



МОСКОВСКИЙ  
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ  
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"  
ПО МАТЕМАТИКЕ

## 11 КЛАСС. Вариант 11



- [3 балла] Дан приведённый квадратный трёхчлен  $f(x)$  такой, что уравнение  $f(x) = 2x^2$  имеет единственное решение, а также уравнение  $f(x) = -8$  имеет единственное решение. Найдите сумму корней уравнения  $f(x) = 0$ .
- [3 балла] Сколькими способами можно представить число  $n = 2^{401} \cdot 3^{500}$  в виде произведения двух натуральных чисел  $x$  и  $y$ , где  $y$  делится на  $x$ ?
- [5 баллов] Найдите количество пар целых чисел  $(x; y)$ , удовлетворяющих системе

$$\begin{cases} \log_x 2 + 3 \log_y 8 + 4 \log_{xy} \frac{1}{16} = 0, \\ \frac{x-1}{x+1} > \frac{3y-3}{7y+7}, \\ x \leq 31. \end{cases}$$

- [5 баллов] Найдите все пары натуральных чисел  $(a; b)$  такие, что

$$\begin{cases} 4 \cdot \min(a; b) = 3(a - b)^2, \\ 3 \cdot \max(a; b) = \text{НОК}(a; b). \end{cases}$$

- [5 баллов] На сторонах  $BA$  и  $BC$  треугольника  $ABC$  с тупым углом  $B$  как на диаметрах построены окружности  $\omega_1$  и  $\omega_2$  соответственно, пересекающиеся в точках  $B$  и  $D$ . Хорда  $BE$  окружности  $\omega_1$  перпендикулярна  $BC$ , а хорда  $BF$  окружности  $\omega_2$  перпендикулярна  $CE$  и касается  $\omega_1$ . Найдите отношение  $BF : BD$ , если  $\cos \angle BCE = \frac{3}{5}$ .

- [5 баллов] При каких значениях параметра  $a$  система

$$\begin{cases} (y - x^2 - x - 1)(x^2 - 3xy + 4y^2)(y + x - 1) = 0, \\ y = (2a + 1)x - a^2 + 1 \end{cases}$$

имеет ровно 2 решения?

- [6 баллов] В прямую четырёхугольную призму  $ABCDA_1B_1C_1D_1$  вписана сфера  $\omega$ . Луч с началом в точке  $A$  пересекает  $\omega$  в точках  $P$  и  $Q$ , а луч с началом в точке  $C$  пересекает  $\omega$  в точках  $M$  и  $N$ . Пусть  $O$  — точка пересечения диагоналей четырёхугольника  $ABCD$ . Найдите объём призмы  $ABCDA_1B_1C_1D_1$  и расстояние  $\rho$  от центра  $\omega$  до плоскости  $PAC$ , если известно, что  $AO = 1$ ,  $BO = 2$ ,  $CO = 4$ ,  $AP = \frac{\sqrt{5}}{3}$ ,  $AQ = \frac{5\sqrt{5}}{3}$ ,  $CM = \frac{10\sqrt{5}}{9}$ ,  $CN = 2\sqrt{5}$ .



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

1

2

3

4

5

6

7

СТРАНИЦА  
1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по **каждой из задач** **нумеруются отдельно**. Порча QR-кода недопустима!

$$f(x) = ax^2 + bx + c$$

№1

$$f(x) = 0 \Rightarrow x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$ax^2 + bx + c = 2x^2 \rightarrow (a-2)x^2 + bx + c = 0$$

$$D = b^2 - 4c(a-2) = 0 \quad \text{т.к. одно}\newline \text{решение}$$

$$ax^2 + bx + c = -8 \rightarrow ax^2 + bx + (c+8) = 0$$

$$D = b^2 - 4a(c+8) = 0$$

$$\Rightarrow 4c(a-2) = 4a(c+8) \quad c = -4a \Rightarrow b^2 = 16a(2-a)$$

$$\text{Сумма корней } x_1 + x_2 = \frac{-b}{a} = \frac{\pm \sqrt{16a(2-a)}}{2a}$$

Приведённый трёхчлен у которого  $a=1$

$$\Rightarrow x_1 + x_2 = \frac{\pm \sqrt{16}}{2} = \pm 2$$

Ответ: ±2



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

- |                          |                                     |                          |                          |                          |                          |                          |
|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1                        | 2                                   | 3                        | 4                        | 5                        | 6                        | 7                        |
| <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

СТРАНИЦА  
1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач **нумеруются отдельно**. Порча QR-кода недопустима!

№2

$$n = 2^{401} \cdot 3^{500} = x \cdot y, y = kx, k \in \mathbb{N} \Rightarrow n = k \cdot x^2$$

Значит кол-во вариантов будет кол-во вариантов представить

$n$  в виде  $kx^2$ , где  $x$  состоит из набора множителей  $n$ .

$$\begin{matrix} 2^0; 2^1; 2^2; \dots; 2^{400} \\ x^2 < \\ 3^0; 3^1; 3^2; \dots; 3^{500} \end{matrix}$$

Важно, что 2 и 3 взаимно простые!

