



МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

11 КЛАСС. Вариант 11



1. [3 балла] Дан приведённый квадратный трёхчлен $f(x)$ такой, что уравнение $f(x) = 2x^2$ имеет единственное решение, а также уравнение $f(x) = -8$ имеет единственное решение. Найдите сумму корней уравнения $f(x) = 0$.
2. [3 балла] Сколькими способами можно представить число $n = 2^{401} \cdot 3^{500}$ в виде произведения двух натуральных чисел x и y , где y делится на x ?
3. [5 баллов] Найдите количество пар целых чисел $(x; y)$, удовлетворяющих системе

$$\begin{cases} \log_x 2 + 3 \log_y 8 + 4 \log_{xy} \frac{1}{16} = 0, \\ \frac{x-1}{x+1} > \frac{3y-3}{7y+7}, \\ x \leq 31. \end{cases}$$

4. [5 баллов] Найдите все пары натуральных чисел $(a; b)$ такие, что

$$\begin{cases} 4 \cdot \min(a; b) = 3(a - b)^2, \\ 3 \cdot \max(a; b) = \text{НОК}(a; b). \end{cases}$$

5. [5 баллов] На сторонах BA и BC треугольника ABC с тупым углом B как на диаметрах построены окружности ω_1 и ω_2 соответственно, пересекающиеся в точках B и D . Хорда BE окружности ω_1 перпендикулярна BC , а хорда BF окружности ω_2 перпендикулярна CE и касается ω_1 . Найдите отношение $BF : BD$, если $\cos \angle BCE = \frac{3}{5}$.
6. [5 баллов] При каких значениях параметра a система

$$\begin{cases} (y - x^2 - x - 1)(x^2 - 3xy + 4y^2)(y + x - 1) = 0, \\ y = (2a + 1)x - a^2 + 1 \end{cases}$$

имеет ровно 2 решения?

7. [6 баллов] В прямую четырёхугольную призму $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ вписана сфера ω . Луч с началом в точке A пересекает ω в точках P и Q , а луч с началом в точке C пересекает ω в точках M и N . Пусть O — точка пересечения диагоналей четырёхугольника $ABCD$. Найдите объём призмы $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ и расстояние ρ от центра ω до плоскости PAC , если известно, что $AO = 1$, $BO = 2$, $CO = 4$, $AP = \frac{\sqrt{5}}{3}$, $AQ = \frac{5\sqrt{5}}{3}$, $CM = \frac{10\sqrt{5}}{9}$, $CN = 2\sqrt{5}$.



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

1	2	3	4	5	6	7
☒	☐	☐	☐	☐	☐	☐

СТРАНИЦА
2 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. **Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно.** Порча QR-кода недопустима!

Проверим $b = 4$.

$$f(x) x^2 + 4x - 4.$$

$$x^2 + 4x - 4 = 2x^2 - 1 \text{ рш.}$$

$$x^2 - 4x + 4 = 0 \quad (x-2)^2 = 0 \quad - 1 \text{ рш. } \textcircled{V}$$

$$x^2 + 4x - 4 = -8.$$

$$x^2 + 4x + 4 = 0$$

$$(x+2)^2 = 0 \quad - 1 \text{ рш. } \textcircled{V}$$

Получим $f(x) = x^2 \pm 4x - 4$

$$b = 4;$$

$$f(x) x^2 + 4x - 4 = 0$$

$$D = 32 \quad x_{1,2} = \frac{-4 \pm \sqrt{32}}{2} \quad x_1 + x_2 = \boxed{-4}$$

$$b = -4;$$

$$f(x) = x^2 - 4x - 4 = 0$$

$$D = 32 \quad x_{1,2} = \frac{4 \pm \sqrt{32}}{2}$$

$$x_1 + x_2 = \boxed{4}$$

Ответ: ± 4



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

1 ☒ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА
1 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Задача 1 $f(x) = x^2 + bx + c$

1) $f(x) = 2x^2 - 1$ решение.

2) $f(x) = -8$ - 1 решение

Тогда:

1) $x^2 + bx + c = 2x^2$

$x^2 - bx - c = 0$ - имеет 1 решение, когда $D = 0$,
 $D = b^2 + 4c = 0$.

2) $x^2 + bx + c = -8$

$x^2 + bx + c + 8 = 0$

$D = b^2 - 4(c + 8) = 0$

Получаем:

$$\begin{cases} b^2 + 4c = 0 & b^2 = -4c \\ b^2 - 4(c + 8) = 0 & -4c - 4c - 32 = 0 \end{cases} \quad \begin{aligned} -8c &= 32 \\ \underline{c} &= -4 \end{aligned}$$

Из первого:

$b^2 - 16 = 0 \quad b = \pm 4$

Получаем: $f(x) = x^2 \pm 4x - 4$

Проверим при $b = -4$:

$x^2 - 4x - 4 = -8$

$x^2 - 4x + 4 = 0 \quad (x-2)^2 = 0 \quad \text{✓}$

$x^2 - 4x - 4 = 2x^2 - 1$ при.

