



МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

11 КЛАСС. Вариант 12



1. [3 балла] Дан приведённый квадратный трёхчлен $f(x)$ такой, что уравнение $f(x) = -2x^2$ имеет единственное решение, а также уравнение $f(x) = -6$ имеет единственное решение. Найдите сумму корней уравнения $f(x) = 0$.
2. [3 балла] Сколькими способами можно представить число $n = 5^{151} \cdot 7^{600}$ в виде произведения двух натуральных чисел x и y , где y делится на x ?
3. [5 баллов] Найдите количество пар целых чисел $(x; y)$, удовлетворяющих системе

$$\begin{cases} 3 \log_x 27 + \log_y 3 + 8 \log_{xy} \frac{1}{9} = 0, \\ \frac{3y+3}{y-1} < \frac{7x+7}{x-1}, \\ y \leq 24. \end{cases}$$

4. [5 баллов] Найдите все пары натуральных чисел $(a; b)$ такие, что

$$\begin{cases} 4 \cdot \min(a; b) = 5(a - b)^2, \\ 5 \cdot \max(a; b) = \text{НОК}(a; b). \end{cases}$$

5. [5 баллов] На сторонах BA и BC треугольника ABC с тупым углом B как на диаметрах построены окружности ω_1 и ω_2 соответственно, пересекающиеся в точках B и D . Хорда BE окружности ω_1 перпендикулярна BC , а хорда BF окружности ω_2 перпендикулярна CE и касается ω_1 . Найдите отношение $BF : BD$, если $\cos \angle BCE = \frac{3}{4}$.
6. [5 баллов] При каких значениях параметра a система

$$\begin{cases} (y + x^2 - 4x + 1)(x^2 - 2xy + 3y^2)(y - 2x + 1) = 0, \\ y = (-2a + 4)x + a^2 - 1 \end{cases}$$

имеет ровно 2 решения?

7. [6 баллов] В прямую четырёхугольную призму $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ вписана сфера ω . Луч с началом в точке A пересекает ω в точках P и Q , а луч с началом в точке C пересекает ω в точках M и N . Пусть O — точка пересечения диагоналей четырёхугольника $ABCD$. Найдите объём призмы $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ и расстояние ρ от центра ω до плоскости PAC , если известно, что $AO = 1$, $BO = 2$, $CO = 11$, $AP = \frac{2}{\sqrt{5}}$, $AQ = 2\sqrt{5}$, $CM = 4\sqrt{5}$, $CN = 5\sqrt{5}$.



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☒ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА

1 из 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$f(x) = x^2 + bx + c$$

1) $f(x) = -2x^2$ - единственное решение

2) $f(x) = -6$ - единственное решение

(1.) $x^2 + bx + c = -2x^2$

$$3x^2 + bx + c = 0$$

$$D = b^2 - 12c = 0$$

тогда решение было единственным

(2.) $x^2 + bx + c = -6$

$$x^2 + bx + (c+6) = 0$$

$$D = b^2 - 4(c+6) = b^2 - 4c - 24 = 0$$

$$\begin{cases} b^2 - 12c = 0 \\ b^2 - 4c - 24 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} b^2 - 12c = 0 \\ b^2 - 4c - 24 = 0 \end{cases}$$

$$-8c = -24 \Rightarrow b^2 - 36 = 0$$

$$c = 3$$

$$b = \pm 6$$

I) $b = 6$
 $f(x) = 0$

$$x^2 + 6x + 3 = 0$$

$$D = 36 - 12 = 24$$

$$x_{1,2} = \frac{-6 \pm \sqrt{24}}{2}$$

II) $b = -6$
 $f(x) = 0$

$$x^2 - 6x + 3 = 0$$

$$x_1 + x_2 = 6$$

$$x_1 + x_2 = -6$$

Ответ: единственные решения (1) и (2) существуют при $f(x) = x^2 + 6x + 3$ или $f(x) = x^2 - 6x + 3$, в первом случае сумма корней -6 , а во втором 6 .



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1
☐

2
☒

3
☐

4
☐

5
☐

6
☐

7
☐

СТРАНИЦА
1 из 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$n = 5^{151} \cdot 7^{600} = x \cdot y$$

$$x, y \in \mathbb{N}$$

$$y : x \Rightarrow y = kx$$

$$k \in \mathbb{N}$$

$$n = kx^2$$

При любом значении x^2 , т.е. $n : x^2$, существует такое k , что $n = kx^2$. Таким образом нам нужно найти количество способов выбрать x^2 , поскольку k по x^2 определяется однозначно. Чтобы посчитать кол-во способов выбрать x^2 , нужно посчитать кол-во способов выбрать четное число в степени 5 и в степени 7.

