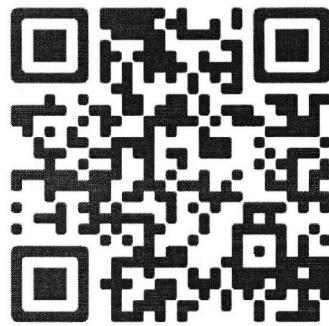


МОСКОВСКИЙ  
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ  
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"  
ПО МАТЕМАТИКЕ

11 КЛАСС. Вариант 12



- [3 балла] Дан приведённый квадратный трёхчлен  $f(x)$  такой, что уравнение  $f(x) = -2x^2$  имеет единственное решение, а также уравнение  $f(x) = -6$  имеет единственное решение. Найдите сумму корней уравнения  $f(x) = 0$ .
- [3 балла] Сколько способами можно представить число  $n = 5^{151} \cdot 7^{600}$  в виде произведения двух натуральных чисел  $x$  и  $y$ , где  $y$  делится на  $x$ ?
- [5 баллов] Найдите количество пар целых чисел  $(x; y)$ , удовлетворяющих системе

$$\begin{cases} 3 \log_x 27 + \log_y 3 + 8 \log_{xy} \frac{1}{9} = 0, \\ \frac{3y+3}{y-1} < \frac{7x+7}{x-1}, \\ y \leq 24. \end{cases}$$

- [5 баллов] Найдите все пары натуральных чисел  $(a; b)$  такие, что

$$\begin{cases} 4 \cdot \min(a; b) = 5(a - b)^2, \\ 5 \cdot \max(a; b) = \text{НОК}(a; b). \end{cases}$$

- [5 баллов] На сторонах  $BA$  и  $BC$  треугольника  $ABC$  с тупым углом  $B$  как на диаметрах построены окружности  $\omega_1$  и  $\omega_2$  соответственно, пересекающиеся в точках  $B$  и  $D$ . Хорда  $BE$  окружности  $\omega_1$  перпендикулярна  $BC$ , а хорда  $BF$  окружности  $\omega_2$  перпендикулярна  $CE$  и касается  $\omega_1$ . Найдите отношение  $BF : BD$ , если  $\cos \angle BCE = \frac{3}{4}$ .

- [5 баллов] При каких значениях параметра  $a$  система

$$\begin{cases} (y + x^2 - 4x + 1)(x^2 - 2xy + 3y^2)(y - 2x + 1) = 0, \\ y = (-2a + 4)x + a^2 - 1 \end{cases}$$

имеет ровно 2 решения?

- [6 баллов] В прямую четырёхугольную призму  $ABCDA_1B_1C_1D_1$  вписана сфера  $\omega$ . Луч с началом в точке  $A$  пересекает  $\omega$  точках  $P$  и  $Q$ , а луч с началом в точке  $C$  пересекает  $\omega$  в точках  $M$  и  $N$ . Пусть  $O$  — точка пересечения диагоналей четырёхугольника  $ABCD$ . Найдите объём призмы  $ABCDA_1B_1C_1D_1$  и расстояние  $\rho$  от центра  $\omega$  до плоскости  $PAC$ , если известно, что  $AO = 1$ ,  $BO = 2$ ,  $CO = 11$ ,  $AP = \frac{2}{\sqrt{5}}$ ,  $AQ = 2\sqrt{5}$ ,  $CM = 4\sqrt{5}$ ,  $CN = 5\sqrt{5}$ .

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.



- |                                     |                          |                          |                          |                          |                          |                          |
|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |
|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|

СТРАНИЦА  
1 из 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой задаче **нумеруются отдельно**. Порча QR-кода недопустима!

$$f(x) = x^2 + bx + c$$

(1)  $f(x) = -2x^2$  - единственное решение

(2)  $f(x) = -6$  - единственное решение

$$(1) \quad x^2 + bx + c = -2x^2$$

$$3x^2 + bx + c = 0$$

$$D = b^2 - 12c = 0 \leftarrow \begin{array}{l} \text{тогда решение} \\ \text{было единственным} \end{array}$$

$$(2) \quad x^2 + bx + c = -6$$

$$x^2 + bx + (c+6) = 0$$

$$D = b^2 - 4(c+6) = b^2 - 4c - 24 = 0$$

$$\begin{cases} b^2 - 12c = 0 \\ b^2 - 4c - 24 = 0 \end{cases}$$

$$-8c = -24 \Rightarrow b^2 - 36 = 0$$

$$(c=3)$$

$$(b = \pm 6)$$

$$I) \quad b=6$$

$$f(x) = 0$$

$$x^2 + 6x + 3 = 0$$

$$D = 36 - 12 = 24$$

$$x_{1,2} = \frac{-6 \pm \sqrt{24}}{2}$$

$$II) \quad b = -6$$

$$f(x) = 0$$

$$x^2 - 6x + 3 = 0$$

$$x_1 + x_2 = 6$$

$$x_1 + x_2 = -6$$

Ответ: единственное решения (1) и (2) существует при  $f(x) = x^2 + 6x + 3$  или  $f(x) = x^2 - 6x + 3$ , в первом случае сумма корней  $-6$ , а во втором  $6$ .



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

1

2

3

4

5

6

7

СТРАНИЦА  
1 из 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач **нумеруются отдельно**. Порча QR-кода недопустима!

$$n = 5^{151} \cdot 7^{600} = x \cdot y \quad x, y \in \mathbb{N}$$

$$y : x \Rightarrow y = kx \quad k \in \mathbb{N}$$

$$n = kx^2$$

При любом уравнении  $x^2$ , т. к.  $n : x^2$ , существует такое  $k$ , что  $n = kx^2$ . Таким образом нам нужно найти количество способов выражать  $x^2$ , поскольку  $k$  по  $x^2$  определяется однозначно. Чтобы посчитать как-то способы выражать  $x^2$ , нужно посчитать как-то способы выражать чётное число в степени 5 и в степени 7.