$x^2 + 4x + 4 = 0$

$(x+2)^2 = 0 \quad \text{✓}$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1	2	3	4	5	6	7
☐	☒	☐	☐	☐	☐	☐

СТРАНИЦА

1 из 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Задача 2

$$n = 2^{101} \cdot 3^{500} = x \cdot y. \quad y \div x$$

$$\left\{ \begin{array}{l} x = 2^{\alpha_1} \cdot 3^{\beta_1} \\ y = 2^{\alpha_2} \cdot 3^{\beta_2} \end{array} \right. \quad \text{и}$$

Тогда.

$$\left\{ \begin{array}{l} \alpha_1 + \alpha_2 = 101 \\ \beta_1 + \beta_2 = 500 \end{array} \right. \quad \text{и} \quad \alpha_1 \leq \alpha_2 \quad \text{и} \quad \beta_1 \leq \beta_2$$

Будем выбирать α_1 , потому что при α_1 — однозначно определится α_2 , учитывая, что

$$\alpha_1 \leq \alpha_2 \quad \text{получаем, что } \alpha_1 \in [0; 200] - 201$$

С β_1 аналогично, по условию: способ
выбрать

$$\beta_1 \in [0; 250] - 251 \text{ способ выбрать.}$$

Из за того, что $\text{НОД}(2,3)=1$ от делений на 2 не зависит деление на 3. и наоборот

Поэтому Ответ: $251 \cdot 201 = 50451$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☒ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА
2 из 3

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Задача 3

$$(1) \quad \frac{x-1}{y+1} > \frac{3}{7} \cdot \frac{y-1}{y+1}$$

$$\text{из (3)} \quad y = x^3$$

$$\frac{x-1}{x+1} - \frac{3(y-1)}{4(y+1)} > 0.$$

$$\frac{2(x-1)(y+1) - 3(y-1)(x+1)}{4(x+1)(y+1)} > 0.$$

$\begin{matrix} \sqrt{} & \sqrt{} \\ 0 & 0 \end{matrix}$
по ОГР

$$2(xy - y + x - 1) - 3(xy - x + y - 1) > 0.$$

$$5xy - 10y + 10x - 6 > 0 \quad | :2$$

$$2xy - 5y + 5x - 2 > 0$$

$$y(2x-5) + \frac{5}{2}(2x-5) + \frac{25}{2} - 2 > 0$$

$$(2x-5) \left(y + \frac{5}{2} \right) > -\frac{21}{2}$$

$\begin{matrix} \sqrt{} \\ 0. \end{matrix}$

1) $x = 0$
 $x > 0$
по ОГР

2) $x = 1$
 $x \neq 1$ по
ОГР

3) $x = 2$

4) $x > 2$
 $\forall y \in \text{ОГР}$
верно

Рассм. 4 случая.

$$(2-3) \quad x \in (2; 31] \quad (3) \quad y = x^3$$

Для каждого x однозначно опре. y . По вариантам



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

1
☐

2
☐

3
☒

4
☐

5
☐

6
☐

7
☐

СТРАНИЦА
2 из 3

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Рассм. пункт 3) $x=2$.

$$(4-y)\left(y+\frac{5}{2}\right) > -\frac{21}{2}$$

$$y+\frac{5}{2} < \frac{21}{2}$$

$$y < 8$$

$$y \neq 1$$

$$y > 0$$

$$\left. \begin{array}{l} y < 8 \\ y \neq 1 \\ y > 0 \end{array} \right\} y \in [2; 8) - \text{6 знаков.}$$

П.о. где $x=2$ - 6 знаков y .

Ответ: $y=x^3$ - где (1) $y=8$ - не подходит.

П.о. Ответ: 29.



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

☐ ☐ ☒ ☐ ☐ ☐ ☐

СТРАНИЦА

1 ИЗ 3

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Задача 3

$$\begin{aligned} & \textcircled{1} \log_x 2 + 3 \log_y 8 + 4 \log_{xy} \left(\frac{1}{16} \right) = 0 \\ & \textcircled{1} \begin{cases} \frac{x-1}{x+1} > \frac{3y-3}{7y+7} \\ x \leq 31 \end{cases} \end{aligned}$$

ОГР:

$$\begin{aligned} x &> 0 \\ y &> 0 \\ x &\neq 1 \\ y &\neq 1 \end{aligned}$$

$$] \quad a = \log_x 2 \quad b = \log_{xy} 2$$

Тренируем (1), как.

$$\log_x 2 + 9 \log_y 2 + 16 \log_{xy} 2 = 0$$

$$\log_x 2 + \frac{9 \log_x 2}{\log_x y} - \frac{16 \log_x 2}{\log_x (xy)} = 0$$

$$\log_x (xy) = \log_x x + \log_x y = 1 + b$$

Если $b = 0$:

$$\log_{xy} 2 = 0$$

$$y = 1 \quad x - \text{любог.}$$

Ø по ОГР.

Если $\log_{xy} 2 = -1$

$$a = \frac{1}{x}$$

$$xy = \frac{1}{x} \cdot x = 1 \quad \text{Ø по ОГР.}$$

$$a + \frac{9a}{b} - \frac{16a}{b+1} = 0$$

$$a \left(1 + \frac{9}{b} - \frac{16}{b+1} \right) = 0$$

$$a \left(\frac{b^2 + b + 9b + 9 - 16b}{b(b+1)} \right) = 0$$

$$\Leftrightarrow a \left(\frac{b^2 - 6b + 9}{b(b+1)} \right) = 0$$

$$\begin{cases} a = 0 \\ b - 3 = 0 \\ b(b+1) \neq 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \log_x 2 = 0 \\ \log_{xy} 2 = 3 \\ b(b+1) \neq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \neq 1 \\ y = x^3 \end{cases}$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☒	☐	☐	☐