Способов выбрать четную степень 5: $\left\lfloor \frac{151}{2} \right\rfloor + 1 =$

$$= 76$$

[] - целая часть (добавляет 1 для степени = 0)

Способов для четной степени 7: $\frac{600}{2} + 1 = 301$

Суммарное кол-во способов: $N = 76 \cdot 301 = 2356$

Ответ: 2356 способов.



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

1 2 3 4 5 6 7
☐ ☐ ☒ ☐ ☐ ☐ ☐

СТРАНИЦА
 1 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Как-то пар $\{x, y\}$? $x, y \in \mathbb{Z}$

$$(1) 3 \log_x 27 + \log_y 3 + 8 \log_{xy} \frac{1}{9} = 0$$

$$(2) \frac{3y+3}{y-1} < \frac{7x+7}{x-1}$$

$$(3) y \leq 24$$

QD 31
 $x > 0 \quad x \neq 1$
 $y > 0 \quad y \neq 1$
 $xy \neq 1$

$$(1) 9 \log_x 3 + \log_y 3 - 16 \log_{xy} 3 = 0$$

$$\frac{9}{\log_3 x} + \frac{1}{\log_3 y} - \frac{16}{\log_3 xy} = 0$$

$$9 \log_3 y \log_3 xy + \log_3 x \log_3 xy - 16 \log_3 x \log_3 y = 0$$

$$\log_3 x = z$$

$$\log_3 y = w$$

$$9w(z+w) + z(z+w) - 16zw = 0$$

$$9wz + 9w^2 + z^2 + wz - 16zw = 0$$

$$9w^2 + z^2 - 6zw = 0$$

$$(3w - z)^2 = 0$$

$$3w = z$$

$$3 \log_3 y = \log_3 x$$

$$\log_3 y^3 = \log_3 x$$

$$y^3 = x$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☒ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА
2 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$(2) \frac{3(y+1)}{y-1} < \frac{7(x+1)}{x-1}$$

$$\frac{3y+1}{y-1} < \frac{7(y^3+1)}{y^3-1}$$

$$\frac{3(y+1)}{y-1} < \frac{7(y+1)(y^2-y+1)}{(y-1)(y^2+y+1)}$$

Можно сократить на $y+1$, т.к. оно положительно на ОДЗ. Можно сократить на $y-1$ ~~нельзя~~ без смены знака, т.к. оно отрицательно при $y \in (0; 1)$, а на этом интервале нет целых ~~нельзя~~ значений y , поэтому этот случай нас не интересует.

Рассмотрим случай $y \in [1; 24]$ (3) ⁴
ОДЗ

$$3y^2 + 3y + 3 < 7y^2 - 7y + 7$$

$$2y^2 - 5y + 2 > 0$$

$$D = 9$$

$$y_{1,2} = \frac{5 \pm 3}{2} = \begin{bmatrix} 2 \\ \frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

$$y \in (-\infty; \frac{1}{2}) \cup (2; +\infty)$$

Пересекаем с условием: $y \in [2; 24]$
 x однозначно определяется по y и если $y \in \mathbb{Z}$, то и x тоже. Значит нам подходят все значения $y \in \{3; 4; 5; \dots; 23; 24\}$.
Таких значений 22, соответственно и пар (x, y) будет 22.

Ответ: 22 пар.



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи** отдельно.

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☒	☐	☐	☐

СТРАНИЦА
1 из 4

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$(a; b) - ? \quad a, b \in \mathbb{N}$$

$$\begin{cases} 4 \min(a; b) = 5(a - b)^2 \\ 5 \cdot \max(a; b) = \text{НОК}(a; b) \end{cases}$$

