \frac{PH}{AP} = \frac{6 \cdot 2}{15} = \frac{12}{15}$$

$$S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} \cdot AC \cdot BA \cdot \sin \alpha = \frac{1}{2} \cdot 25 \cdot \frac{12}{15} \cdot 9 = 45$$

Ответ: 45



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1
☐

2
☐

3
☐

4
☐

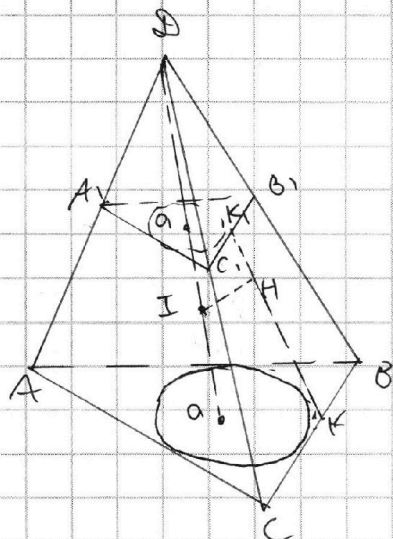
5
☐

6
☐

7
☒

СТРАНИЦА
1 из 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



$\triangle ABC$ и $\triangle A_1B_1C_1$ - впис. по
услов.

Точка I - центр сферы ω .

т. H - проекция I на BC , B

проверим через H - вос-
сому трапеции K_1K

1



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Черновик.

$$3. (\sin \pi x + \sin \pi y) \sin \pi x =$$

$$\sin \alpha \cos \beta = 2 \sin \frac{\alpha + \beta}{2} \cos \frac{\alpha - \beta}{2}$$

$$\alpha = \frac{\pi + y}{2} \quad \beta = \frac{\pi - y}{2}$$

$$2 \sin \frac{\pi + y}{2} \cos \frac{\pi - y}{2} = \sin \pi x + \sin \pi y$$

$$2 \sin \frac{\pi(\pi + y)}{2} \cos \frac{\pi(\pi - y)}{2} \sin \pi x$$

$$\sin^2 \pi x + \sin \pi y \sin \pi x = \cos^2 \frac{\pi}{2} x + \cos \pi y \cos \pi x$$

$$\cos 2\pi x + \cos \pi(\pi + y) = 0$$

$$\cos \pi x + \cos \pi y = 2 \cos \frac{\pi + y}{2} \cos \frac{\pi - y}{2}$$

$$2 \sin \cos \frac{\alpha + \beta}{2} + \cos \frac{\alpha - \beta}{2} = \cos \frac{\alpha}{2} \cos \frac{\beta}{2} + \sin \frac{\alpha}{2} \sin \frac{\beta}{2} + \cos \frac{\alpha}{2} \cos \frac{\beta}{2} + \sin \frac{\alpha}{2} \sin \frac{\beta}{2}$$

$$2 \cos \frac{\alpha}{2} \cos \frac{\beta}{2}$$

$$2 \cos \pi(2\pi + y) \cos$$

$$2 \cos(\frac{3}{2}\pi + \frac{y}{2}) \cos(\frac{\pi}{2}\pi - \frac{y}{2})$$

$$2 \cos$$

$$\frac{2\pi x + \pi x + \pi y}{2} \sin(\frac{3}{2}\pi + \frac{y}{2})$$

$$\cos 0 + \cos 30 = 2 \cos 45 \cos$$

$$2 \cos 60 + \cos 30 = 2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$0 + \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\cos 0 + \cos 60 = 2 \cdot \cos 30 + \cos 30 =$$

$$1 + \frac{1}{2} = \frac{3}{2} \quad 2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{3}{2}$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Черновики

$$\arcsin \frac{x}{5} + \arccos \frac{y}{4} < \frac{3\pi}{2}$$

$$0 \leq 3: \frac{x}{5} \in \left(\frac{x}{5} \leq 1, \frac{x}{5} \geq -1, \frac{y}{4} \geq -1, \frac{y}{4} \leq 1 \right) \Rightarrow \begin{cases} x \leq 5 \\ x \geq -5 \\ y \geq -4 \\ y \leq 4 \end{cases}$$