Способов выражать чётную степень 5:  $\left[\frac{151}{2}\right] + 1 =$

$$= 76 \quad [ ] - целая часть (задаём 1 для степени = 0)$$

$$\text{Способов для чётной степени 7: } \left[\frac{600}{2}\right] + 1 = 301$$

$$\text{Суммарное кол-во способов: } N = 76 \cdot 301 = 2356$$

Ответ: 2356 способов.



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

 1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА  
1 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по **каждой из задач** нумеруются **отдельно**. Порча QR-кода недопустима!

Число  $x \cdot y$  лежит между  $x$  и  $y$ ?  $x, y \in \mathbb{Z}$

$$(1) 3 \log_x 2^7 + \log_y 3 + 8 \log_{xy} \frac{1}{9} = 0$$

$$(2) \frac{3y+3}{y-1} < \frac{7x+7}{x-1}$$

$$(3) y \leq 24$$

*Обозначения:*

$x > 0$	$x \neq 1$
$y > 0$	$y \neq 1$
$xy \neq 1$	

$$(1) 9 \log_x 3 + \log_y 3 - 16 \log_{xy} 3 = 0$$

$$\frac{9}{\log_3 x} + \frac{1}{\log_3 y} - \frac{16}{\log_3 xy} = 0$$

$$9 \log_3 y \log_3 xy + \log_3 x \log_3 xy - 16 \log_3 x \log_3 y = 0$$

$$\log_3 x = z$$

$$\log_3 y = w$$

$$9w(z+w) + z(z+w) - 16zw = 0$$

$$9wz + 9w^2 + z^2 + wz - 16zw = 0$$

$$9w^2 + z^2 - 6zw = 0$$

$$(3w-z)^2 = 0$$

$$3w = z$$

$$3 \log_3 y = \log_3 x$$

$$\log_3 y^3 = \log_3 x$$

*уравнение*

$$y^3 = x$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

- |                          |                          |                                     |                          |                          |                          |                          |
|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1                        | 2                        | 3                                   | 4                        | 5                        | 6                        | 7                        |
| <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

СТРАНИЦА  
2 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по **каждой из задач** нумеруются **отдельно**. Порча QR-кода недопустима!

$$(2) \frac{3(y+1)}{y-1} < \frac{7(x+1)}{x-1}$$

$$\frac{3(y+1)}{y-1} < \frac{7(y^3+1)}{y^3-1}$$

$$\frac{3(y+1)}{y-1} < \frac{7(y+1)(y^2-y+1)}{(y-1)(y^2+y+1)}$$

Можно сократить на  $y+1$ , т.к. оно положительно на ОДЗ. Можно сократить на  $y-1$  ~~также~~ без смены знака, т.к. это отрицательно при  $y \in (0, 1)$ , а на этом интервале нет ~~других~~ значений  $y$ , поэтому эти значения нас не интересуют.

Рассмотрим случаи  $y \in [1; 24]$   $\begin{cases} (3) \\ \text{од} \end{cases}$

$$3y^2 + 3y + 3 < 7y^2 - 7y + 7$$

$$2y^2 - 10y + 2 > 0$$

$$D = 9$$

$$y_{1,2} = \frac{5 \pm 3}{2} = \left[ \begin{array}{l} 2 \\ 4 \end{array} \right]$$

$$y \in (-\infty; \frac{1}{2}) \cup (2; +\infty)$$

Пересекаем с условием:  $y \in [2, 24]$   
 $x$  однозначно определяется по  $y$  и если  $y \in \mathbb{Z}$ , то и  $x$  тоже. Значит нам подходят все значения  $y \in \{3; 4; 5 \dots, 23; 24\}$ .

Пары значений  $22$ , соответственно  
 $x$  пар  $(x, y)$  будем  $22$ .

Очевидно,  $22$  пары.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении **каждой** задачи отдельно.



- |                          |                          |                          |                                     |                          |                          |                          |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1                        | 2                        | 3                        | 4                                   | 5                        | 6                        | 7                        |
| <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

СТРАНИЦА  
1 из 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по **каждой** из задач **нумеруются отдельно**. Порча QR-кода недопустима!

$$(a; b) - ? \quad a, b \in \mathbb{N}$$

$$\begin{cases} 4 \min(a; b) = 5(a-b)^2 \\ 5 \cdot \max(a; b) = \text{HOD}(a; b) \end{cases}$$

Ввиду симметричности стоящих отноше-  
ний между  $a$  и  $b$  без ограничения общности  
можем предположить, что  $b \geq a$ . Тогда:

$$\begin{cases} (1) 4a = 5(a^2 + b^2 - 2ab) \\ (2) 5b = \text{HOD}(a; b) \end{cases}$$

$$(2) 5b = \frac{ab}{\text{HOD}(a; b)}$$

$$a = 5z$$

$$b = xz, \text{ где } x \in \mathbb{N}, x \geq 5$$

Тогда:

$$(1) 4z = (5z - xz)^2$$

$$4 = z(5-x)^2$$

$$\text{I}) 4 = 2 \cdot 2$$

$$\text{II}) 4 = 4 \cdot 1$$

$$\text{III}) 4 = 1 \cdot 4$$

Обозначим:

$\text{HOD}(a; b)$  за  $z$

$$\cancel{z} \in \mathbb{N}$$

$$\text{I}) z = 2 \quad x \notin \mathbb{N}$$

X

$$\text{II}) z = 4 \quad x = 6$$

$$a = 20 \quad \cancel{b} = 24$$

$$\text{III}) z = 1 \quad x = 7$$

$$a = 5 \quad b = 7$$

Ответ:  $(5; 7), (7; 5), (20; 24), (24; 20)$ .