СТРАНИЦА

1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Задача 4:

$$4a = \frac{a^2 \cdot k^2}{3}$$

$$\frac{12}{a} = k^2 \quad k = \pm \sqrt{\frac{12}{a}}$$

$$a = 3 \quad \text{или} \quad a = 12.$$

$a = 3$: Подставим $b(1)$

$$12 = 3(3-b)^2 = 3(b-3)^2$$

$$4 = (b-3)^2 \quad b-3 = \pm 2. \quad b = 1 \\ b = 5.$$

И.к. $a < b$, то возможны пара $(3; 5)$

$a = 12$: Подставим $b(1)$

$$16 = (b-12)^2$$

$$b-12 = \pm 4 \quad b = 8 \\ b = 16$$

И.к. $a < b$, то возможны пара $(12; 16)$

Итого Ответ $(a; b)$: $(12; 16); (3; 5); (5; 3); (16; 12)$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

1
☐2
☐3
☐4
☒5
☐6
☐7
☐СТРАНИЦА
1 из 3

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Задача 4

 $a, b \in \mathbb{N}$

$$\begin{cases} 4 \cdot \min(a, b) = 3(a-b)^2 \\ 3 \cdot \max(a, b) = \text{НОК}(a, b) \end{cases}$$

1) $\boxed{a > b}$

$$(1) \quad 4 \cdot b = 3(a-b)^2$$

$$(2) \quad 3a = \text{НОК}(a, b) = \frac{ab}{\text{НОД}(a, b)}$$

$$(2) \quad 3 \cdot \text{НОД}(a, b) = b = 3 \cdot \text{НОД}(a-b, b) \Leftrightarrow \frac{b}{3} = \text{НОД}(a-b, b)$$

из (1) $\text{н.к. } \text{НОД}(4, 3) = 1$, то.

$$4b : (a-b)^2$$

$$\text{н.к. } \frac{b}{3} = \text{НОД}(a-b, b) \quad \text{можно}$$

понять, что $a-b = \frac{b}{3} \cdot k$, где $k \in \mathbb{Z}$ и $k \neq 3$
 $k > 0$.

Подставим: $b(1)$

$$4b = \frac{b^2}{3} \cdot k^2 \quad | \quad b \neq 0, b \in \mathbb{N}$$

$$\frac{12}{b} = k^2 \quad k = \pm \sqrt{\frac{12}{b}}, \text{ т.к. } k \in \mathbb{Z}$$

$$\text{, то } b = 3 \text{ или } b = 12$$

$$k = \pm 2 \\ k = 2$$

$$k = \pm 1 \\ k = 1$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☒ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА
2 из 3

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Задача 4

$$b=3, \text{ то}$$

$$4 \cdot 3 = 3(a-3)^2$$

$$\text{т.к. } a-3 = \pm 2 \quad a=1 \quad a=5.$$

т.к. $a > b$, но проверим пару $(5, 3)$
Вопрос

$$12 = 3 \cdot 2^2 \quad \text{В}$$

$$3 \cdot 5 = \text{НОК}(5, 3) - \text{В}$$

$$\text{Пусть } b=12; \quad 12 = 3(a-3)^2$$

$$16 = (a-12)^2$$

$$a-12 = \pm 4 \quad \begin{cases} a=8 \\ a=16 \end{cases}$$

т.к. $a > b$, то ответ $(16, 12)$

$$\text{Пусть } a < b; \quad 3(b-a)^2$$

Тогда:

$$4 \cdot a = 3(a-b)^2$$

$$3b = \text{НОК}(a, b) = \frac{ab}{\text{НОД}(a, b)}$$

$$\text{НОД}(a, b) = \frac{a}{3} = \text{НОД}(a, b-a)$$

$$\text{т.о. } b-a = \frac{a}{3} \cdot k, \text{ где } k \in \mathbb{Z} \text{ и } k \neq 3.$$

Подставим:

$$\begin{matrix} \forall / & \forall / & \forall / \\ \delta & \delta & \delta \end{matrix} \quad k \geq 0.$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

1 2 3 4 5 6 7
☐ ☐ ☐ ☐ ☐ ☒ ☐

СТРАНИЦА
1 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Задача 6

ровно 2 решения

(1) $(y - x^2 - x - 1)(x^2 - 3xy + 4y^2)(y + x - 1) = 0$.

(2) $y = (2a+1)x - a^2 + 1$

1) Нужно изобразить на xOy как:

$y = x^2 + x + 1$ - парабола ветви вверх.