$$\arcsin \frac{x}{5} + \arccos \frac{y}{4} \leq \frac{3\pi}{2}$$

$$\arcsin \frac{x}{5} \leq \frac{\pi}{2} \Rightarrow \frac{x}{5} \leq 1 \Rightarrow x \leq 5$$

$$\frac{y}{4} \leq -1 \Rightarrow y \leq -4$$

$$\begin{cases} x \leq 5 \\ x \geq -5 \\ y \end{cases}$$

$$x: 1+3k+2k$$

$$x: k-1-2k$$

$$-11+2k$$

$$-11-9-7-5-3-1 \pm 3$$

$$-5-3$$

$$k = k+1+k$$

$$k=$$

$$k-1-2k$$

$$1+3+2k$$

$$k+2k$$

$$-2k$$

$$1+3k+2k \equiv 1+k$$

$$-5-3-1 \pm 3$$

$$-8$$

$$1+3k+2k$$

$$-4$$

$$k-1-2k$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7
☐ ☐ ☐ ☐ ☐ ☐ ☐

СТРАНИЦА
 _ ИЗ _

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Черновик

$$2) \quad x, y > 0 \quad K = \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{2}{xy} \quad M = x^3 - y^3 - 3xy.$$

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{2}{xy} = \frac{1}{(x-1)} + \frac{1}{(y+1)} + \frac{2}{(x-1)(y+1)}$$

$$\frac{x-1-x}{x(x-1)} + \frac{y^2-1-y}{(y+1)y} + \frac{2(x-1)(y+1)-2xy}{xy(x-1)(y+1)} = 0$$

$$-\frac{1}{x(x-1)} + \frac{1}{(y+1)y} + \frac{2xy - 2y + 2x - 2 - 2xy}{xy(x-1)(y+1)} = 0.$$

$$\frac{2x - 2y - 2}{x(x-1)(y+1)}$$

$$\frac{-y^2 + y + x^2 - x}{x(x-1)(y+1)y} = \frac{(x-y)(x+y-1)}{x(x-1)(y+1)y} = \frac{(x+y)(x-y-1)}{x(x-1)(y+1)y}$$

$$\frac{(x+y)(x-y-1)}{x(x-1)(y+1)y} + \frac{2(x-y-1)}{x(x-1)(y+1)y} = 0$$

$$(x-y-1)(x+y+2) = 0$$

$$0 \text{ и } 3: x \neq 1, y \neq -1, y \neq 0, x \neq 0.$$

$$x = y + 1 \vee x = -2 - y \Rightarrow 2(y+1) - (y+2)$$

$$\frac{1}{y+1} + \frac{1}{y} + \frac{2}{y(y+1)} = \frac{1}{y} + \frac{1}{y+1} + \frac{2}{y}$$

$$\frac{1}{-2-y} + \frac{1}{y} + \frac{2}{y(-2-y)} = \frac{1}{-3-y} + \frac{1}{y+1} + \frac{2}{(y+1)(-3-y)}$$

$$y^3 + 3y^2 + 3y + 1 - y^3 - 3y(y+1) = 0 \quad (1)$$

$$x^3 - 8(y^3 + 3y^2 + 3y + 1) - (y^3 + 6y^2 + 12y + 8) =$$

$$y^3 + 3y^2 + 6y - 2y^3 - 3y^2 - 6y + 8 =$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$A, B, C \in \mathbb{N}$ Черновик

$$A = \overline{aaaa}$$

$$B = \overline{2b, b_2}$$

$$C = \overline{c_3}$$

$$A \cdot B \cdot C = n^2$$

$$\begin{array}{r} \overline{aaaa} \\ + \overline{2b, b_2} \\ \hline \end{array}$$

$$\begin{array}{r} \overline{b, b_2 2} \\ + \overline{aaaa} \\ \hline \end{array}$$

Пусть $B = \overline{b, b_2 2}$, тогда $n : 4$.