Чтобы получить  $x^2$ , надо взять одно число из множества двоек, одно число из множества троек, а это кол-во будет  $201$  способов  $2^n$   
 $251$  способов  $3^n \Rightarrow 201 \cdot 251$  способов  
т.к. они все будут разные из разложения на множители

Ответ:  $201 \cdot 251 = 50451$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.



- |                          |                          |                                     |                          |                          |                          |                          |
|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |
|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|

СТРАНИЦА  
1 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по **каждой из задач** нумеруются **отдельно**. Порча QR-кода недопустима!

$$\left\{ \begin{array}{l} \log_x 2 + 3 \cdot \log_y 8 + 4 \cdot \log_{xy} \frac{1}{16} = 0 \\ \frac{x-1}{x+1} > \frac{3y-3}{7y+7} \\ x \leq 31 \end{array} \right.$$

ОДЗ:

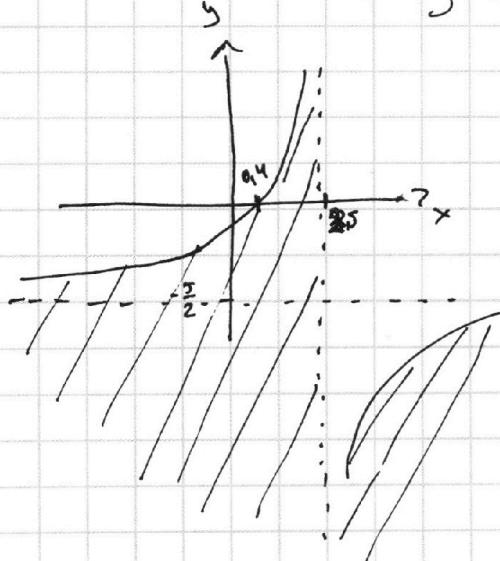
$$\begin{aligned} x &> 0 \\ y &> 0 \\ x &\neq 1 \\ y &\neq 1 \end{aligned}$$

$$\frac{x-1}{x+1} > \frac{3}{7} \cdot \frac{y-1}{y+1} \Rightarrow 1 + \frac{2}{x-1} < \frac{7}{3} + \frac{7}{3} \cdot \frac{2}{y-1}$$

$$-\frac{2}{3} + \frac{1}{x-1} < \frac{7}{3} \cdot \frac{1}{y-1}$$

$$\frac{5-2x}{x-1} < \frac{7}{3(y-1)}$$

$$\Rightarrow y < 1 + \frac{7(x-1)}{5-2x}$$



На рисунке ~~берутся~~ n-б0

+ добавим ОДЗ логарифма,

получим, что  $x \in [0,1; 2,5]$

тут всего целые  $x=1,2$

Рассмотрим их.  $x \neq 1$  но ОДЗ

$$\Rightarrow x=2$$

$$\log_2 2 + 3 \cdot \log_y 8 + 4 \cdot \log_{2y} \frac{1}{16} = 0$$

$$1 + 9 \cdot \log_y 2 - 16 \cdot \log_{2y} 2 = 0$$

$$1 + \frac{9}{\log_2 y} - \frac{16}{\log_2 2y} = 0$$

$$1 + \frac{9}{t} - \frac{16}{1+t} = 0$$

$$\log_2 y = t$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

1

2

3

4

5

6

7

СТРАНИЦА  
2 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. **Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно.** Порча QR-кода недопустима!

$$1 + \frac{9}{t} = \frac{16}{1+t}$$

$$\frac{t+9}{t} = \frac{16}{1+t}$$

$$t + t^2 + 9 + 9t = 16t$$

$$t^2 - 6t + 9 = 0$$

$$t = 1, 3$$

$$\Rightarrow \log_2 y = 3 \Rightarrow y = 8$$

$$\log_2 y = -3 \Rightarrow y \notin \mathbb{Z}$$

Ответ:  
 $x=2$   
 $y=8$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

- |                            |                            |                            |                                       |                            |                            |                            |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|---------------------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|
| <input type="checkbox"/> 1 | <input type="checkbox"/> 2 | <input type="checkbox"/> 3 | <input checked="" type="checkbox"/> 4 | <input type="checkbox"/> 5 | <input type="checkbox"/> 6 | <input type="checkbox"/> 7 |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|---------------------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|

СТРАНИЦА  
1 из 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по **каждой из задач** нумеруются **отдельно**. Порча QR-кода недопустима!

$$\begin{cases} 4 \cdot \min(a; b) = 3(a-b)^2 \\ 3 \cdot \max(a; b) = \text{НОК}(a; b) \end{cases}$$

N4

Очевидно,  $a \neq b$ . Иначе не выполняется равенство N1 и N2.