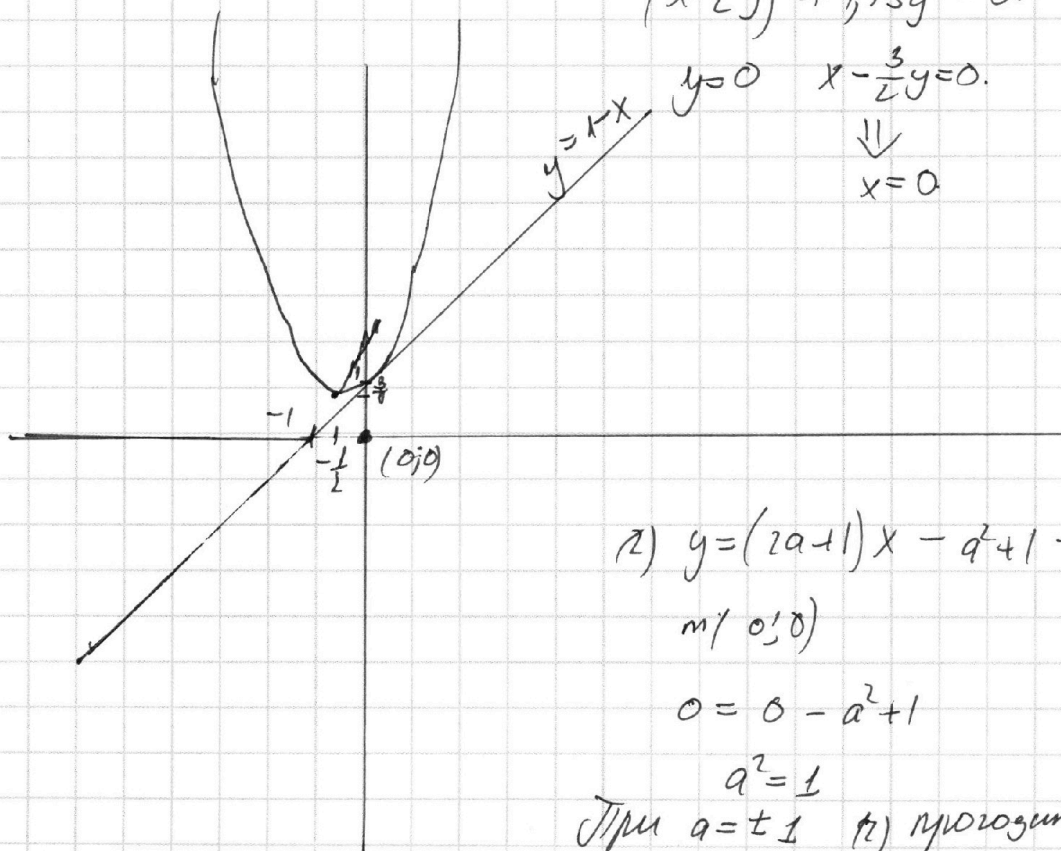
$y = 1 - x$ - прямая

$$x^2 - 3xy + 4y^2 = (x - \frac{3}{2}y)^2 - (\frac{3}{2}y)^2 + 4y^2 = 0$$

$$(x - \frac{3}{2}y)^2 + 1,75y^2 = 0.$$

$$y = 0 \quad x - \frac{3}{2}y = 0.$$

$$\Downarrow \\ x = 0$$



2) $y = (2a+1)x - a^2 + 1$ - прямая

м/ $(0; 0)$

$$0 = 0 - a^2 + 1$$

$$a^2 = 1$$

При $a = \pm 1$ п) пройдет через

$(0; 0)$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи** отдельно.

1
☐2
☐3
☐4
☐5
☐6
☒7
☐СТРАНИЦА
2 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Рассм, при каких a линейно будет

пересечение y $y = (2a+1)x - a^2 + 1$

и $y = x^2 + x + 1$

$$x^2 + x + 1 = (2a+1)x - a^2 + 1$$

$$x^2 - 2ax + a^2 = 0 \quad D=0 \Rightarrow \text{всегда будет ровно 1 пересечение}$$

$$(x-a)^2 = 0$$

С прямой $y = 1-x$ всегда будет пересечение,

кроме когда $2a+1 = -1 \quad a = -1$

т.е. при $a=1$ будет пересечение с $x^2+x+1=y$.

$$y = 1-x$$

При $a = -1$

и с прямой
(0;0)

$$y = -x$$

$$\begin{cases} y = 1-x & \text{нет пересечения.} \\ y = x^2 + x + 1 & x = -1 - \text{пересечение} \\ (0;0) & - \text{пересечение.} \end{cases}$$

$a = -1$ подходит:

Во всех остальных (2) будет имеет.

1 точка пересечения с $y = x^2 + x + 1$ и 1 точку,

пересечения с $y = 1-x$ при этом они не будут совпадать. Ответ: $a \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}$



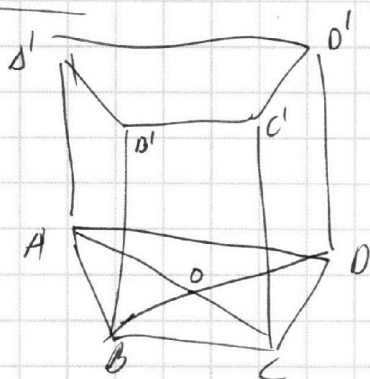
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☒

СТРАНИЦА
1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Задача 7



$$AO = 1 \quad CO = 4$$

$$BO = 2$$

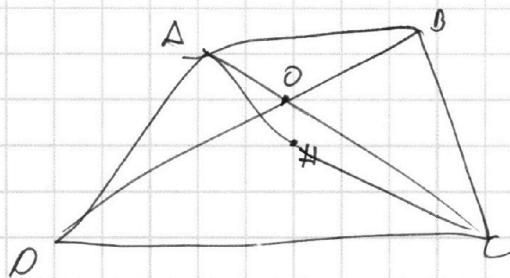
$$AP = \frac{5}{3}$$

$$AQ = \frac{5\sqrt{3}}{3}$$

$$CM = \frac{10\sqrt{3}}{9}$$

$$CN = 2\sqrt{3}$$

Пусть H — произвольная точка сферы на ABCD



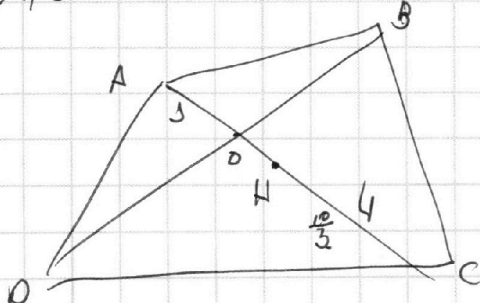
Положим

$$AH = \sqrt{AP \cdot AQ} = \frac{5}{3}$$

$$CH = \sqrt{CM \cdot CN} = \frac{10}{3}$$

П.и. $AO + CO = 5$ и $AH + HC = 5$.