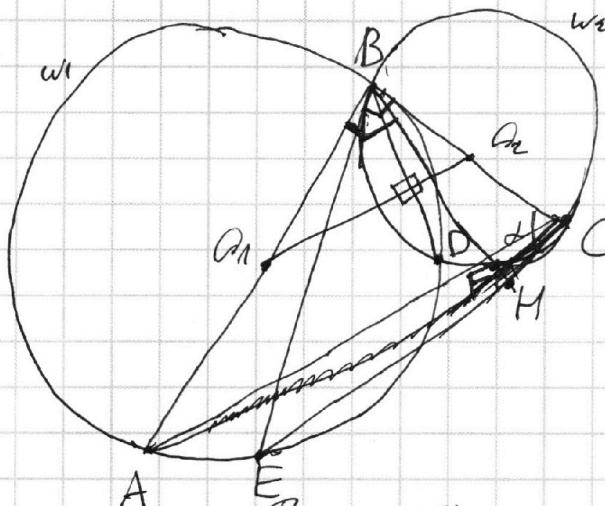
На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

 1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА  
1 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Dано:



$$\frac{BE}{BD} - ?$$

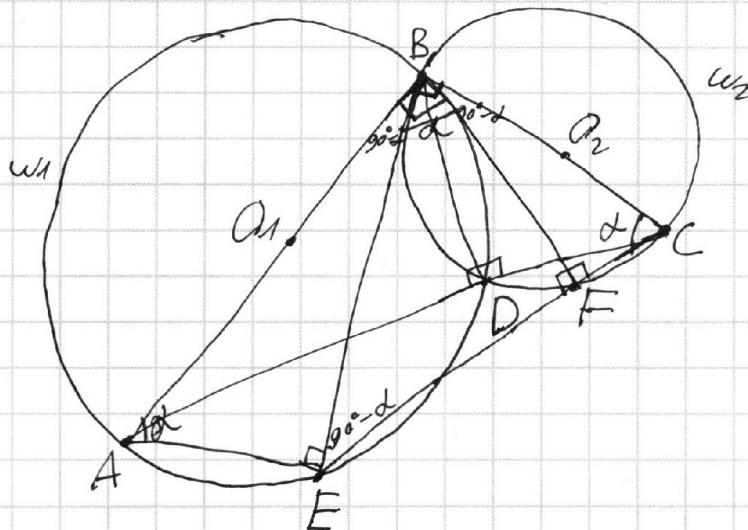
$$\cos \alpha = \frac{3}{4}$$

$$\alpha = \angle BCE$$

Решение:

- $\angle ADB = 90^\circ$  (п.к. отработалась на диаметре  $w_1$ )  
 $\angle BFC = 90^\circ$  (п.к. отработалась на диаметре  $w_2$ )  
 $\Rightarrow$  Диаметр на  $AC \Rightarrow AC \parallel O_1O_2$
- $\angle BFC = 90^\circ$  (п.к. отработалась на диаметре  $w_2$ )  
 $\Rightarrow CF \parallel CH \Rightarrow F$  совпадает с  $H \Rightarrow AB \parallel EC$

После рисунок выглядит так:





На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

- |                            |                            |                            |                            |                                       |                            |                            |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|---------------------------------------|----------------------------|----------------------------|
| <input type="checkbox"/> 1 | <input type="checkbox"/> 2 | <input type="checkbox"/> 3 | <input type="checkbox"/> 4 | <input checked="" type="checkbox"/> 5 | <input type="checkbox"/> 6 | <input type="checkbox"/> 7 |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|---------------------------------------|----------------------------|----------------------------|

СТРАНИЦА  
2 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач **нумеруются отдельно**. Порча QR-кода недопустима!

- $\angle CBF = 90^\circ - \alpha \Rightarrow \angle EBF = \alpha \Rightarrow \angle ABE = \angle BEF = 90^\circ - \alpha \Rightarrow \angle BAE = \alpha$

- ~~$\triangle ABE \sim \triangle EBF \sim \triangle BCF \sim \triangle BCE$  (по 2м)~~

~~$AB = \frac{BE}{\sin \alpha}$~~  ,  $BE = \frac{FB}{\cos \alpha} \Rightarrow AB = \frac{BF}{\sin \alpha \cos \alpha}$

- $BC = \frac{BF}{\sin \alpha}$

- Построим высоту  $\triangle BO_1O_2$  двумя способами:

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{AB}{2} \cdot \frac{BC}{2} \cdot \sin(180^\circ - \alpha) = \frac{1}{2} \left( \frac{AB}{2} + \frac{BC}{2} \right) \cdot \frac{BD}{2}$$

$$BD = \frac{AB \cdot BC \cdot \sin \alpha}{AB + BC} = \frac{\frac{BF}{\sin \alpha \cos \alpha} \cdot \frac{BF}{\sin \alpha} \sin \alpha}{\frac{BF}{\sin \alpha} + \frac{BF}{\sin \alpha \cos \alpha}} =$$

$$= \frac{\frac{BF}{\sin \alpha \cos \alpha}}{1 + \frac{1}{\cos \alpha}} \cdot \frac{\sin \alpha \cos \alpha}{\sin \alpha \cos \alpha} = \frac{BF}{1 + \frac{3}{4}} = \frac{BF}{\frac{7}{4}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{BF}{BD} = \frac{7}{4}$$

Очевидно:  $\frac{BF}{BD} = \frac{7}{4}$ .

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.