Пусть  $b > a$ .  $\Rightarrow \begin{cases} 4 \cdot a = 3(a-b)^2 \\ 3 \cdot b = \text{НОК}(a; b) \end{cases}$

Рассмотрим первое выражение.  $\frac{a}{3} = \left(\frac{a-b}{2}\right)^2 = \left(\frac{b-a}{2}\right)^2$

Пусть  $k = \frac{b-a}{2}$ . Тогда  $a = 3k^2$ ,  $b = 3k^2 + 2k$ . Из выражений следует, что  $k \in \mathbb{N}$ .  
( $k > 0$ )

Тогда  $3 \cdot b = \text{НОК}(a; b) \rightarrow 3 \cdot (3k^2 + 2k) = \text{НОК}(3k^2; 3k^2 + 2k)$

$\frac{1}{k} \quad \frac{1}{k}$   
 $\Rightarrow$  можно вынести

$$3k(3k+2) = \text{НОК}(3k; 3k+2) \cdot k$$

$$3 \cdot (3k+2) = \text{НОК}(3k; 3k+2)$$

Такое выражение верно до тех пор, пока  $(3k+2) : k$ .  $\Rightarrow$

$$\left(\frac{3k+2}{k}\right) \in \mathbb{N} \quad \frac{3k+2}{k} = 3 + \frac{2}{k} \quad \Rightarrow \begin{cases} k=1 \\ k=2 \end{cases}, \text{ остальные случаи не подходит.}$$

$$k=1 \Rightarrow b = 3 \cdot 1^2 + 2 \cdot 1 = 5 \quad a = 3 \cdot 1^2 = 3$$

$$k=2 \Rightarrow b = 3 \cdot 2^2 + 2 \cdot 2 = 16 \quad a = 3 \cdot 2^2 = 12$$

для случая  $a > b$  аналогично.

Ответ:  $(3; 5); (5; 3); (12; 16); (16; 12)$

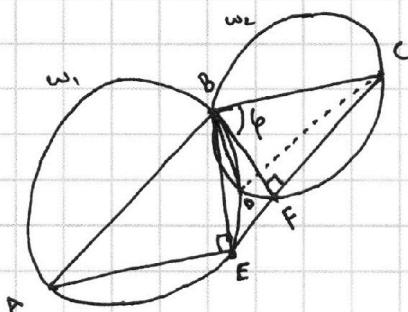


На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

- |                            |                            |                            |                            |                                       |                            |                            |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|---------------------------------------|----------------------------|----------------------------|
| <input type="checkbox"/> 1 | <input type="checkbox"/> 2 | <input type="checkbox"/> 3 | <input type="checkbox"/> 4 | <input checked="" type="checkbox"/> 5 | <input type="checkbox"/> 6 | <input type="checkbox"/> 7 |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|---------------------------------------|----------------------------|----------------------------|

СТРАНИЦА  
1 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач **нумеруются отдельно**. Порча QR-кода недопустима!



н5

Пусть  $\angle FBC = \beta$ .

Из условия  $BF \perp CE$ .  $\Rightarrow$

Т.к. B и C на одном диаметре, а угол между этими прямими - прямой, то точка F не может лежать внутри или за окружностью, а только на ней ( $\angle BFC = 90^\circ$ ,  $BC$ -дiam.= $\Rightarrow F \in w_2$ )

$BF$  касается  $w_1 \Rightarrow \angle ABF = 90^\circ$

$\angle AFB = 90^\circ$  как на диаметре,  $\angle BDC = 90^\circ$  ~~как~~  $\angle BDC = 90^\circ$   $\angle$   $AB$  диам.  $BC$

По условию  $BE \perp BC \Rightarrow \angle EBC = 90^\circ \Rightarrow$

$$\angle ABC = \angle ABE + \angle EBC = \angle CBF + \angle FBA$$

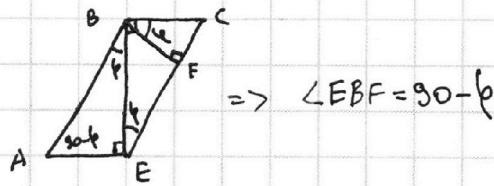
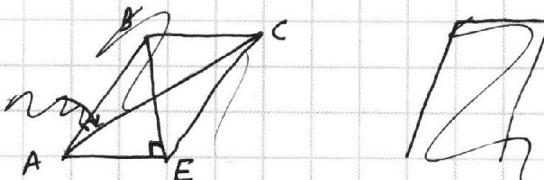
$$" " " " \Rightarrow \angle ABE = \beta$$

$$90^\circ \quad 90^\circ \quad 90^\circ$$

Т.к.  $BE \perp AE$  и  $BE \perp BC$ , то  $AE \parallel BC$   
 $\text{гипот. } AB$   $\text{услов.}$