П.и. H лежит на AC.



П.и. — вершина вписанной сферы касательна.

граней $BCB'C'$ и

$DCD'C'$, то центр лежит на

биссектрисе плоскости

$\Rightarrow AC$ — биссектриса обоих углов A и C.



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.



СТРАНИЦА

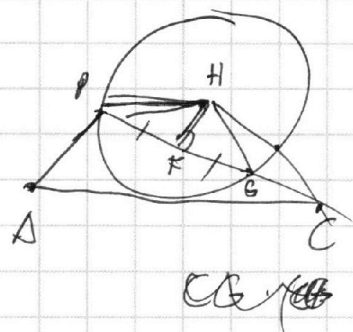
3 ИЗ 3

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Задача 7

$$h = 5, S_{ABCO} = 10$$

$$N_{ABCOA'D'C'D'} = S_{ABCO} \cdot h = \boxed{50}$$



Проекция на $ACD'C'$

$H\bar{F}$ - искомое расстояние

$$HP = \frac{5}{2}$$

X/X

$$X = CG$$

CG

Ответ: $\boxed{50}$

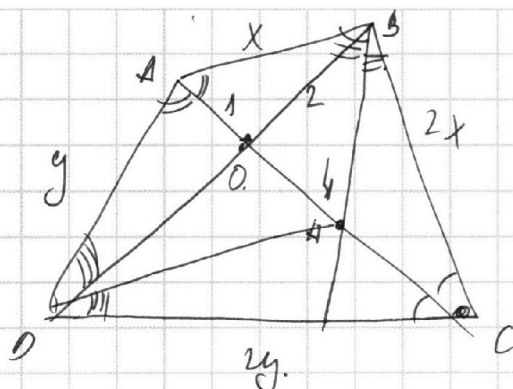


На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☒

СТРАНИЦА
2 из 3

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



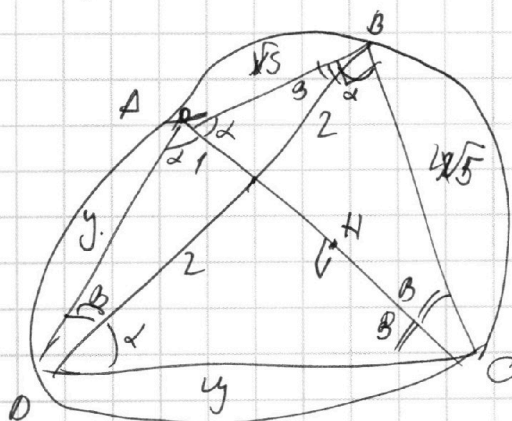
По св-ву биссектрисы.

$$\frac{AH}{HC} = \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{AB}{BC} = \frac{1}{2}$$

$$\frac{AH}{HC} = \frac{AD}{DC} = \frac{1}{2}$$

Положим основание, чтобы $\triangle$ легла в центре сферы.

Тогда получим описанный четырехугольник.



BD и AC - хорды

$$\Rightarrow DO \cdot DC = DO \cdot DB$$

$$OD = 2$$

$$\angle A + \angle B = 90^\circ, \text{ т.к. } \angle A \sim \angle B$$

$$\text{П.О. } 4x^2 + x^2 = 25 \quad x = \sqrt{5}$$

$\triangle ABC$ равен $\triangle BCD$ по стороне и двум углам, т.о.

$$S_{ABCO} = 2S_{ABC}$$

$$S_{ABC} = \frac{1}{2} \cdot 10$$

$$S_{ABCO} = 10, \text{ т.о. } R = \frac{5}{2}$$

т.к. сфера касается верхнего и нижнего оснований по высоте призма равна $2R = 5$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Handwritten solution for a geometry problem involving a cube and a tetrahedron. The solution includes several diagrams and calculations.

Diagrams:

- A cube with vertices labeled A, B, C, D, A', B', C', D'. A point O is marked at the center of the cube.
- A tetrahedron with vertices A, B, C, D. A point O is marked at the center of the tetrahedron.
- A triangle with vertices A, B, C. A point O is marked at the center of the triangle.
- A triangle with vertices A, B, C. A point O is marked at the center of the triangle.
- A triangle with vertices A, B, C. A point O is marked at the center of the triangle.