- |                          |                          |                          |                          |                          |                                     |                          |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|
| <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|

СТРАНИЦА  
1 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$x = ?$  равно 2 решения

$$\begin{cases} (y + x^2 - 4x + 1)(x^2 - 2xy + 3y^2)(y - 2x + 1) = 0 \\ y = (-2a+4)x + a^2 - 1 \end{cases}$$

$y$  однозначно определяется по  $x \Rightarrow$  кас-бо реш.  
для  $x$  равно 2 решения  $(x, y)$ .

I)  $y + x^2 - 4x + 1 = 0$

$$y = 4x - x^2 - 1$$

$$(-2a+4)x + a^2 - 1 = 4x - x^2 - 1$$

$$-2ax + 4x + a^2 - 1 = 4x - x^2 - 1$$

$$x^2 - 2ax + a^2 = 0$$

$$(x-a)^2 = 0$$

$x_1 = a$  при  $a \in \mathbb{R}$

II)  $y - 2x + 1 = 0$

$$y = 2x - 1$$

$$2x - 1 = -2ax + 4x + a^2 - 1$$

$$x(2a - 2) = a^2$$

1.)  $a = 1$  - кас-бо решений

2.)  $x_2 = \frac{a^2}{2(a-1)}$  при  $a \neq 1$

III)  $x^2 - 2xy + 3y^2 = 0$

$$(x-y)^2 + 2y^2 = 0 \Rightarrow x = y \quad y^2 = 0 \Rightarrow x = y = 0$$

Понад:  $a^2 - 1 = 0$

$$a = \pm 1$$

$x_3 = 0$  при  $a = \pm 1$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

- |                            |                            |                            |                            |                            |                                       |                            |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|---------------------------------------|----------------------------|
| <input type="checkbox"/> 1 | <input type="checkbox"/> 2 | <input type="checkbox"/> 3 | <input type="checkbox"/> 4 | <input type="checkbox"/> 5 | <input checked="" type="checkbox"/> 6 | <input type="checkbox"/> 7 |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|---------------------------------------|----------------------------|

СТРАНИЦА  
2 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\begin{cases} x_1 = a \text{ при } a \in \mathbb{R} \\ x_2 = \frac{a^2}{2(a-1)} \text{ при } a \neq 1 \\ x_3 = 0 \quad \text{при } a = \pm 1 \end{cases}$$

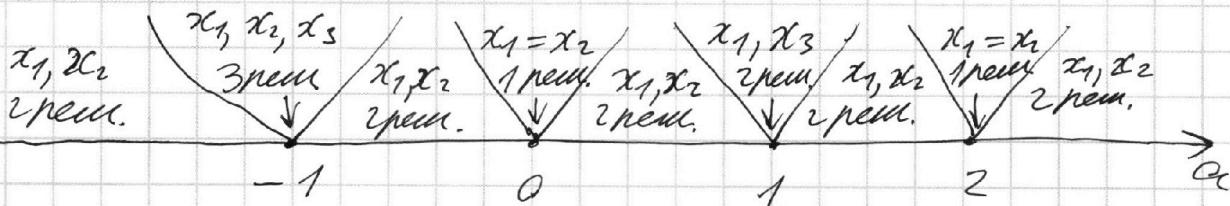
1.)  $\boxed{x_1 = x_2}$   
при  
 $a \in \{0; 2\}$

$$\begin{aligned} 2a(a-1) &= a^2 \\ 2a^2 - 2a &= a^2 \\ a^2 - 2a &= 0 \end{aligned}$$

$$a \in \{0; 2\}$$

2.)  $x_1 = x_3$  при  $a = 0$  (невозможно т.к. при  $a = 0$   $x_3$  не существует)

3.)  $x_2 = x_3$  при  $a = 0$  (невозможно т.к. при  $a = 0$   $x_3$  не существует)



Ответ:  $a \in (-\infty; +\infty) \setminus \{-1; 0; 2\}$ .



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

 1 2 3 4 5 6 7СТРАНИЦА  
— ИЗ —

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по **каждой из задач** **нумеруются отдельно**. Порча QR-кода недопустима!

(3)

$$\log -6(x; y) - ? \quad x, y \in \mathbb{Z}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} 3 \log_x 27 + \log_y 3 + 8 \log_{xy} \frac{1}{9} = 0 \\ \frac{3y+3}{y-1} < \frac{7x+7}{x-1} \\ y \leq 24 \end{array} \right.$$

*ОДЗ:*

$$\begin{aligned} x > 0 & \quad x \neq 1 \\ y > 0 & \quad y \neq 1 \\ xy \neq 1 & \end{aligned}$$

$$9 \log_x 3 + \log_y 3 - 16 \log_{xy} 3 = 0$$

$$\frac{9}{\log_3 x} + \frac{1}{\log_3 y} - \frac{16}{\log_3 xy} = 0$$

$$9 \log_3 y \log_3 xy + \log_3 x \log_3 xy - 16 \log_3 x \log_3 y = 0$$

$$\log_3 x = z$$

$$\log_3 y = w$$

$$9w(z+w) + z(z+w) - 16zw = 0$$

$$\underline{9wz + 9w^2 + z^2 + wz} - \underline{16zw} = 0$$

$$9w^2 + z^2 - 6zw = 0$$

$$(3w-z)^2 = 0 \quad \cancel{\text{3w-z=0}}$$

$$3w = z$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

- |                            |                            |                            |                            |                            |                            |                            |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|
| <input type="checkbox"/> 1 | <input type="checkbox"/> 2 | <input type="checkbox"/> 3 | <input type="checkbox"/> 4 | <input type="checkbox"/> 5 | <input type="checkbox"/> 6 | <input type="checkbox"/> 7 |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|

СТРАНИЦА  
ИЗ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по **каждой из задач** нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