Т.к.  $\angle FBC = \beta \Rightarrow \angle BCF = 90 - \beta$ ,  $\beta \triangle BEC \angle EBC = 90^\circ \Rightarrow \angle BEC = \beta$

$\angle ABE = \beta = \angle BEC \Rightarrow AB \parallel EC \Rightarrow ABCE - \text{параллелограмм}$



$$BF = BC \cdot \sin \angle BCF$$

$$BD = BC \cdot \sin \angle BCD$$

$$\Rightarrow \frac{RF}{BD} = \frac{\sin \angle BCF}{\sin \angle BCD}$$

$$\sin(90 - \beta)$$

$$BF = BC \cdot \sin \angle BCF = BC \cdot \cos \beta$$

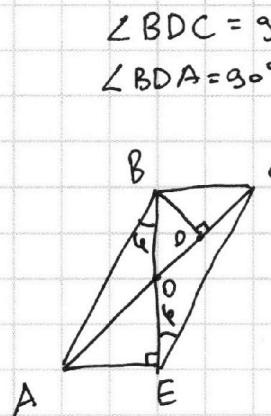


На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

- |                            |                            |                            |                            |                                       |                            |                            |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|---------------------------------------|----------------------------|----------------------------|
| <input type="checkbox"/> 1 | <input type="checkbox"/> 2 | <input type="checkbox"/> 3 | <input type="checkbox"/> 4 | <input checked="" type="checkbox"/> 5 | <input type="checkbox"/> 6 | <input type="checkbox"/> 7 |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|---------------------------------------|----------------------------|----------------------------|

СТРАНИЦА  
2 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач **нумеруются отдельно**. Порча QR-кода недопустима!



$\Rightarrow D$  лежит на  $AC$

$$\cos(90-\phi) = \frac{3}{5} \text{ по условию} \Rightarrow \sin\phi = \frac{3}{5}$$

Пусть  $BC=3$

$$BE=4 \Rightarrow OE=2$$

$$AB=CE=5$$

$$\cos\phi = \frac{4}{5}$$

$$\tan\phi = \frac{3}{4}$$

O - точка пересечения диагоналей  
AOE - вена

$$T \cdot \cos \phi \geq \Delta OEC \quad OC^2 = OE^2 + EC^2 - 2 \cdot OE \cdot EC \cdot \cos\phi$$

$$OC^2 = 4 + 25 - 2 \cdot 2 \cdot 5 \cdot \frac{4}{5} = 29 - 16 = 13$$

$$OC = \sqrt{13}$$

$$\text{Тогда } S_{BOC} = \frac{1}{2} \cdot OB \cdot BC = \frac{1}{2} \cdot OC \cdot BD$$

$$\Rightarrow BD = \frac{OB \cdot BC}{OC} = \frac{2 \cdot 3}{\sqrt{13}} = \frac{6}{\sqrt{13}}$$

$$BF = BC \cdot \cos\phi = 3 \cdot \frac{4}{5} = \frac{12}{5} \Rightarrow \frac{BF}{BD} = \frac{12}{5} \cdot \frac{\sqrt{13}}{6} = \frac{2}{5} \sqrt{13}$$

$$\text{Ответ: } \frac{2}{5} \sqrt{13}$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

- |                            |                            |                            |                            |                            |                                       |                            |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|---------------------------------------|----------------------------|
| <input type="checkbox"/> 1 | <input type="checkbox"/> 2 | <input type="checkbox"/> 3 | <input type="checkbox"/> 4 | <input type="checkbox"/> 5 | <input checked="" type="checkbox"/> 6 | <input type="checkbox"/> 7 |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|---------------------------------------|----------------------------|

СТРАНИЦА  
1 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

N6

$$\begin{cases} (y-x^2-x-1)(x^2-3xy+4y^2)(y+x-1) = 0 \\ y = (2a+1)x - a^2 + 1 \end{cases}$$

Заметим, что ~~нет~~ решение этой системы это

объединение решений трёх систем:

$$\begin{array}{l} \textcircled{1} \\ \begin{cases} y - x^2 - x - 1 = 0 \\ y = (2a+1)x - a^2 + 1 \end{cases} \end{array} \quad \begin{array}{l} \textcircled{2} \\ \begin{cases} x^2 - 3xy + 4y^2 = 0 \\ y = (2a+1)x - a^2 + 1 \end{cases} \end{array} \quad \begin{array}{l} \textcircled{3} \\ \begin{cases} y + x - 1 = 0 \\ y = (2a+1)x - a^2 + 1 \end{cases} \end{array}$$

Начнём со второй.

$$x^2 - 3xy + 4y^2 = 0 \Rightarrow x=0=y \Rightarrow 0 = (2a+1) \cdot 0 - a^2 + 1 \Rightarrow a = \pm 1$$

Т.е. при  $a = \pm 1$  всегда есть решение  $x=0, y=0$ .  
При других  $a$  и  $y$  этой системы нет решения.