Ввиду симметричности считаем относительно a и b без ограничения общности можем предположить, что $b \geq a$. Тогда:

$$\begin{cases} (1) 4a = 5(a^2 + b^2 - 2ab) \\ (2) 5b = \text{НОК}(a; b) \end{cases}$$

$$(2) 5b = \frac{ab}{\text{НОД}(a; b)}$$

Обозначим:

$$\text{НОД}(a; b) = z$$

$$z \in \mathbb{N}$$

$$a = 5z$$

$$b = xz, \text{ где } x \in \mathbb{N}, x \geq 5$$

Тогда:

$$(1) 4z = (5z - xz)^2$$

$$4 = z(5 - x)^2$$

$$\text{I)} 4 = 2 \cdot 2$$

$$\text{II)} 4 = 4 \cdot 1$$

$$\text{III)} 4 = 1 \cdot 4$$

$$\text{I)} z = 2 \quad x \notin \mathbb{N}$$

$$\times$$

$$\text{II)} z = 4 \quad x = 6$$

$$a = 20 \quad b = 24$$

$$\text{III)} z = 1 \quad x = 7$$

$$a = 5 \quad b = 7$$

Ответ: $(5; 7), (7; 5), (20; 24), (24; 20)$.



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

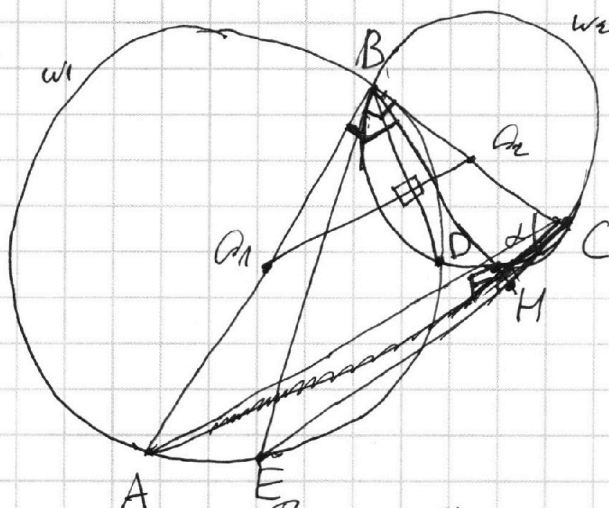


СТРАНИЦА

1 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Дано:



$$\frac{BF}{BD} = ?$$

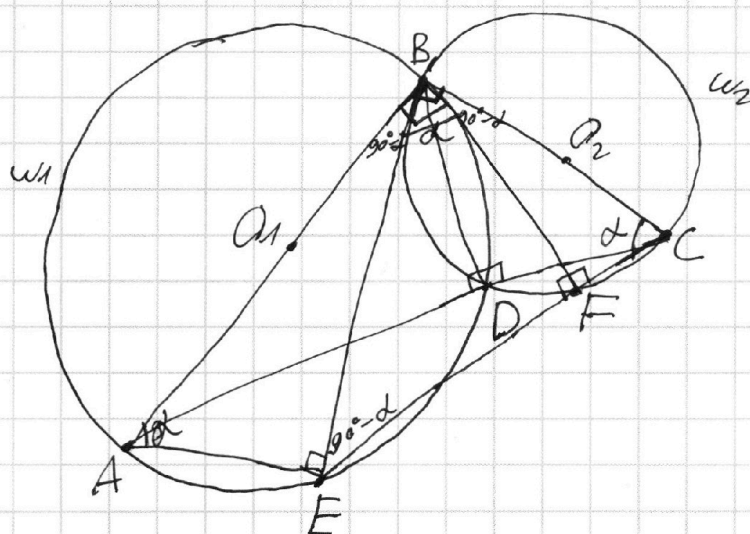
$$\cos \alpha = \frac{3}{4}$$

$$\alpha = \angle BCE$$

Решение:

- $\angle ADB = 90^\circ$ (т.к. опирается на диаметр w_1)
 $\angle BDC = 90^\circ$ (т.к. опирается на диаметр w_2)
 $\Rightarrow$ Делит на $AC \Rightarrow AC \parallel O_1O_2$
- $\angle BFC = 90^\circ$ (т.к. опирается на диаметр w_2)
 $\Rightarrow CF \parallel CH \Rightarrow F$ совпадает с $H \Rightarrow AB \parallel EC$

Тогда рисунок выйдет так:





На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

☐ ☐ ☐ ☐ ☒ ☐ ☐

СТРАНИЦА
2 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\bullet \angle CBF = 90^\circ - \alpha \Rightarrow \angle EBF = \alpha \Rightarrow \angle ABE = \angle BEF = 90^\circ - \alpha \Rightarrow \Rightarrow \angle BAE = \alpha$$

$$\bullet \triangle ABE \sim \triangle EBF \sim \triangle BCF \sim \triangle BCE \quad (\text{по } 2 \text{ уг.})$$

$$\triangle ABE \sim \triangle EBF \Rightarrow AB = \frac{BE}{\sin \alpha}, \quad BE = \frac{BF}{\cos \alpha} \Rightarrow AB = \frac{BF}{\sin \alpha \cos \alpha}$$

$$\bullet BC = \frac{BF}{\sin \alpha}$$

• Посчитаем площадь $\triangle BO_1O_2$ двумя способами:

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{AB}{2} \cdot \frac{BC}{2} \cdot \sin(180^\circ - \alpha) = \frac{1}{2} \left(\frac{AB}{2} + \frac{BC}{2} \right) \cdot \frac{BD}{2}$$

$$BD = \frac{AB \cdot BC \cdot \sin \alpha}{AB + BC} = \frac{\frac{BF}{\sin \alpha \cos \alpha} \cdot \frac{BF}{\sin \alpha} \cdot \sin \alpha}{\frac{BF}{\sin \alpha \cos \alpha} + \frac{BF}{\sin \alpha}} =$$

$$= \frac{BF}{\sin \alpha \cos \alpha} \cdot \frac{\sin \alpha \cos \alpha}{1 + \cos \alpha} = \frac{BF}{1 + \frac{3}{4}} = \frac{BF}{\frac{7}{4}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{BF}{BD} = \frac{7}{4}$$

$$\text{Ответ: } \frac{BF}{BD} = \frac{7}{4}.$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7
☐ ☐ ☐ ☐ ☐ ☒ ☐

СТРАНИЦА

из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

a - ? равно 2 решения

$$\begin{cases} (y+x^2-4x+1)(x^2-2xy+3y^2)(y-2x+1)=0 \\ y = (-2a+4)x + a^2 - 1 \end{cases}$$

y однозначно определяется по $x \Rightarrow$ ка-во реш. для x равно ка-ву реш. (x, y) .

I) $y + x^2 - 4x + 1 = 0$

$$y = 4x - x^2 - 1$$

$$(-2a+4)x + a^2 - 1 = 4x - x^2 - 1$$

$$-2ax + 4x + a^2 = 4x - x^2$$

$$x^2 - 2ax + a^2 = 0$$

$$(x-a)^2 = 0$$

$$x_1 = a \text{ при } a \in \mathbb{R}$$

II) $y - 2x + 1 = 0$

$$y = 2x - 1$$

$$2x - 1 = -2ax + 4x + a^2 - 1$$

$$x(2a-2) = a^2$$

1.) $a = 1$ - нет решений

2.) $x_2 = \frac{a^2}{2(a-1)}$ при $a \neq 1$

III) $x^2 - 2xy + 3y^2 = 0$

$$(x-y)^2 + 2y^2 = 0 \Rightarrow x=y \quad y^2=0 \Rightarrow x=y=0$$

Тогда: $a^2 - 1 = 0$

$$a = \pm 1$$

$$x_3 = 0 \text{ при } a = \pm 1$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.



СТРАНИЦА

2 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

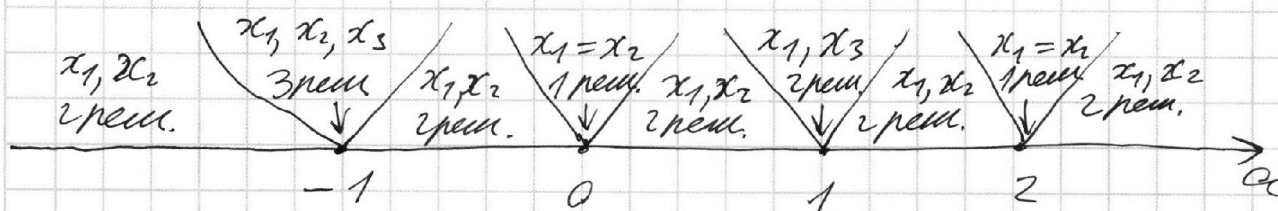
$$\begin{cases} x_1 = a & \text{при } a \in \mathbb{R} \\ x_2 = \frac{a^2}{2(a-1)} & \text{при } a \neq 1 \\ x_3 = 0 & \text{при } a = \pm 1 \end{cases}$$

1.) $x_1 = x_2$
при
 $a \in \{0; 2\}$

$$\begin{aligned} 2a(a-1) &= a^2 \\ 2a^2 - 2a &= a^2 \\ a^2 - 2a &= 0 \\ a &\in \{0; 2\} \end{aligned}$$

2) $x_1 = x_3$ при $a = 0$ (невозможно т.к. при $a = 0$ x_3 не существует)

3) $x_2 = x_3$ при $a = 0$ (невозможно т.к. при $a = 0$ x_3 не существует)



Ответ: $a \in (-\infty; +\infty) \setminus \{-1; 0; 2\}$.



