



МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ



11 КЛАСС. Вариант 11

- [3 балла] Дан приведённый квадратный трёхчлен $f(x)$ такой, что уравнение $f(x) = 2x^2$ имеет единственное решение, а также уравнение $f(x) = -8$ имеет единственное решение. Найдите сумму корней уравнения $f(x) = 0$.
- [3 балла] Сколькими способами можно представить число $n = 2^{401} \cdot 3^{500}$ в виде произведения двух натуральных чисел x и y , где y делится на x ?
- [5 баллов] Найдите количество пар целых чисел $(x; y)$, удовлетворяющих системе

$$\begin{cases} \log_x 2 + 3 \log_y 8 + 4 \log_{xy} \frac{1}{16} = 0, \\ \frac{x-1}{x+1} > \frac{3y-3}{7y+7}, \\ x \leq 31. \end{cases}$$

- [5 баллов] Найдите все пары натуральных чисел $(a; b)$ такие, что

$$\begin{cases} 4 \cdot \min(a; b) = 3(a - b)^2, \\ 3 \cdot \max(a; b) = \text{НОК}(a; b). \end{cases}$$

- [5 баллов] На сторонах BA и BC треугольника ABC с тупым углом B как на диаметрах построены окружности ω_1 и ω_2 соответственно, пересекающиеся в точках B и D . Хорда BE окружности ω_1 перпендикулярна BC , а хорда BF окружности ω_2 перпендикулярна CE и касается ω_1 . Найдите отношение $BF : BD$, если $\cos \angle BCE = \frac{3}{5}$.

- [5 баллов] При каких значениях параметра a система

$$\begin{cases} (y - x^2 - x - 1)(x^2 - 3xy + 4y^2)(y + x - 1) = 0, \\ y = (2a + 1)x - a^2 + 1 \end{cases}$$

имеет ровно 2 решения?

- [6 баллов] В прямую четырёхугольную призму $ABCDA_1B_1C_1D_1$ вписана сфера ω . Луч с началом в точке A пересекает ω точках P и Q , а луч с началом в точке C пересекает ω в точках M и N . Пусть O — точка пересечения диагоналей четырёхугольника $ABCD$. Найдите объём призмы $ABCDA_1B_1C_1D_1$ и расстояние ρ от центра ω до плоскости PAC , если известно, что $AO = 1$, $BO = 2$, $CO = 4$, $AP = \frac{\sqrt{5}}{3}$, $AQ = \frac{5\sqrt{5}}{3}$, $CM = \frac{10\sqrt{5}}{9}$, $CN = 2\sqrt{5}$.



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

1

2

3

4

5

6

7

СТРАНИЦА
1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. **Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно.** Порча QR-кода недопустима!

~~1~~

~1.

Пусть трехчлен $f(x) = x^2 + ax + b$, тогда

$$f(x) = 2x^2 \Leftrightarrow x^2 + ax + b = 2x^2 \Leftrightarrow x^2 - ax - b = 0$$

имеет 1 решение если $D = a^2 + 4b = 0$

$$f(x) = -8 \Leftrightarrow x^2 + ax + b = -8 \Leftrightarrow x^2 + ax + b + 8 = 0$$

имеет 1 решение если $D = a^2 - 4(b + 8) = 0$

найдём a и b , решив систему:

$$\begin{cases} a^2 + 4b = 0 \\ a^2 - 4b - 32 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 8b + 32 = 0 \\ a^2 = -4b \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = -4 \\ a^2 = 16 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = -4 \\ a = 4 \end{cases}$$

Возможна 2 трехчлен: $f_1(x) = x^2 + 4x - 4$ и $f_2(x) = x^2 - 4x - 4$

Сумму корней уравнения $f(x) = 0$ найдем по теореме Виетта (корни всегда будут, т.к. и b $f_1(x)$ и b $f_2(x)$ свободный член $b = -4$ - отрицательное

число, т.е. дискriminant всегда положителен)

Для $f_1(x)$: $x_1 + x_2 = -a = -4$

Для $f_2(x)$: $x_1 + x_2 = -a = 4$

Ответ: 4 или -4.