$$\begin{array}{r} 1111 \\ 2222 \\ 3333 \end{array}$$

① Если $A = 1111$, то $n : 121$

$$\begin{array}{r} \overline{1111} \overline{11} \\ - \overline{7} \overline{11} \\ \hline \overline{31} \overline{11} \\ - \overline{28} \overline{11} \\ \hline \overline{31} \overline{11} \end{array}$$

$B : 101 \vee C$ не может делиться на $101 \Rightarrow B : 101$

$$\begin{array}{r} 101 \\ 202 \\ 303 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} C : 11 \\ 33 \end{array}$$

1) $(1111, 202, 33)$

② Если $A = 2222$, то $A = 101 \cdot 11 \cdot 2$

$$\begin{array}{r} 202 \\ 2 \cdot 101 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 33 \\ 11 \cdot 3^x \end{array}$$

3) Если $A = 3333$, то $A = 101 \cdot 11 \cdot 3$

$$\begin{array}{r} B = 202 \\ 101 \cdot 2 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} C = 33 \\ 3 \cdot 11 \end{array}$$

Все группы не подходят.

Ответ: 11

11 22 33 44 55 66 77 88 99



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

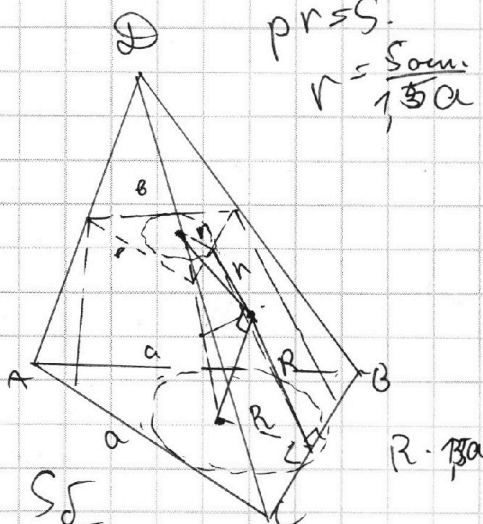
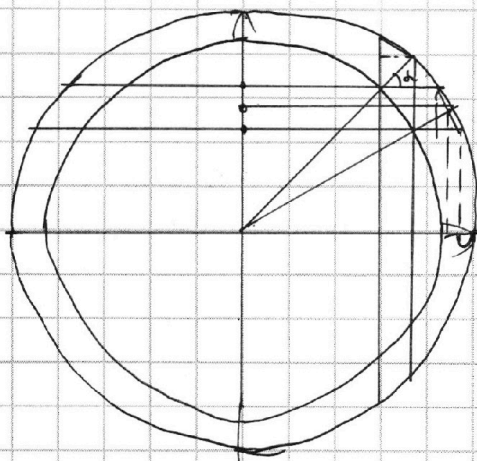
1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Черновик

5 352



$$pr = S$$

$$r = \frac{S_{\text{осн}}}{130a}$$

$$R \cdot 13a$$

$$\frac{S_5}{S_{\text{осн}}}$$

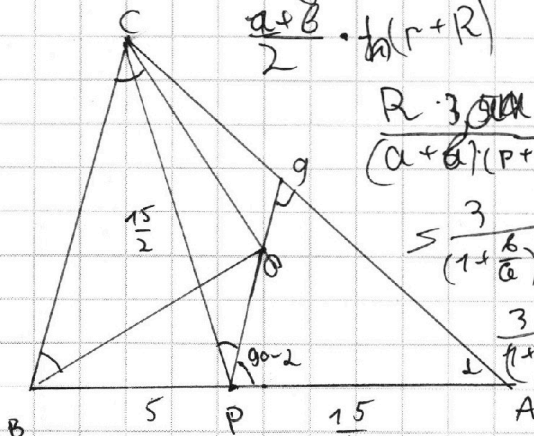
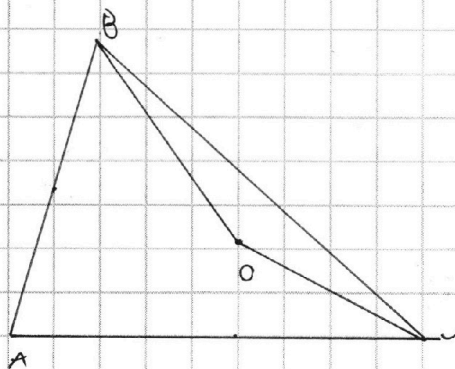
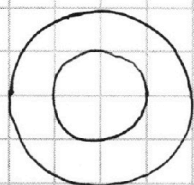
оригинал трапеции