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

1
☐2
☐3
☐4
☐5
☐6
☐7
☐СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

③

наб-ва $(x; y) - ? \quad x, y \in \mathbb{Z}$

$$\begin{cases} 3 \log_x 27 + \log_y 3 + 8 \log_{xy} \frac{1}{9} = 0 \\ \frac{3y+3}{y-1} < \frac{7x+7}{x-1} \\ y \leq 24 \end{cases}$$

ОДЗ:

$$x > 0 \quad x \neq 1$$

$$y > 0 \quad y \neq 1$$

$$x \cdot y \neq 1$$

$$9 \log_x 3 + \log_y 3 - 16 \log_{xy} 3 = 0$$

$$\frac{9}{\log_3 x} + \frac{1}{\log_3 y} - \frac{16}{\log_3 xy} = 0$$

$$9 \log_3 xy \log_3 xy + \log_3 x \log_3 xy - 16 \log_3 x \log_3 y = 0$$

$$\log_3 x = z$$

$$\log_3 y = w$$

$$9w(z+w) + z(z+w) - 16zw = 0$$

$$9wz + 9w^2 + z^2 + wz - 16zw = 0$$

$$9w^2 + z^2 - 6zw = 0$$

$$(3w - z)^2 = 0$$

$$3w = z$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

②

$$n = 5^{151} \cdot 7^{600} = x \cdot y$$

$$x, y \in \mathbb{N}$$

$$y : x \Rightarrow y = kx$$

$$n = kx^2$$

Нужно кол-во способов выбрать
чётное число ~~нечётное~~ степени 5 и степени 7

k однозначно определяется по x

$$5: \frac{150}{2} + 1 = 76$$

$$7: \frac{600}{2} + 1 = 301$$

~~8/10/2/4/6/8~~

$$\Sigma = 76 \cdot 301 = 2356 \text{ способов}$$

$$\begin{array}{r} 1 \\ \times 301 \\ 76 \\ \hline 176 \\ + 228 \\ \hline 2356 \end{array}$$

$$II) y \in [1; 24]$$

$$3y^2 + 3y + 3 < 7y^2 - 7y + 7$$

$$4y^2 - 10y + 4 > 0$$

$$2y^2 - 5y + 2 > 0$$

$$D = 9 \quad y_{1,2} = \frac{5 \pm 3}{4} = \left[\begin{array}{l} 2 \\ 1 \\ 2 \end{array} \right]$$

$$y \in (-\infty; \frac{1}{2}) \cup (2; +\infty)$$

$$y \in [2; 24]$$

целые решения ~~нечётные~~ $\{3, 4, \dots, 24\}$
22 решения в $\mathbb{Z}$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1
☐