Calculations:

$$12 = 12x^2$$

$$12x^2 = 12x^2 +$$

$$\sin \alpha = \sqrt{1 - \left(\frac{5x^2 - 25}{4x^2} \right)^2}$$

$$\frac{5}{3} + \frac{10}{3} = \frac{15}{3} = 5$$

$$\cos \alpha = \frac{25 - 5x^2}{4x^2}$$

$$25 = 5x^2 - 4x^2 \cdot \cos \alpha$$

$$16 = 4 + 4x^2 - 8x \cdot \cos(\alpha - \beta)$$

$$\frac{4}{1} \left\{ 1 = 4 + x^2 - 2x \cdot \cos(\beta) \right.$$

$$\frac{x^2 + 3}{2x} \quad \cos \beta = \frac{x^2 + 3}{2x} \quad \sin \beta = \sqrt{1 - \left(\frac{x^2 + 3}{2x} \right)^2} = \frac{\sqrt{x^2 - (x^2 + 3)^2}}{2x}$$

$$\cos(\alpha - \beta) = \cos \alpha \cdot \cos \beta + \sin \alpha \cdot \sin \beta$$

$$\frac{\sqrt{x^2 - (x^2 + 3)^2}}{2x} = \frac{\sqrt{x^2 - (x^2 + 3)^2}}{2x}$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7
☐ ☐ ☐ ☐ ☐ ☐ ☐

СТРАНИЦА
 _ ИЗ _

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$(y - x^2 - x + 1)(x^2 - 3xy + 4y^2)(y + x + 1) = 0.$$

$$y = (2a+1)x - a^2 + 1$$

ровно 2 рещ.

(x, y)

$$2a+1 = 1$$

$$a = 0$$

$$y = x + 1$$

$$x^2 + x + 1 = x + 1$$

$$x = 0.$$

$$a = 1 - \text{по условию.}$$

$$y = 3x -$$

$$y = x^2 + x + 1 \quad \text{и} \quad y = (2a+1)x - a^2 + 1$$

есть 1 пересечени.

$$x^2 + x + 1 = (2a+1)x - a^2 + 1$$

-ххххх

$$x^2 + x(1 - 2a - 1) + a^2 - 1 = 0$$

$$x^2 - 2ax + a^2 - 1 = 0$$

$$(x - a)^2 = 0 \quad D = 0 = 4a^2 - 4(a^2 - 1) = 2 = 0 \quad a \neq$$

$$x = a.$$

$$y = 1/x + 1$$

$$y = x^2 + x + 1$$

$$1/x - 2 = x^2 + x + 1$$

$$x^2 - 10x + 15$$

$$(x - 5)^2 = 0 \quad x = 5$$

$$y = 1 - x$$

$$y = x^2 + x + 1$$

$$x_0 = -\frac{b}{2a} = -\frac{1}{2}$$

$$+\frac{1}{4} - \frac{1}{4} + 1$$

$$-\frac{1}{4} + 1 = \frac{3}{4}$$

Всегда
пересек.
прям.

$$\text{и параболу } x^2 - 3xy + 4y^2$$

$$D = 9y^2 - 16y^2 = -7y^2$$

Решение:

$$a = 1; a = 0.$$

$$1 \cdot 5 = 24$$

$$35 - 24 = 31$$

$$25 + 541 = 31$$

$$x^2 - 3xy + 4y^2 = 0$$

$$(x - 1.5y)^2 + 1.75y^2 = 0$$

$$y = \frac{2}{3}x$$

$$y = 0.$$

$$0 = \frac{2}{3}x$$

$$x = 0.$$

$$-9x - 24 =$$

$$1) a = 5: \quad x^2 + x + 1$$

$$2) a = -5: \quad x^2 + 10x + 15 = 0$$

$$1) y = 1/x + 1$$

$$y = x^2 + x + 1$$

$$x^2 + x + 1 = 1/x + 1$$

$$x^2 - 10x + 25 = 0$$

$$D = 100 - 4 \cdot 25 = 0$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7
☐ ☐ ☐ ☐ ☐ ☐ ☐

СТРАНИЦА
 __ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

3

$$x > 0 \quad y > 0$$

$$\log_x 2 + 3 \log_y 8 + 6 \log_{xy} 2^{-4} = 0$$

$$4xy + 10x + 10y - 4 > 0$$

$$x \leq 31$$

$$0 \leq y \leq 31^3$$

$$a = \log_x 2$$

$$x \neq 1$$

$$y \neq 1$$

$$y + \frac{5}{2}$$

$$b = \log_{xy} 2$$

$$\frac{10+5}{2}$$

$$a + \frac{9a}{b}$$

$$+ \frac{16}{b+1}$$

$$= 0$$

$$\log_x 2$$

$$\log_x x^3 = 3$$

$$\log_x (xy)$$

$$\log_x y + 1$$

$$b+1$$

$$a + \frac{9a}{b}$$

$$- \frac{16a}{b+1}$$

$$= 0$$

$$a \left(1 + \frac{9}{b} - \frac{16}{b+1} \right) = 0$$

$$\log_x 2 = 0$$

$$x \neq 2$$

$$(2x-5) \left(y + \frac{5}{2} \right) > \frac{-21}{2}$$

$$\frac{(b+1)b + 9(b+1) - 16b}{b(b+1)} = 0$$

$$b \neq 0 \quad b+1 \neq 0$$

$$x=0 \quad x=1 \quad x=2$$

$$b^2 + b + 9b + 9 - 16b = 0$$

$$x > 2 \quad y$$

$$b^2 - 6b + 9 = 0$$

$$(b-3)^2 = 0$$

$$b=3$$

$$\log_x y = 3$$

$$y = x^3$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

1 2 3 4 5 6 7

☐ ☐ ☐ ☐ ☐ ☐ ☐

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\textcircled{1} \begin{cases} 4 \cdot \min(a, b) = 3(a-b)^2 \\ 3 \cdot \max(a, b) = \text{НОК}(a, b) \end{cases}$$