$$\frac{a+b}{2} \cdot h(r+R)$$

$$\frac{R \cdot 30a}{(a+b)(r+R)} \leq$$

$$\leq \frac{3}{(1+\frac{b}{a})(\frac{r}{R}+1)}$$

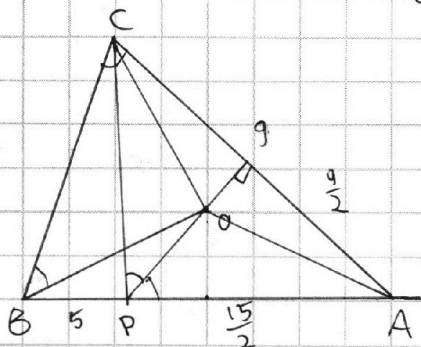
$$\frac{3}{(1+\frac{b}{a})^2}$$



$$5 \sqrt{\frac{225}{4} - \frac{81}{4}} \leq \frac{12}{2}$$

$$\frac{225}{4} - \frac{81}{4}$$

$$S_{\text{инд}} =$$





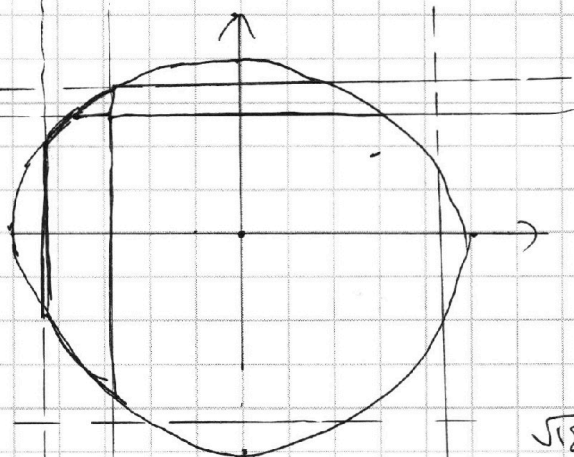
На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Черновик

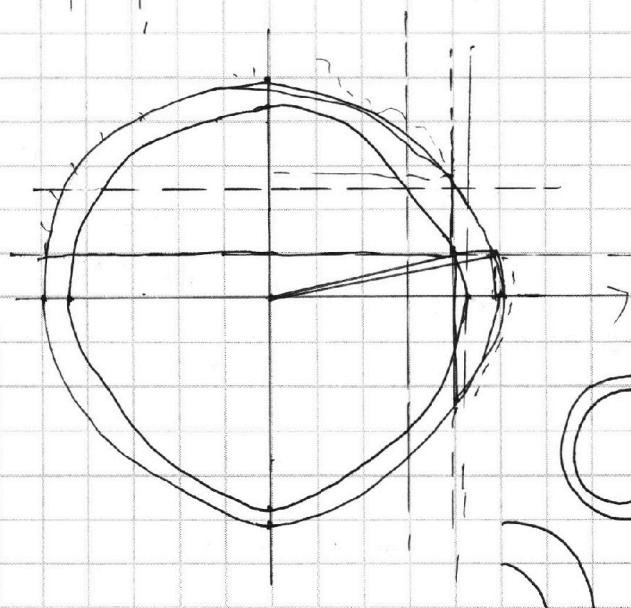


$$x = 3\sqrt{2} \sin \alpha$$
$$y = 3\sqrt{2} \cos \alpha$$

$$x < 3\sqrt{2} \sin \alpha$$
$$y > 3\sqrt{2} \cos \alpha$$

$$\sqrt{2} \sin \alpha > 0 \quad \cos \alpha > 0$$

дуги всегда равны



$$1 - \cos \alpha$$

$$3\sqrt{2}(1 - \cos \alpha)$$

$$2(5 - 3\sqrt{2}(1 - \cos \alpha)) +$$
$$+$$





На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.