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

- | | | | | | | |
|----------------------------|---------------------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|
| <input type="checkbox"/> 1 | <input checked="" type="checkbox"/> 2 | <input type="checkbox"/> 3 | <input type="checkbox"/> 4 | <input type="checkbox"/> 5 | <input type="checkbox"/> 6 | <input type="checkbox"/> 7 |
|----------------------------|---------------------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|

СТРАНИЦА
1 из 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по **каждой из задач** нумеруются **отдельно**. Порча QR-кода недопустима!

н. 2.

$$n = 2^{401} \cdot 3^{500} = x \cdot y \quad x \in \mathbb{N} \quad y \in \mathbb{N}$$

$$y : x \Rightarrow y = xk \quad k \in \mathbb{N}$$

$$2^{401} \cdot 3^{500} = x^2 \cdot k$$

М.к. 2 и 3 - различные простые числа, x можно

представить в виде $2^a \cdot 3^b$ $a \in \mathbb{N}, \{0\} \subset \mathbb{N}$, $b \in \mathbb{N}, \{0\}$

$$2^{401} \cdot 3^{500} = (2^a \cdot 3^b)^2 \cdot k = 2^{2a} \cdot 3^{2b} \cdot k$$

М.к. $k \in \mathbb{N}$, то $0 \leq a \leq 200$, $0 \leq b \leq 250$

Всего есть 201 способ выбрать число a и 251 способ

выбрать число b , и м.к. как a и b выбираются независимо

друг от друга, число x можно выбрать $201 \cdot 251$ способами,

а каждому выбранному числу X соответствует ровно

1 значение $y = \frac{2^{401} \cdot 3^{500}}{x}$, причем $y > x$ при всех выбранных a и b (м.к. n -не полный квадрат) и $y : x$

Выбрать 2 числа X и y можно $201 \cdot 251 = 50451$

способами.

Ответ: 50451

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении **каждой задачи отдельно**.



- | | | | | | | |
|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |
|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|

СТРАНИЦА
1 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач **нумеруются отдельно**. Порча QR-кода недопустима!

~3.

$$\left\{ \begin{array}{l} \log_x 2 + 3 \log_y 8 + 4 \log_{xy} \frac{1}{16} = 0 \\ \frac{x-1}{x+1} > \frac{3y-3}{3y+7} \end{array} \right.$$

$$x \leq 33$$

П.р. x, y и xy - основания логарифма:

$$x > 0, x \neq 1, y > 0, y \neq 1, xy > 0, xy \neq 1$$

Мы ищем целые x и y , поэтому достаточно условия

$$x > 1 \quad y > 1$$

$$\log_x 2 + 3 \log_y 8 + 4 \log_{xy} \frac{1}{16} = 0 \quad \cancel{\log_x 2 + \log_y 8}$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{\log_2 x} + \frac{3 \cdot 3}{\log_2 y} + \frac{4 \cdot (-4)}{\log_2 xy} = 0 \quad \Leftrightarrow$$

$$\cancel{\log_2 y \cdot \log_2 xy + 9 \log_2 x \cdot \log_2 xy - 16 \log_2 x \cdot \log_2 y = 0} \Leftrightarrow$$

$$\log_2 x \cdot \log_2 y \cdot \log_2 xy$$

$$\cancel{\log_2 (y \cdot xy) + 9 \log_2 (x \cdot xy) - 16 \log_2 (xy)}$$

$$\Leftrightarrow \log_2 y (\log_2 x + \log_2 y) + 9 \log_2 x (\log_2 x + \log_2 y) - 16 \log_2 x \cdot \log_2 y = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (\log_2 y)^2 + 9 (\log_2 x)^2 - 6 \log_2 x \cdot \log_2 y = 0$$

$$\textcircled{1} \quad \log_2 x = 0 \quad \Rightarrow \quad \log_2 y = 0$$

$$x = 1, y = 1 \quad \text{- не удовлетворяет условию } x > 1, y > 1$$

$$\textcircled{2} \quad \log_2 x \neq 0$$

$$\left(\frac{\log_2 y}{\log_2 x} \right)^2 - 6 \frac{\log_2 y}{\log_2 x} + 9 = 0$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

- | | | | | | | |
|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

СТРАНИЦА
2 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. **Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно.** Порча QR-кода недопустима!