3-я система:

$$\begin{cases} y + x - 1 = 0 \\ y = 1 - x \\ 1 - x = (2a+1)x - a^2 + 1 \end{cases}$$

$$2(a+1)x = a^2$$

$$x = \frac{a^2}{2(a+1)} \quad y = \frac{2a+2-a^2}{2a+2}$$

Если  $a = -1$ , то у этой системы нет решения.  $\Rightarrow$  при остальных  $a$  есть.

1-я система:

$$\begin{aligned} y = x^2 + x + 1 &\Rightarrow (2a+1)x - a^2 + 1 = x^2 + x + 1 \\ x^2 - x \cdot 2a - a^2 = 0 & \\ (x-a)^2 = 0 &\Rightarrow x=a \end{aligned}$$

*система имеет такое  
решение при любом  $a$ .*

$$y = a^2 + a + 1$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

 1 2 3 4 5 6 7СТРАНИЦА  
2 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по **каждой** из задач **нумеруются отдельно**. Порча QR-кода недопустима!

Получили решение системы исходальной:

$$\begin{aligned} x &= a \\ y &= a^2 + a + 1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x &= \frac{a^2}{2(a+1)} \\ y &= \frac{2a+2-a^2}{2(a+1)} \end{aligned}$$

при  $a \neq -1$

$$x = 0$$

$$y = 0$$

$a = -1 \rightarrow$  гba решения

$$a = 1 \rightarrow \begin{aligned} x &= 1 & x &= \frac{1}{4} & x &= 0 \\ y &= 3 & y &= \frac{3}{4} & y &= 0 \end{aligned} \Rightarrow \text{не подходит, три решения}$$

Посмотрим, когда решения совпадают.

$$x_1 = x_2 \quad a = \frac{a^2}{2(a+1)} \Rightarrow 2a^2 + 2a = a^2 \Rightarrow a(a+2) = 0 \Rightarrow \begin{cases} a = 0 \\ a = -2 \end{cases}$$

$$y_1 = y_2 \quad a^2 + a + 1 = \frac{2a+2-a^2}{2(a+1)}$$

Если  $x$  совпадают только при  $a = 0$  и  $a = -2$ ,  
то достаточно проверить совпадения  
и при этих  $a$ .

$$a = 0 \Rightarrow y_1 = 0 + 0 + 1 = 1$$

$$y_2 = \frac{0+2-0}{2} = 1 \quad \text{- совпад}$$

$\Rightarrow$  при  $\begin{cases} a = 0 \\ a = -2 \end{cases}$  система имеет 1 решение

$$a = -2 \quad y_1 = 4 - 2 + 1 = 3$$

$$y_2 = \frac{4+2-4}{2(-1)} = 3 \quad \text{- совпад}$$

$\Rightarrow$  система имеет 2 решения при  $a \in (-\infty; -2) \cup a \in (-2; 0)$

$$a \in (0; 1)$$

$$a \in (1; +\infty)$$

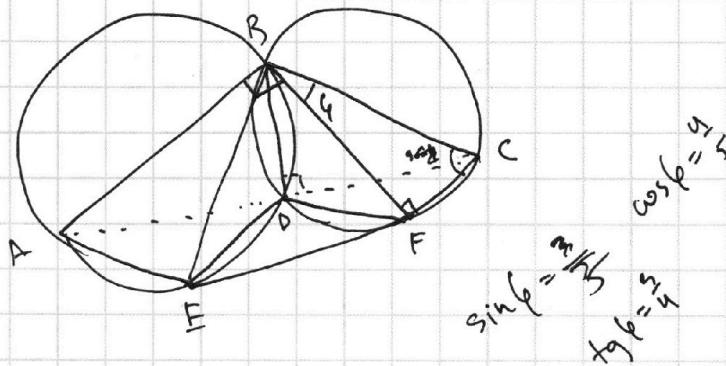
Ответ:

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

- |                            |                            |                            |                            |                            |                            |                            |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|
| <input type="checkbox"/> 1 | <input type="checkbox"/> 2 | <input type="checkbox"/> 3 | <input type="checkbox"/> 4 | <input type="checkbox"/> 5 | <input type="checkbox"/> 6 | <input type="checkbox"/> 7 |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|

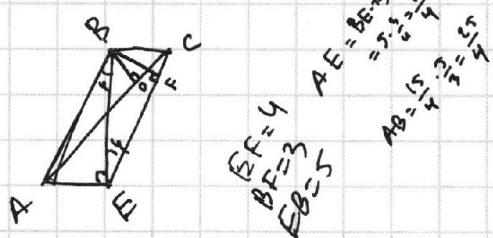
СТРАНИЦА  
\_ ИЗ \_

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по **каждой из задач** нумеруются **отдельно**. Порча QR-кода недопустима!