СТРАНИЦА
__ ИЗ __

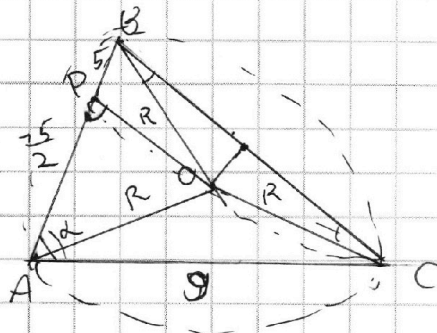
Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Черновик

N 5

$$AP = \frac{15}{2} \quad BP = 5 \quad AC = 9$$

$S_{ABC} = ?$



$$7,5 \cdot 12,5$$

$$\begin{array}{r} 12,5 \\ \times 7,5 \\ \hline 625 \\ 875 \\ \hline 937,5 \end{array}$$

$$180^\circ$$

$$180^\circ + 2 \cdot 11^\circ$$



$$90^\circ - 2 - 90^\circ - 2$$

$$12,5^2 + 9^2 - 2 \cdot 12,5 \cdot 9 \cdot \cos 2 = R^2 + R^2 - 2 \cdot 12,5 \cdot 9 \cdot \cos 2$$

$$3R^2 - 4R^2 \cos^2 2$$

$$\begin{cases} (x - 3\sqrt{2} \sin 2)(y - 3\sqrt{2} \cos 2) \leq 0 \\ x^2 + y^2 \leq 25 \end{cases}$$

max знач. периметра?

$$\frac{\sqrt{3}}{2} = 3\sqrt{2}k$$

$$k = \frac{\sqrt{3}}{2 \cdot 3\sqrt{2}} = \frac{1}{2\sqrt{6}}$$

$$x \leq 3\sqrt{2} \sin 2 \vee$$

Построим график
линейный и о



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
из

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Черновик
4 билета на концерт.

x

0,5

0,3.

1,5 + 1

1,9 + 2x

-0,7 - 2x

4 билета

1,3.

в начале: 4 билета

в конце: 74.

и одинаково: и у билетов в конце

C_n^4 - всего способов

C_{n-2}^2 - бил.

$$C_{2,5}^2 \cdot \frac{C_{n-2}^2}{C_n^4} = 2,5 \cdot \frac{C_{n-2}^2}{C_n^4}$$

$$12 \cdot \frac{10}{4} = 30$$

$$\frac{12}{2,5}$$

$$\frac{(n-2) \cdot (n-3)}{2} \cdot 2,5 = \frac{(n-2)(n-3) \cdot 2,5 \cdot 24}{2 \cdot n \cdot (n-1)(n-2)(n-3)} = \frac{30}{n(n-1)}$$

$$C_{n-2}^{y-2} = \frac{(n-2)!}{(y-2)!(n-y)!} = \frac{(n-2)! \cdot y!}{(n! \cdot (y-2)!)} = \frac{y \cdot (y-1)}{n \cdot (n-1)}$$

$$y(y-1) = 30$$

$$y^2 - y - 30 = 0$$

$$(y+6)(y-5) = 0$$

$$y = 6 \vee y = -5.$$

$y = 6$ билетов

$$\frac{1}{2,5} = \frac{4}{10} = 0,4.$$

C

$$\frac{12}{n(n-1)} = 0,4$$

30

$$12 = 0,4n^2 - 0,4n$$

$$0,4n^2 - 0,4n - 12 = 0$$

⊖

$$n^2 - n - 30 = 0$$

$$\Delta = 1 + 120 = 121$$

$$n_1 = \frac{1+11}{2} = 5$$

$$n_2 = \frac{1-11}{2} = -5$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