2
☐

3
☐

4
☐

5
☐

6
☐

7
☐

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

① $f(x) = -2x^2$ - единственное решение

$f(x) = -6$ - единственное решение

$$f(x) = x^2 + bx + c = -2x^2$$
$$x^2 + bx + c = -2x^2$$

$$3x^2 + bx + c = 0$$

$$D = b^2 - 12c = 0$$

$$x = \frac{-b}{6}$$

$$x^2 + bx + c = -6$$

$$x^2 + bx + (c+6) = 0$$

$$D = b^2 - 4(c+6) = b^2 - 4c - 24 = 0$$

$$x = \frac{-b}{2}$$

$$\begin{cases} b^2 - 4c - 24 = 0 \\ b^2 - 12c = 0 \end{cases}$$

$$-8c + 24 = 0$$

$$b^2 - 12c - b^2 + 4c + 24 = 0$$

$$-8c = -24$$

$$c = 3$$

$$b^2 - 12c = 0$$

$$b^2 = 36$$

I) $b = 6$

$$b^2 - 36 = 0$$

$$b = \pm 6$$

$$x_1 + x_2 = \frac{6 + \sqrt{24}}{2} + \frac{6 - \sqrt{24}}{2} = 6$$

$$x_1 + x_2 = \frac{-6 + \sqrt{24}}{2} + \frac{-6 - \sqrt{24}}{2} = -6$$

$$x^2 \pm 6x + 3 = 0$$

$$D = 36 - 12 = 24$$

$$x_{1,2} = \frac{\pm 6 \pm \sqrt{24}}{2}$$

И делит на W_2



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

1
☐

2
☐

3
☐

4
☐

5
☐

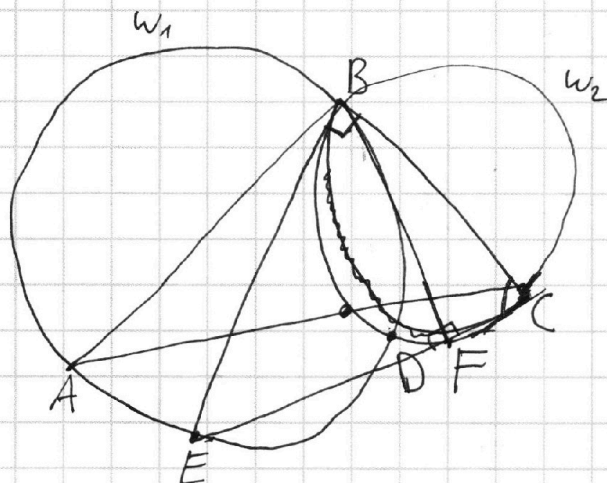
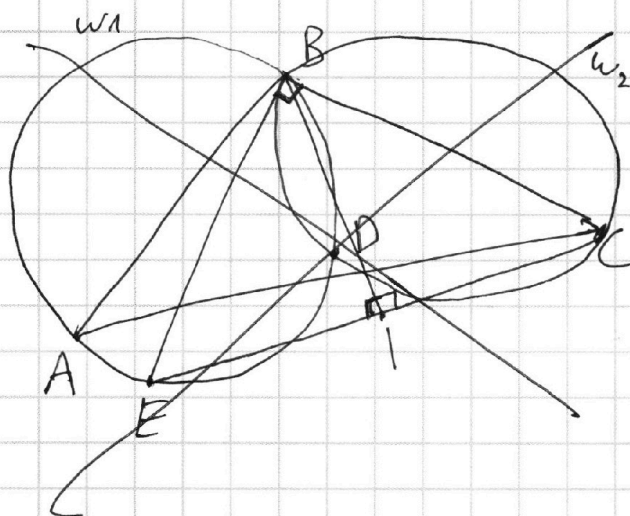
6
☐

7
☐

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

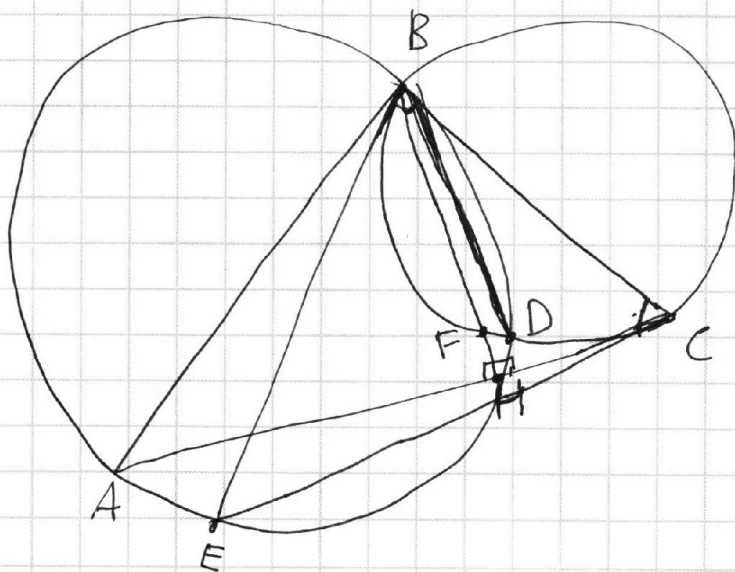
Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