$$\frac{D}{4} = 9 - 9 \Rightarrow 0$$

$$\frac{\log_2 x}{\log_2 y} = \frac{6}{2} = 3$$

$$\log_2 x = 3 \log_2 y \Leftrightarrow x = y^3$$

Системе удовлетворяет полные кубы x не большие 31, кубический корень из которых y удовлетворяет неравенству системы, причем $x > 1$

(1) $x = 1 \quad y = 1$

$$\frac{1-1}{1+1} > \frac{3 \cdot 1 - 3}{7 \cdot 1 + 7} \Leftrightarrow 0 > \frac{28}{42} \text{ верно, } x=1 \text{ не подходит}$$

(2) $x = 8 \quad y = 2$

$$\frac{8-1}{8+1} > \frac{3 \cdot 2 - 3}{7 \cdot 2 + 7} \Leftrightarrow \frac{7}{9} > \frac{3}{21} \Leftrightarrow 7 \cdot 21 > 27 \text{ - верно}$$

$(8, 2)$ - решение системы

(3) $x = 27 \quad y = 3$

$$\frac{27-1}{27+1} > \frac{3 \cdot 3 - 3}{7 \cdot 3 + 7} \Leftrightarrow \frac{26}{28} > \frac{6}{28} \text{ верно}$$

$(27, 3)$ - решение системы

Ответ: 2 решения.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.



- | | | | | | | |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|

СТРАНИЦА
1 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по **каждой из задач** нумеруются **отдельно**. Порча QR-кода недопустима!

✓ 4.

$$\left\{ \begin{array}{l} 4 \min(a; b) = 3(a-b)^2 \\ 3 \max(a; b) = \text{НОК}(a; b) \end{array} \right.$$

$$\text{НОК}(a; b) = \frac{a \cdot b}{\text{НОД}(a; b)} = \frac{\max(a; b) \cdot \min(a; b)}{\text{НОД}(a; b)}$$

$$3 = \frac{\min(a; b)}{\text{НОД}(a; b)} \Leftrightarrow \min(a; b) = 3 \text{НОД}(a; b)$$

$$\text{Тогда } 4 \cdot 3 \cdot \text{НОД}(a; b) = 3(a-b)^2 \Leftrightarrow 4 \text{НОД}(a; b) = (a-b)^2$$

$$(a-b)^2 : 4 \Leftrightarrow (a-b) : 2$$

a и b одной четности

$\text{НОД}(a; b)$ - полной квадрат

3) Рассмотрим $a \geq b$, тогда $\min(a; b) = b = 3 \text{НОД}(a; b)$; $\max(a; b) = a$

$$(a - 3 \text{НОД}(a; b))^2 = 4 \text{НОД}(a; b)$$

$$a^2 - 6a \text{НОД}(a; b) + 9 \text{НОД}(a; b)^2 - 4 \text{НОД}(a; b) = 0$$

$$a = 2\sqrt{\text{НОД}(a; b)} + 3 \text{НОД}(a; b)$$

$$a = -2\sqrt{\text{НОД}(a; b)} + 3 \text{НОД}(a; b) \quad \leftarrow b = 3 \cdot \text{НОД}(a; b) - \text{нечетн}$$

$$a = 2\sqrt{\text{НОД}(a; b)} + b$$

$$\text{НОК}(a; b) = \frac{a \cdot b}{\text{НОД}(a; b)} = \frac{2b\sqrt{\text{НОД}(a; b)} + b^2}{\text{НОД}(a; b)} = 6\sqrt{\text{НОД}(a; b)} + 3b$$

$$6\cancel{\text{НОД}(a; b)}\sqrt{\text{НОД}(a; b)} + 9\text{НОД}^2(a; b) = 6\text{НОД}(a; b)\cancel{\text{НОД}(a; b)} + 9$$

Решение системы имеет вид:



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

- | | | | | | | |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

СТРАНИЦА
2 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач **нумеруются отдельно**. Порча QR-кода недопустима!