(2)

$$n = 5^{15!} \cdot 7^{600} = x \cdot y \quad x, y \in \mathbb{N}$$

$$y : x \Rightarrow y = kx$$

$$n = kx^2$$

Нужно количество способов выразить  
целое число ~~каким~~<sup>6</sup> степенями 5 и степенями 7

к одному определяется по x

5!

$$\frac{150}{2} + 1 = \cancel{\frac{75}{2} + 1}$$

~~301~~

$$7! \cdot \frac{600}{2} + 1 =$$

~~8702888~~

$$\sum = 76 \cdot 301 = 2356 \text{ способов}$$

$$\begin{array}{r} 301 \\ \times 76 \\ \hline 228 \\ + 210 \\ \hline 2356 \end{array}$$

$$\text{II) } y \in (1; 24]$$

$$3y^2 + 3y + 3 < 7y^2 - 7y + 7$$

$$4y^2 - 10y + 4 > 0$$

$$2y^2 - 5y + 2 > 0$$

$$D = 9 \quad y_{1,2} = \frac{5 \pm 3}{9} = \begin{cases} 2 \\ \frac{1}{2} \end{cases}$$

$$y \in (-\infty; \frac{1}{2}) \cup (\cancel{2}; +\infty)$$

$$y \in (2; 24]$$

22 решения в  $\mathbb{Z}$  решения ~~все~~  $\{3, 4, \dots, 24\}$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.










СТРАНИЦА  
ИЗ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по **каждой из задач** нумеруются **отдельно**. Порча QR-кода недопустима!

①

$$f(x) = -2x^2 \quad -\text{единственное решение}$$

$$f(x) = -6 \quad -\text{единственное решение}$$

$$f(x) = \cancel{x^2} + 6x + c$$

$$x^2 + 6x + c = \cancel{-2x^2}$$

$$3x^2 + 6x + c = 0$$

$$D = b^2 - 12c = 0$$

$$x^2 + 6x + c = -6$$

$$x = \frac{-b}{6}$$

$$x^2 + 6x + (c+6) = 0$$

$$D = b^2 - 4(c+6) = b^2 - 4c - 24 = 0$$

$$x = \frac{-b}{2}$$

$$\begin{cases} b^2 - 4c - 24 = 0 \\ b^2 - 12c = 0 \end{cases}$$

~~$$-8c + 24 = 0$$~~

~~$$c = -3$$~~

~~$$b^2 - 12(-3) = 0$$~~

~~$$b^2 = -36$$~~

$$b^2 - 12c - b^2 + 4c + 24 = 0$$

$$-8c = -24$$

$$c = 3$$

$$I) b = 6$$

$$b^2 - 36 = 0$$

$$b = \pm 6$$

$$x_1 + x_2 = \frac{6 + \sqrt{24}}{2} + \frac{6 - \sqrt{24}}{2} = 6$$

$$x_1 + x_2 = \frac{-6 + \sqrt{24}}{2} + \frac{-6 - \sqrt{24}}{2} = -6$$

$$x^2 + 6x + 3 = 0$$

$$D = 36 - 12 = 24$$

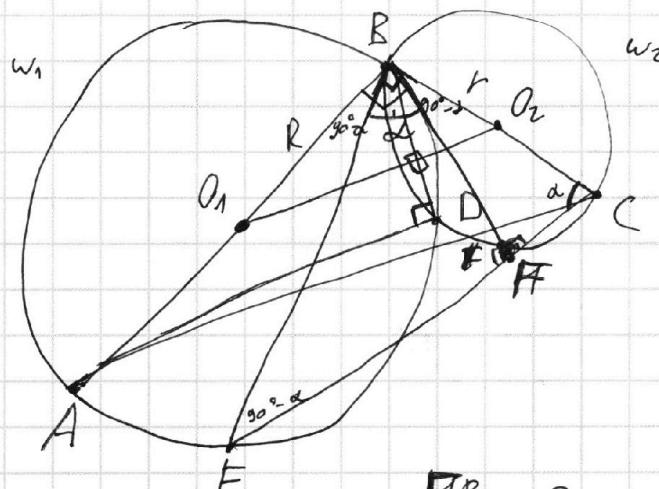
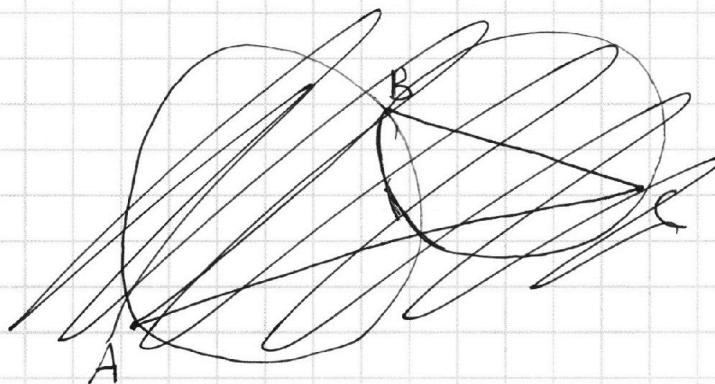
$$x_{1,2} = \frac{\pm 6 \pm \sqrt{24}}{2}$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

 1 2 3 4 5 6 7СТРАНИЦА  
ИЗ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. **Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно.** Порча QR-кода недопустима!