$$a > 0 \quad b > 0$$

$$9 \in \mathbb{N}$$

$$\neg a > b:$$

$$\begin{cases} 4b = 3(a-b)^2 \\ 3a = \text{НОК}(a, b) = \frac{ab}{\text{НОД}(a, b)} \end{cases}$$

$$4b: (a+b)(a-b)$$

$$1b: (a+b) \cdot \frac{b}{3} \cdot k \rightarrow$$

$$\frac{a+b}{3} \cdot k = 1 \rightarrow \begin{cases} a+b=3 \\ k=1 \\ a+b=1 \\ k=3 \end{cases}$$

$$\begin{matrix} k=5 & a+b & k \leq 12 \\ k+3 & \frac{a+b}{3} & \\ k+6 & (a+b) & k \leq 12 \\ k \leq 6 & (a+b) & k \leq 12 \end{matrix}$$

$$3a \text{ НОК}(a, b) = ab$$

$$\text{НОД}(a, b) = \text{НОД}(a, b) = \frac{b}{3}$$

$$a-b = \frac{b}{3} \cdot k \quad b: 3$$

$$1) \begin{cases} a+b=3 \\ a-b=\frac{b}{3} \end{cases} \quad k=1$$

$$a = \frac{4}{3}b \quad k=3$$

$$4: \frac{a+b}{3} k$$

$$\frac{4}{3}b + b = 3$$

$$4b + 3b = 9$$

$$7b = 9$$

$$b = \frac{9}{7}$$

$$\frac{4}{3} \cdot \frac{9}{7} + \frac{9}{7}$$

$$\frac{12}{7} + \frac{9}{7}$$

$$\frac{21}{7} = 3$$

$$2) \begin{cases} a+b=1 \\ a-b=b \end{cases}$$

$$a = 2b$$

$$3b = 1 \quad b = \frac{1}{3} \quad \text{X}$$

$$a+b=6$$

$$a-b=\frac{b}{3}$$

$$a = \frac{4}{3}b$$

$$\frac{4}{3}b + b = 6$$

$$4b + 3b = 18$$

$$7b = 18$$

$$k=1$$

$$a+b=1$$

$$a+b=4$$

$$a = \frac{4}{3}b$$

$$\frac{4}{3}b + b = 4$$

$$4b + 3b = 12$$

$$7b = 12$$

$$3) \frac{a+b}{3} k = 2$$

$$k=3$$

$$a+b=6$$

$$a+b=4$$

$$a = \frac{4}{3}b$$

$$\frac{4}{3}b + b = 4$$

$$4b + 3b = 12$$

$$7b = 12$$

$$\begin{matrix} k=3 \\ a+b=6 \\ a+b=4 \\ k=1 \\ a+b=1 \\ k=6 \end{matrix}$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$n = 2^{601} \cdot 3^{500} = xy.$$

$$y : x$$

$$\frac{1}{2} = 2^{-1}$$

$$\log_x 2 + 3 \log_y 8 + 6 \log_{xy} \frac{1}{16} = 0$$

$$\begin{cases} \frac{x-1}{x+1} > \frac{3y-3}{7y+7} \\ x \leq 91 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y > 0 \\ x > 0 \\ 1 \end{cases}$$

$$x, y \in \mathbb{Z}$$

$$\log_y 8 = \frac{3 \log_x 2}{\log_x y}$$

$$\log_x 2 = \max \log_{32} 2 = \frac{1}{5} \log_2 2 = \max < \frac{1}{5}$$

$$\frac{(x-1)(7y+7) - (3y-3)(x+1)}{(x+1)(7y+7)} \cdot \frac{\log_x 2}{\log_{xy} xy} - 16 \frac{\log_x 2}{\log_y(xy)} = 0$$

$$a = \log_x 2 \quad \log_{xy} y = \frac{\log_y y}{\log_y x} \quad \log_y x + \log_y y = 1 + \log_y x$$

$$\begin{aligned} 2xy - 7y + 7x - 7 \\ - (3xy - 3x + 3y - 3) > 0 \end{aligned}$$

$$b = \log_y x = \log_{xy} y$$

$$9x + 10x - 10y - 49 + \frac{9a}{b} - 16 \frac{a}{b+1} = 0$$

$$\frac{ab+9a}{b} - \frac{16a}{b+1} = 0$$

$$\frac{\log_2 2}{\log_2 x} =$$

$$\frac{(ab+9a)(b+1) - 16ab}{b(b+1)} = 0$$

$$ab^2 + 9ab + ab + 9a = 16ab$$

$$ab^2 - 8ab + 9a = 0$$

$$a=0 \quad b^2 - 8b + 9 = 0 \quad D = 64 - 36 = 28.$$

$$b_{1,2} = \frac{8 \pm \sqrt{28}}{2}$$

$$\begin{aligned} x^0 &= 2 \\ 1 &= 2^0 x \\ \log_x 2 &= 0 \end{aligned}$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