$$\sin \angle AEB = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\operatorname{tg} \angle AEB = \frac{\sqrt{3}}{1}$$



$$AE = \frac{BE \cdot EF}{EF - BE} = \frac{3 \cdot 4}{4 - 3} = 12$$

$$AB = \frac{EF \cdot BE}{EF - BE} = \frac{4 \cdot 3}{4 - 3} = 12$$

$$\frac{x-1}{x+1} > \frac{3}{7} \cdot \frac{y-1}{y+1}$$

$$\frac{xy}{x-1} < \frac{7}{7} \cdot \frac{y+1}{y-1}$$

$$x - \frac{2}{x-1} < \frac{4}{3} + \frac{2}{3} \cdot \frac{2}{y-1}$$

$$\frac{1}{x-1} < \frac{2}{3} + \frac{7}{3} \cdot \frac{1}{y-1}$$

$$\frac{3(x-1) - 2(y-1)}{3(x-1)} < \frac{7}{3(y-1)}$$

$$\frac{5-2x}{x-1} < \frac{7}{y-1}$$

$$\frac{x-1}{5-2x} > \frac{y-1}{7}$$

$$\frac{7-2}{5-x} < \frac{5-2}{7-y}$$

$$\frac{1}{3}, \frac{7}{9}, \frac{7}{8}$$

$$y < \left( + \frac{7(x-1)}{5-2x} \right)$$

$$\left( \frac{7x-7}{5-2x} \right)^1 = \frac{4 \cdot (5-2x) + 2(7x-7)}{(5-2x)^2} =$$

$$= \frac{35 - 14x + 14x - 14}{(5-2x)^2} = \frac{21}{(5-2x)^2}$$

$$\frac{7(x-1)}{5-2x} = -1$$

$$7x - 7 = -5 + 2$$

$$5x = 2 \quad x = \frac{2}{5}$$

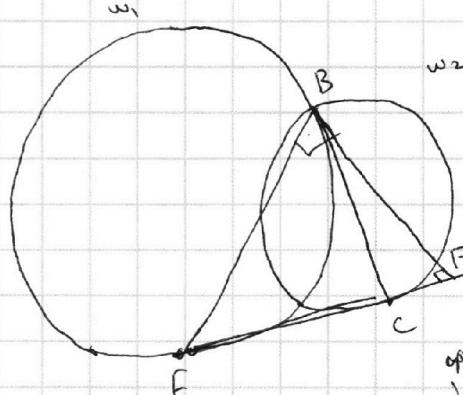
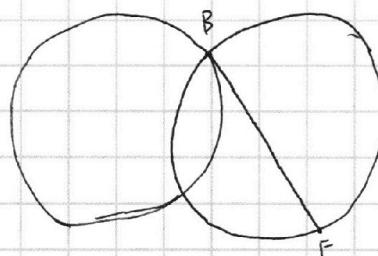
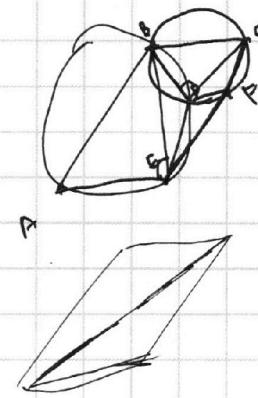
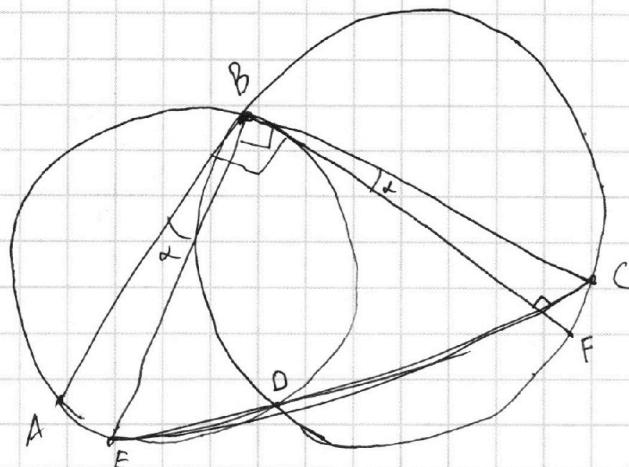
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.



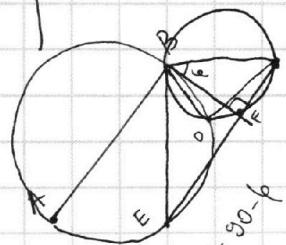
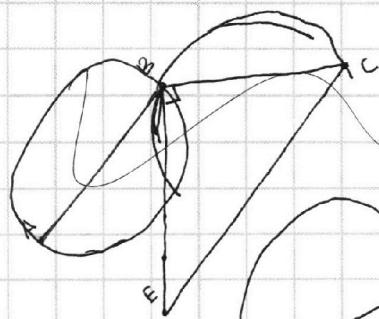
- |                          |                          |                          |                          |                          |                          |                          |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| <input type="checkbox"/> |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|

СТРАНИЦА  
ИЗ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. **Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно.** Порча QR-кода недопустима!