5



$$\frac{BF}{BD} = ?$$

$$\cos \angle BCE = \frac{3}{4}$$





На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

1 2 3 4 5 6 7
☐ ☐ ☐ ☐ ☐ ☐ ☐

СТРАНИЦА
 _ ИЗ _

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$3 \log_3 y = \log_3 x$$

$$\log_3 y^3 = \log_3 x$$

$$y^3 = x$$

$$\Rightarrow \begin{cases} y^4 \neq 1 \\ y \neq \pm 1 \end{cases}$$

$$\frac{3(y+1)}{y-1} < \frac{7(x+1)}{x-1}$$

~~$$\frac{3(y+1)}{y-1} < \frac{7(y^3+1)}{y^3-1}$$~~

$$\Sigma = 32 \text{ балла}$$

$$32 - 11 = 21$$

~~$$\frac{3(y+1)}{y-1} < \frac{7(y+1)(y^2+y+1)}{(y-1)(y^2+y+1)}$$~~

~~$$y^3 + y^2 + y - y^2 - y - 1$$~~

~~$$y^3 - y^2 + y + y^2 - y + 1$$~~

~~$$\text{I) } y \in (0; 1) \quad \text{нет деловых решений}$$~~

~~$$D = 25 - 16 = 9$$~~

~~$$y_{1,2} = \frac{5 \pm 3}{4} = \begin{cases} 2 \\ \frac{1}{2} \end{cases}$$~~

~~$$y \in \left(\frac{1}{2}; 2\right) \setminus \{1\}$$~~

~~$$3y^2 + 3y + 3 > 7y^2 - 7y + 7$$~~

~~$$4y^2 - 10y + 4 < 0$$~~

~~$$2y^2 - 5y + 2 < 0$$~~

~~*З.А. Валов*~~



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА

из

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

4) $(a; b) \quad a, b \in \mathbb{N}$

$$\begin{cases} 4 \cdot \min(a; b) = 5(a-b)^2 \\ 5 \cdot \max(a; b) = \text{НОК}(a; b) \end{cases}$$

Ввиду симметричности без ограничения общности предположим, что $b \geq a$:

$$\begin{cases} 4a = 5(a^2 + b^2 - 2ab) \\ 5b = \text{НОК}(a; b) \end{cases}$$

$$a = p_1^{\alpha_1} \cdot p_2^{\alpha_2} \cdot \dots \cdot p_n^{\alpha_n}$$

$$b = 2^{p_1} \cdot q_2^{p_2} \cdot \dots \cdot q_n^{p_n}$$

$$5a = \frac{ab}{\text{НОД}(a; b)}$$

$$5 \text{НОД}(a; b) = a$$

$$4z = (5z - xz)^2$$

$$4 = z(25 + x^2 - 10xz)$$

$$4 \text{НОД}(a; b) = (a-b)^2$$

$$x > 5$$

$$20 = 5 \cdot 4$$

$$24 = 6 \cdot 4$$

$$D = 100 - 100 = 0$$

$$x = \frac{10}{5} = 2$$

$$a = 5z$$

$$b = xz$$

$$x = \frac{10}{2} = 5$$

$$z \geq 1$$

$$x \in \mathbb{N}$$

$$x \in \mathbb{N}$$

$$x \in \{1, 2, 3, 4\}$$

$$\text{I)} \quad 4 \cdot 20 = 5(24 - 20)^2$$

$$80 = 80$$

$$4 = z(5 - x)^2$$

$$x, z \in \mathbb{N}$$

$$\text{II)} \quad 5 \cdot 24 = 5 \cdot 6 \cdot 4$$

$$4 = 2 \cdot 2$$

$$\text{I)} \quad z = 2 \quad x = 7$$

$$\text{III)} \quad 4 \cdot 5 = 5 \cdot 2^2$$

$$4 = 4 \cdot 1$$

$$\text{X)} \quad \text{не подходит}$$

$$5 \cdot 7 = 35 \quad \checkmark$$

$$4 = 1 \cdot 4$$

$$\text{II)} \quad z = 4 \quad x = 6$$

Ответ $(20; 24), (24; 20), (5; 7), (7; 5)$

$$a = 20 \quad b = 24$$

$$\text{III)} \quad z = 1 \quad x = 7$$

$$a = 5 \quad b = 7$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

6. a - ? 2 решения

$$\begin{cases} (y+x^2-4x+1)(x^2-2xy+3y^2)(y-2x+1)=0 \\ y = (-2a+4)x + a^2 - 1 \end{cases}$$