$$\frac{BF}{BD} - ?$$

$$\cos \angle BCE = \frac{3}{4}$$

~~$$\frac{BC}{EC} = \frac{3}{4}$$~~

$$\frac{FC}{BC} = \frac{3}{4}$$

$AB \parallel EC$   $AD \perp BC$

$$\triangle EBF \sim \triangle BCF \sim \triangle BCE$$

Делит на  $AC$

И делит на  $w_2$

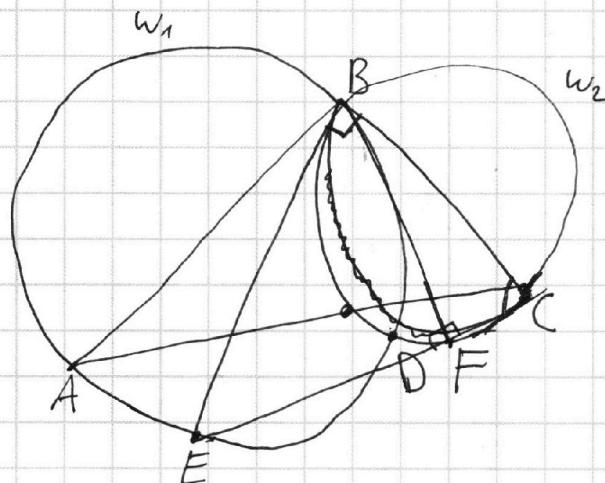
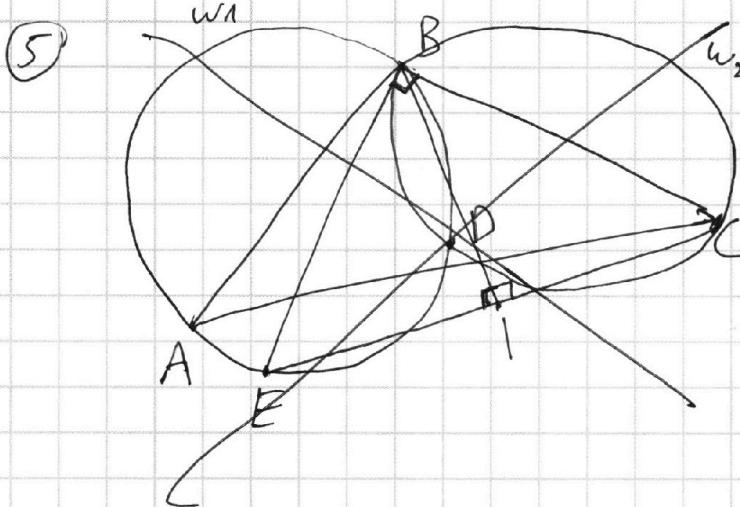


На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

- |   |   |   |   |   |   |   |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
|---|---|---|---|---|---|---|

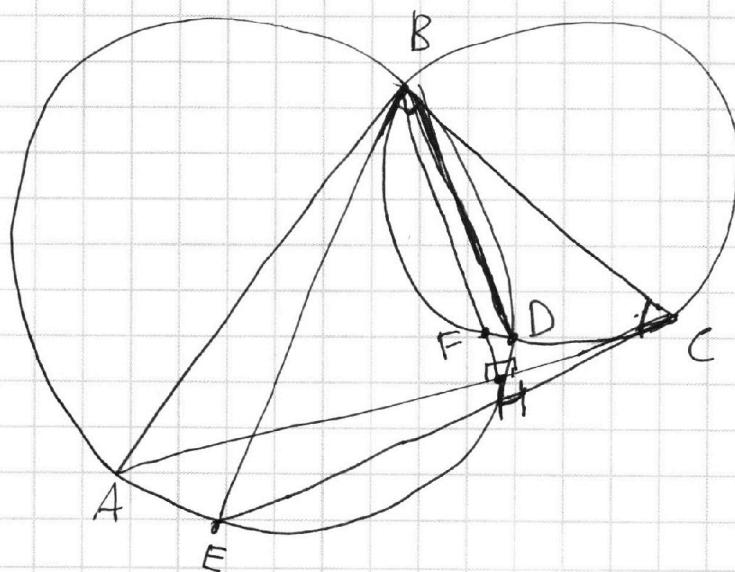
СТРАНИЦА  
\_ ИЗ \_

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. **Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно.** Порча QR-кода недопустима!



$$\frac{BF}{BD} - ?$$

$$\cos \angle BCE = \frac{3}{5}$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении **каждой задачи отдельно**.



- |                          |                          |                          |                          |                          |                          |                          |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| <input type="checkbox"/> |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|

СТРАНИЦА  
— ИЗ —

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются **отдельно**. Порча QR-кода недопустима!

$$3 \log_3 y = \log_3 x$$

$$\log_3 y^3 = \log_3 x$$

$$y^3 = x$$

$$\Rightarrow \begin{cases} y^4 \neq 1 \\ y \neq \pm 1 \end{cases}$$

$$\frac{3(y+1)}{y-1} < \frac{7(x+1)}{x-1}$$

~~Учебник~~

$$\frac{3(y+1)}{y-1} < \frac{7(y^3+1)}{y^3-1}$$

$$\sum = 32 \text{ единиц}$$

$$32 - 11 = 21$$

$$\frac{3(y+1)}{y-1} < \frac{7(y^3+1)}{(y^3-1)(y^2+y+1)}$$

$$y^3 + y^2 + y - y^2 - y - 1$$

$$y^3 - y^2 + y + y^2 - y - 1$$

$$\text{I) } y \in (0; 1) \quad \text{как действительные решения}$$

$$D = 25 - 16 = 9$$

$$y_{1,2} = \frac{5 \pm 3}{4} = \frac{1}{2}, 2$$

$$3y^2 + 3y + 3 > 7y^2 - 7y + 7$$

$$y^2 - 10y + 4 < 0$$

$$y \in (\frac{1}{2}; 2) \setminus \{1\} \quad 2y^2 - 5y + 2 < 0$$

~~Учебник~~

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.