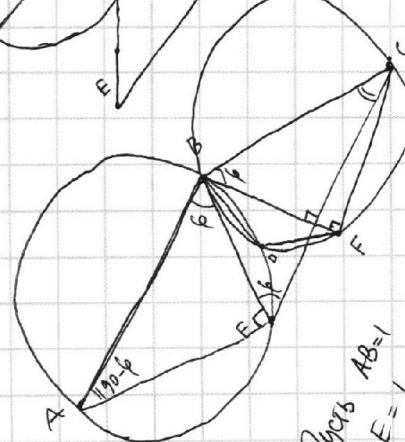
$$22\frac{1}{2}$$



$$\angle BCD = 90-f$$

$$\angle BCF = 90-f$$

$$\sin BDF = \frac{BD}{\sin BFD}$$



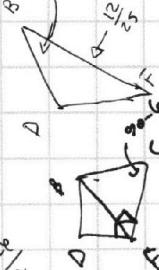
$$\text{Рассмотрим } \triangle AEB$$

$$AE = 1, \cos(90-f) = \sin f = \frac{3}{5} = BE$$

$$BF = \frac{4}{5} \cdot \sin f = \frac{12}{25}$$

$$\angle CBD = \angle CBF + \angle FBD$$

$$f'' = \frac{90-f}{2}$$



$$BD = BC \cdot \sin \frac{90-f}{2}$$

$$BF = BC \cdot \sin \frac{90-f}{2}$$

$$BD = BC \cdot \sin \frac{90-f}{2} \cdot \sin(90-f)$$

—

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.



- |                          |                          |                          |                          |                          |                          |                          |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| <input type="checkbox"/> |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|

СТРАНИЦА  
ИЗ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по **каждой из задач** нумеруются **отдельно**. Порча QR-кода недопустима!

№1

$$n = 2^{401} \cdot 3^{500}$$

$$y = kx$$

$$\times \frac{201}{251}$$

$$\Rightarrow x \cdot y = k \cdot x^2 = n$$

$$\begin{array}{r} 201 \\ + 251 \\ \hline 452 \\ - 402 \\ \hline 50451 \end{array}$$

№2

$$x^2 = \text{комб. } 2^0, 2^2, 2^4, 2^6, 2^8, \dots, 2^{998}, 2^{1000}$$

$$2^0, 3^2, 3^4, 3^6, 3^8, \dots, 3^{998}, 3^{1000}$$

№4

$\Rightarrow$  201 вариант

251 вариант

$\Rightarrow 201 \cdot 251$

$$4 \cdot \min(a; b) \geq 3(a-b)^2$$

$$3 \cdot \max(a; b) = \text{НОК}(a; b) \text{ для всех делителей от } a \text{ и } b$$

Пусть  $b > a$ :

$$4 \cdot a = 3(b-a)^2$$

$$3 \cdot b = \text{НОК}(a; b)$$

■

$$b - 4a \Rightarrow a - 4a$$

$b - 4a \Rightarrow a - \text{делитель}$

$$\frac{a}{3} = \left(\frac{b-a}{2}\right)^2$$

$$a = 3 \cdot k^2$$

$$2k = b-a$$

$$b = 3k^2 + 2k$$

$$3k^2 + 2k = \text{НОК}(3k^2 + 2k, 3k^2) \quad \cancel{b=a+b-a}$$

$$(3k^2 + 2k) \cdot 3 = 9k^2 + 6 = \text{НОК}(3k^2 + 2k, 3k)$$

если  $(3k^2 + 2k) : k$ , то  $\checkmark$

$$k=1 \quad 15 = \text{НОК}(5; 3) \quad \checkmark$$

$$k=2 \quad 24 = \text{НОК}(8; 6) = 24 \quad \checkmark$$

$$k=3 \quad 33 = \text{НОК}(11; 3) =$$

$$k=1 \quad \frac{3k^2 + 2}{k} = 3 + \frac{2}{k} > \text{делитель}$$

$$\Rightarrow k=1$$

$$k=2$$

не подходит а и б  
нужно поменять

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.