I) $y+x^2-4x+1=0$

$$y = 4x - x^2 - 1$$

$$(-2a+4)x + a^2 - 1 = 4x - x^2 - 1$$

$$-2ax + 4x + a^2 = 4x - x^2$$

$$x^2 - 2ax + a^2 = 0$$

$$(x-a)^2 = 0$$

$$x = a \text{ при } a \in \mathbb{R}$$

Всегда есть это одно решение вне зависимости от a

II) $y - 2x + 1 = 0$

$$y = 2x - 1$$

$$2x - 1 = -2ax + 4x + a^2 - 1$$

$$x(2a - 2) = a^2$$

1.) $a = 1$ - нет решений ~~$a \neq 1$~~

2.) $x = \frac{a^2}{2(a-1)}$ при $a \neq 1$

3.) $x^2 - 2xy + 3y^2 = 0$

$$(x-y)^2 + 2y^2 = 0 \Rightarrow x = y \quad y^2 = 0$$

$$x = y = 0$$

$$a^2 - 1 = 0$$

$$a = \pm 1$$

$$x = 0 \text{ при } a = \pm 1$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\begin{cases} x_1 = a & \text{при } a \in \mathbb{R} \\ x_2 = \frac{a^2}{2(a-1)} & \text{при } a \neq 1 \\ x_3 = 0 & \text{при } a = \pm 1 \end{cases}$$

1.) $x_1 = x_2$ $2a(a-1) = a^2$

$$2a^2 - 2a = a^2$$

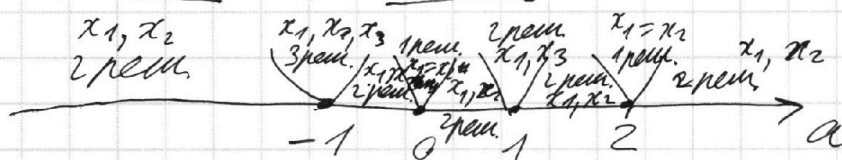
$$a^2 - 2a = 0$$

при

$$a \in \{0; 2\}$$

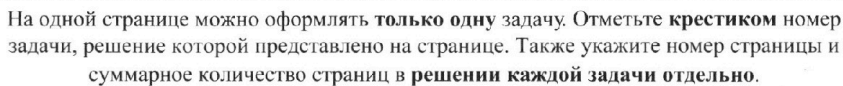
2.) $x_1 = x_3$ при $a = 0$ X

3.) $x_2 = x_3$ при $a = 0$ X



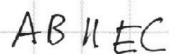
Ответ: $a \in (-\infty; -1) \cup (-1; 0) \cup (0; 2) \cup (2; +\infty)$

$$a \in (-\infty; +\infty) \setminus \{-1; 0; 2\}$$



СТРАНИЦА
ИЗ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. **Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!**



$$AC \parallel O_1 O_2$$

$$\frac{BC}{EC} = \frac{3}{4}$$

$$\frac{FC}{BC} = \frac{3}{4}$$

$$\frac{FB}{EB} = \frac{3}{4}$$

$$\triangle ABE \sim \triangle EBF \sim \triangle BCF \sim \triangle CEF$$

Решит на AC

Флукт на W_2

BD- ~~by~~ ~~can~~ ABC

$$\frac{AE}{AB} = \frac{3}{4}$$

$$\angle BAC = 180^\circ - \angle (90^\circ + 90^\circ) =$$

$$\angle 180^\circ - \alpha \cong \angle 180^\circ + \alpha$$

$$\cos \alpha = \frac{3}{4}$$

$$\sin \alpha = \sqrt{1 - \frac{9}{16}} = \frac{\sqrt{7}}{4}$$

~~$\frac{DC}{BC} = \frac{3}{4}$~~

$$\frac{BD}{BC} = ?$$

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{AB}{2} \cdot \frac{BC}{2} \cdot \sin(180^\circ - \alpha) =$$

$$= \frac{1}{2} \left(\frac{AB}{2} + \frac{BC}{2} \right) \cdot \frac{BD}{2}$$

$$BD = \frac{AB \cdot BC \sin \alpha}{AB + BC}$$

$$AB = \frac{BE}{\sin \alpha}$$

$$BE = \frac{FB}{\cos \alpha}$$

$$= \frac{BF}{\sin \alpha \cos \alpha} : \left(\frac{\cos \alpha + 1}{\sin \alpha \cos \alpha} \right) =$$

$$BC = \frac{BF}{\sin \alpha}$$

$$BD = \frac{BF}{\sin \alpha \cos \alpha} \cdot \frac{BF}{\sin \alpha} \cdot \sin \alpha$$

$$\frac{BF^2}{\sin \alpha} + \frac{BF^2}{\sin \alpha \cos \alpha}$$

$$AB = \frac{BF}{\sin \alpha \cos \alpha}$$

$$= \frac{BF}{\sin \alpha \cos \alpha} : \left(\frac{\cos \alpha + 1}{\sin \alpha \cos \alpha} \right) =$$