- |                          |                          |                          |                          |                          |                          |                          |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| <input type="checkbox"/> |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|

СТРАНИЦА  
ИЗ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по **каждой из задач** нумеруются **отдельно**. Порча QR-кода недопустима!

$$\textcircled{4} \quad (a; b) \quad a, b \in \mathbb{N}$$

$$\begin{cases} 4 \cdot \min(a; b) = 5(a - b)^2 \\ 5 \cdot \max(a; b) = \text{HOD}(a; b) \end{cases}$$

Ввиду симметричности ~~и~~ без ограничения общности предположим, что ~~a > b~~  $b \geq a$ :

$$\begin{cases} 4a = 5(a^2 + b^2 - 2ab) \\ 5b = \text{HOD}(a; b) \end{cases}$$

$$a = p_1^{\alpha_1} \cdot p_2^{\alpha_2} \cdots p_n^{\alpha_n}$$

~~$b = q_1^{\beta_1} \cdot q_2^{\beta_2} \cdots q_n^{\beta_n}$~~ 

$$5b = \frac{ab}{\text{HOD}(a; b)}$$

~~$y_1 = |5z - xz|^2$~~ 

$$5 \text{HOD}(a; b) = a$$

$$y = z(25 + x^2 - 10x)$$
 ~~$y_2 = |4 \text{HOD}(a; b) - (a - b)|^2$~~ 

$$x > 5$$

$$20 = 5 \cdot 4$$

$$D = 100 - 100 = 0$$

$$a = 5z$$

$$24 = 6 \cdot 4$$

$$100 - 100 = 0$$

$$b = xz$$

~~$x = 5$~~

~~$x \in \mathbb{N}$~~

$$x = \frac{10}{2} = 5$$

$$z \geq 1$$

~~$6, 11, 17, 23$~~

$$\text{I}) \quad 4 \cdot 20 = 5(24 - 20)^2 \quad 4 = z(5 - x)^2 \quad x, z \in \mathbb{N}$$

$$\text{II}) \quad 4 \cdot 24 = 5 \cdot 6 \cdot 4 \quad 4 = z \cdot 2 \cdot 2$$

$$\text{I}) \quad z = 2 \quad x = 7$$

$$\text{III}) \quad 4 \cdot 5 = 5 \cdot 2^2 \quad 4 = 4 \cdot 1$$

~~$\text{I}) \quad z = 1 \quad x = 4$~~

$$5 \cdot 7 = 35 \checkmark$$

$$4 = 1 \cdot 4$$

$$\text{II}) \quad z = 4 \quad x = 6$$

Ответы:  $(20; 24), (24; 20), (5; 2), (7; 5)$

~~$\text{III}) \quad a = 20 \quad b = 24$~~

$$\text{III}) \quad z = 1 \quad x = 7$$

$$a = 5 \quad b = 7$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

- |                            |                            |                            |                            |                            |                            |                            |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|
| <input type="checkbox"/> 1 | <input type="checkbox"/> 2 | <input type="checkbox"/> 3 | <input type="checkbox"/> 4 | <input type="checkbox"/> 5 | <input type="checkbox"/> 6 | <input type="checkbox"/> 7 |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|

СТРАНИЦА  
ИЗ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач **нумеруются отдельно**. Порча QR-кода недопустима!

6.  $a - ?$  2 решения

$$\begin{cases} (y+x^2-4x+1)(x^2-2xy+3y^2)(y-2x+1)=0 \\ y = (-2a+4)x + a^2 - 1 \end{cases}$$

I)  $y+x^2-4x+1=0$

$$y = 4x - x^2 - 1$$

$$(-2a+4)x + a^2 - 1 = 4x - x^2 - 1$$

$$-2ax + y + a^2 - 1 = 4x - x^2 - 1$$

$$x^2 - 2ax + a^2 = 0$$

$$(x-a)^2 = 0$$

$$\boxed{x=a} \text{ при } a \in \mathbb{R}$$

Согласно этому решению все зависят от  $a$

II)  $8y - 2x + 1 = 0$

$$y = 2x - 1$$

$$2x - 1 = -2ax + 4x + a^2 - 1$$

$$x(2a - 2) = a^2$$

1.)  $a=1$  - нет решений ~~хорошо~~

2.) ~~хорошо~~  $\boxed{x = \frac{a^2}{2(a-1)}} \text{ при } a \neq 1$

3.)  $x^2 - 2xy + 3y^2 = 0$

$$(x-y)^2 + 2y^2 = 0 \Rightarrow x=y \quad y^2 = 0$$

$$x=y=0$$

$$a^2 - 1 = 0$$

$$a = \pm 1$$

$$\boxed{x=0 \text{ при } a = \pm 1}$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

- |                            |                            |                            |                            |                            |                            |                            |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|
| <input type="checkbox"/> 1 | <input type="checkbox"/> 2 | <input type="checkbox"/> 3 | <input type="checkbox"/> 4 | <input type="checkbox"/> 5 | <input type="checkbox"/> 6 | <input type="checkbox"/> 7 |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|

СТРАНИЦА  
ИЗ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по **каждой из задач** нумеруются **отдельно**. Порча QR-кода недопустима!

$$\begin{cases} x_1 = a \text{ при } a \in \mathbb{R} \\ x_2 = \frac{a^2}{2(a-1)} \text{ при } a \neq 1 \\ x_3 = 0 \text{ при } a = \pm 1 \end{cases}$$

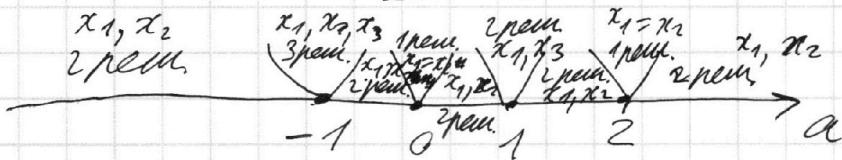
1)  $x_1 = x_2 \quad 2a(a-1) = a^2$

$$2a^2 - 2a = a^2$$

$$\text{при } a^2 - 2a = 0$$

2)  $x_1 = x_3 \quad \text{при } a = 0 \quad X$

3)  $x_2 = x_3 \quad \text{при } a = 0 \quad X$



Ответ:  $a \in (-\infty; -1) \cup (-1; 0) \cup (0; 2) \cup (2; +\infty)$ .