① $f(x) = x^2 + bx + c$

$$x^2 + bx + c = 2x^2 - 1 \text{ урем.}$$

$$x^2 + bx + c = -8 - 1 \text{ урем.}$$

Находим $[-b]$

$$x^2 - bx - c = 0$$

$$D=0 \quad D = b^2 - 4c = 0$$

$$x^2 + bx + c + 8 = 0$$

$$D=0 \quad D = b^2 - 4(c+8) = 0$$

$$\begin{cases} b^2 + 4c = 0 & b^2 = -4c \\ b^2 - 4(c+8) = 0 & b^2 = 4(c+8) \end{cases}$$

$$b^2 = 4c$$

$$-4c - 4c - 32 = 0$$

$$-8c = 32 \quad c = -4$$

$$b^2 = -4 \cdot -4 = 16 \quad b = \pm 4$$

$$x^2 - 4x - 4 = 0$$

$$D = 16 + 16 = 32$$

$$x_2 = \frac{+4 \pm \sqrt{32}}{2}$$

$$x^2 + 4x - 4 = 0$$

$$D = 32$$

$$\frac{4 + \sqrt{32}}{2} + \frac{4 - \sqrt{32}}{2} = \boxed{4}$$

$$x_2 = \frac{-4 \pm \sqrt{32}}{2}$$

$$-\frac{4 + \sqrt{32}}{2} + -\frac{4 - \sqrt{32}}{2} = \boxed{-4}$$

$$b = 0$$

$$b = -1$$

$$\log_x y = 0$$

$$y = 1$$

x - любое

$$\log_x y = -1$$

$$y = \frac{1}{x}$$

x - любое.



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

1
☐

2
☐

3
☐

4
☐

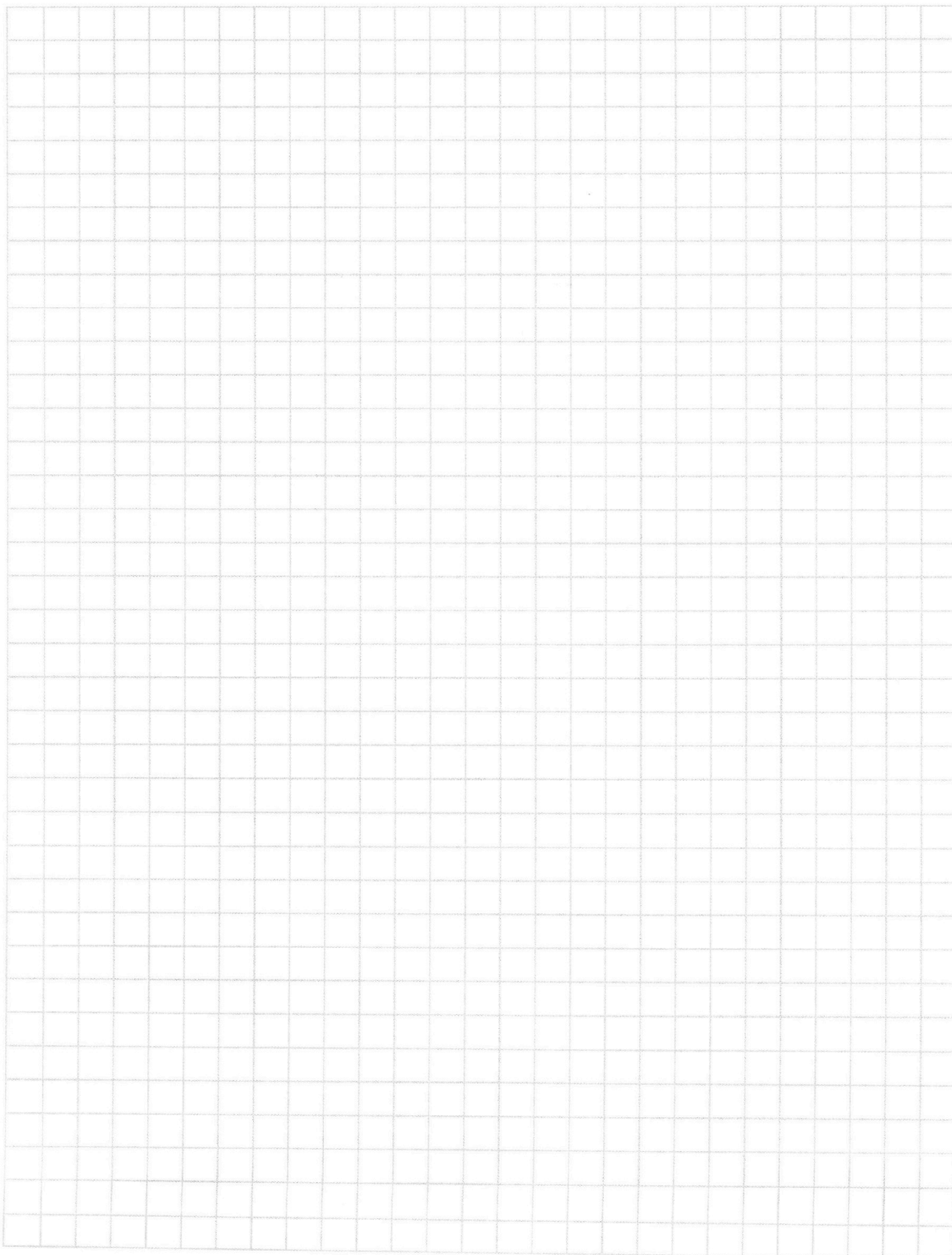
5
☐

6
☐

7
☐

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. **Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно.** Порча QR-кода недопустима!





На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. **Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно.** Порча QR-кода недопустима!