- |                          |                          |                          |                          |                          |                          |                          |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| <input type="checkbox"/> |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|

СТРАНИЦА  
ИЗ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач **нумеруются отдельно**. Порча QR-кода недопустима!

$$ax^2 + bx + c = 2x^2$$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$(a-2)x^2 + bx + c = 0 \Rightarrow D = b^2 - 4ac = 0$$

$$b^2 - 4(a-2)c = 0$$

$$ax^2 + bx + (c+8) = 0$$

$$b^2 - 4(c+8) \cdot a = 0$$

$$x_1 + x_2 = \frac{-b}{2a} + \frac{\sqrt{D}}{2a} + \frac{-b}{2a} - \frac{\sqrt{D}}{2a} = \frac{-b}{a}$$

$$\alpha(mx+n)^2 =$$

$$m^2 \cdot x^2 + 2mn \cdot x + n^2$$

$$a = m^2 \quad b = 2mn \quad c = n^2$$

$$b = 2 \cdot \sqrt{ac}$$

$$48(a-2)c = a(c+8)$$

$$9c - 2c = 9c + 8a$$

$$c = -4a$$

$$b^2 - 4(4a - 4a + 8)a = 0$$

$$b^2 = 4 \cdot a \cdot 4(2-a)$$

$$\log_x 2 + 3 \log_y 8 + 4 \log_{xy} \frac{1}{16} = 0$$

$$b^2 = 16a(2-a)$$

$$\frac{x-1}{x+1} > \frac{3}{7} \cdot \frac{y-1}{y+1}$$

$$\log_x 2 + 9 \cdot \log_y 2 - 16 \cdot \log_{xy} 2 = 0$$

$$\cancel{b^2 = 16a(2-a)}$$

$$\frac{x+1}{x-1} < \frac{7}{3} \cdot \frac{y+1}{y-1}$$

$$\frac{1}{\log_2 x} + \frac{9}{\log_2 y} = \frac{16}{\log_2 xy}$$

$$\log_a b = k$$

$$1 + \frac{2}{x-1} < \frac{7}{3} \left( 1 + \frac{2}{y-1} \right)$$

$$\frac{\log_2 y + 9 \log_2 x}{\log_2 y \cdot \log_2 x} = \frac{16}{\log_2 xy}$$

$$b = a^k$$

$$\frac{2}{x-1} < \frac{4}{3} + \frac{14}{3} \cdot \frac{1}{y-1}$$

$$\frac{\log_2 y \cdot x^9}{\log_2 y} = \frac{16}{\log_2 xy} \cdot 16 \cdot \frac{\log_2 x}{\log_2 xy}$$

$$a \neq 1$$

$$\frac{1}{x-1} < \frac{2}{3} + \frac{7}{3} \cdot \frac{1}{y-1}$$

$$a > 0$$

$$b \neq 0$$

$$\log_2 y \cdot x^9 = 16 \cdot \log_{xy} x$$

$$\log_a^{\log_b a} a^{\log_a b} = b$$

$$\log_{xy} \cdot \log_{yx} k = 1$$

$$\log_4 16 = \frac{\log_2 16}{\log_2 4} = \frac{4}{2}$$

$$\log_a b = \frac{\log_c b}{\log_c a}$$

$$x^2 - 3xy + 4y^2 = 0$$

$$x^2 - 3xy + 4y^2 = 0$$

$$D = 9x^2 - 4 \cdot 4y^2 = -7x^2$$

$$\log_a b \cdot \log_c a - \log_c b$$

$$x^2 - 2ax + 4y^2 - 4yb + a^2 - b^2 = 0$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

- |                            |                            |                            |                            |                            |                            |                            |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|
| <input type="checkbox"/> 1 | <input type="checkbox"/> 2 | <input type="checkbox"/> 3 | <input type="checkbox"/> 4 | <input type="checkbox"/> 5 | <input type="checkbox"/> 6 | <input type="checkbox"/> 7 |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|

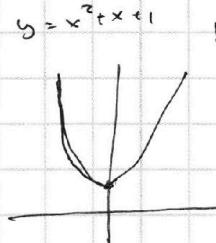
СТРАНИЦА  
ИЗ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по **каждой из задач** нумеруются **отдельно**. Порча QR-кода недопустима!

$$x=y=0$$

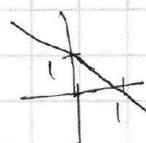
$$D = 4a^2 - 1 - a^2$$

$a = \pm 1 \Rightarrow$  есть решения  $x = y = 0$



$$D = 1 - 4 = -3$$

$$y \neq x$$



$$(2a+1)x - a^2 + 1 = 1 - x$$

$$2ax + x - a^2 + x = 0$$

$$x(2a+2) = a^2$$

$$y = \frac{a^2}{2(a+1)}$$

$$y = 1 - \frac{a^2}{2(a+1)} = \frac{2a+2-a^2}{2(a+1)}$$

$$(2a+1)x - a^2 + 1 = x^2 + x + 1$$

$$x^2 + x - (2a+1-1) + a^2 = 0$$

$$x^2 + x - 2a + a^2 = 0$$

$$(x-a)^2 = 0 \quad x=a \quad \Rightarrow y = a^2 + a + 1$$

→ ✓