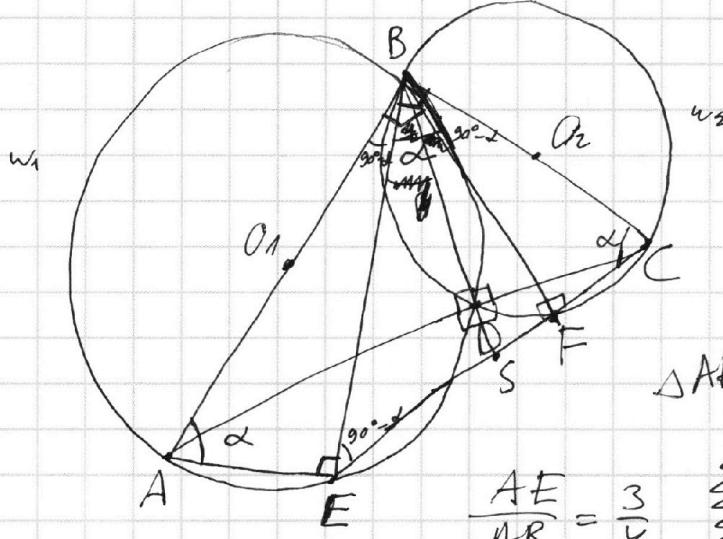
$a \in (-\infty; +\infty) \setminus \{-1; 0; 2\}$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

- |                          |                          |                          |                          |                          |                          |                          |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| <input type="checkbox"/> |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|

СТРАНИЦА  
ИЗ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач **нумеруются отдельно**. Порча QR-кода недопустима!



$$AB \parallel EC$$

$$AC \parallel O_1 O_2$$

$$\frac{BC}{EC} = \frac{3}{4}$$

$$\frac{FC}{BC} = \frac{3}{4}$$

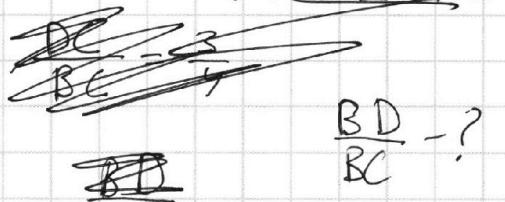
$$\frac{FB}{EB} = \frac{3}{4}$$

$\triangle ABE \sim \triangle EBFC \sim \triangle BCF \sim \triangle BCE$   
 ↓ делит на AC  
 ↓ делит на  $w_2$   
 BD - высота ABC

$$\cos \alpha = \frac{3}{4}$$

$$\sin \alpha = \sqrt{1 - \frac{9}{16}} = \frac{\sqrt{7}}{4}$$

$$\frac{BD}{BC} - ?$$



$$\frac{1}{4} \cdot \frac{AB}{\cancel{\alpha}} \cdot \frac{BC}{\cancel{\alpha}} \cdot \sin(180^\circ - \cancel{\alpha}) =$$

$$= \frac{1}{4} (AB + BC) \cdot \frac{BD}{\cancel{\alpha}}$$

$$BD = \frac{AB \cdot BC \sin \alpha}{AB + BC}$$

AB через BF - ?  
 и BC через BF - ?

$$AB = \frac{BE}{\sin \alpha}$$

$$BC = \frac{BF}{\sin \alpha}$$

$$AB = \frac{BF}{\sin \alpha \cos \alpha}$$

$$BE = \frac{FB}{\cos \alpha}$$

$$BD = \frac{\frac{BF}{\sin \alpha \cos \alpha} \cdot \frac{BF}{\sin \alpha}}{\frac{BF}{\sin \alpha} + \frac{BF}{\sin \alpha \cos \alpha}} =$$

$$= \frac{BF}{\sin \alpha \cos \alpha} : \left( \frac{\cos \alpha + 1}{\sin \alpha \cos \alpha} \right) =$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

 1 2 3 4 5 6 7СТРАНИЦА  
ИЗ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. **Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно.** Порча QR-кода недопустима!

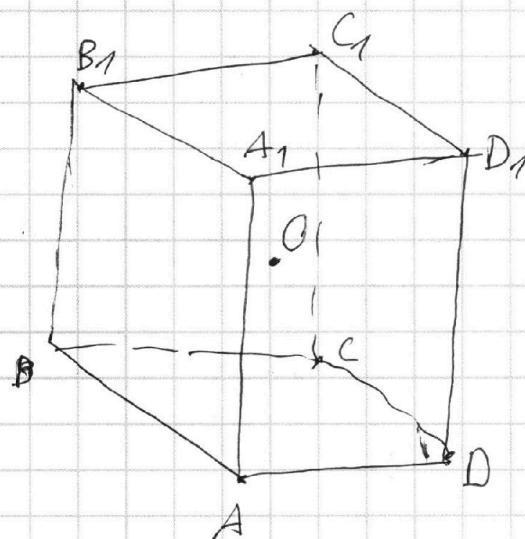
$$BD = \frac{BF}{\sin \alpha \cos \alpha} \cdot \frac{\sin \alpha \cos \alpha}{1 + \cos \alpha}$$

$$BD = \frac{BF}{1 + \frac{3}{4}}$$

$$BD = \frac{BF}{\frac{7}{4}}$$

$$\frac{BF}{BP} = \frac{7}{4}$$

(7)



N 2 3 4 5 6