Решение системы имеет вид:

$$(2x + 3x^2; 3x^2), \text{ где } x^2 = \text{НОД}(a, b), x \in \mathbb{N}$$

2) Син $a < b$, то

$$b = -2\sqrt{\text{НОД}(a, b)} + 3 \text{ НОД}(a, b)$$

Решение системы имеет вид

$$(\cancel{2x + 3x^2}, 3x^2), \text{ где } x^2 = \text{НОД}(a, b) \quad x \in \mathbb{N}$$

Ответ: $(2x + 3x^2, 3x^2) \quad x \in \mathbb{N}$

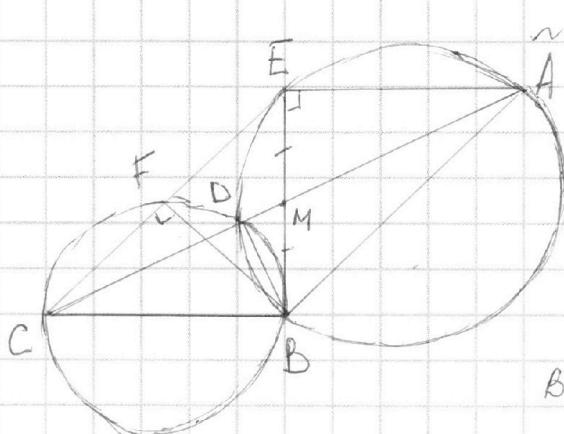
$$(3x^2, -2x + 3x^2) \quad x \in \mathbb{N}$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

- | | | | | | | |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|---------------------------------------|----------------------------|----------------------------|
| <input type="checkbox"/> 1 | <input type="checkbox"/> 2 | <input type="checkbox"/> 3 | <input type="checkbox"/> 4 | <input checked="" type="checkbox"/> 5 | <input type="checkbox"/> 6 | <input type="checkbox"/> 7 |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|---------------------------------------|----------------------------|----------------------------|

СТРАНИЦА
1 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач **нумеруются отдельно**. Порча QR-кода недопустима!



~ 5.

Дано: $\triangle ABC$, $\angle B = 90^\circ$, AB -диаметр

ω_1 , BC -диаметр ω_2 , $\omega_1 \cap \omega_2 = \{B, D\}$

BE -хорда ω_1 , $BE \perp BC$, BF -хорда ω_2 ,

$BF \perp CE$, BF касается ω_1 , $\cos \angle BCE = \frac{3}{5}$

Найти: $BF : BD$

Решение:

$\angle CFB = 90^\circ$ (ондевается на диаметр BC)

III.к. $BF \perp CE$ и $BF \perp CF \Rightarrow C, F \in E$ лежат на 1 прямой

$\angle BDC = 90^\circ$ (ондевается на диаметр BC) $\Rightarrow \angle DEAC$ (м.к. $\angle ADC = 180^\circ$)

$\angle BDA = 90^\circ$ (ондевается на диаметр AB)

Пускем $\angle BCE = \alpha$, тогда $\angle CEB = 90^\circ - \alpha$ (м.к. $BE \perp BC$)

$\angle EBF = 90^\circ - \angle FEB = 90^\circ - 90^\circ + \alpha = \alpha$ (м.к. $BF \perp EC$)

$\angle EBA = 90^\circ - \angle FBE = 90^\circ - \alpha$ (м.к. BF -касательная, а AB -диаметр)

$\angle CEB = \angle ABE \Rightarrow CE \parallel AB$

$\angle CBE = \angle AEB = 90^\circ$ ($\angle BEA$ ондевается на диаметр) $\Rightarrow BC \parallel EA$

$CEAB$ - параллелограмм

Пускем $AC \cap EB = M$, тогда M -середина EB

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

- | | | | | | | |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

СТРАНИЦА
2 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по **каждой из задач** **нумеруются отдельно**. Порча QR-кода недопустима!

$$\cos BCE = \frac{BC}{CE} = \frac{3}{5} \quad (\text{по } \triangle BCE)$$

Пусть $BC = 3x$, тогда $CE = 5x$

$$BE = \sqrt{(5x)^2 - (3x)^2} = 4x \quad (\text{по т. Пифагора})$$

$$BM = \frac{BE}{2} = 2x$$

BF - высота прямогульного $\triangle BCE$, проведенная к гипотенузе

$$BF = \frac{BC \cdot BE}{CE} = \frac{3x \cdot 4x}{5x} = \frac{12}{5}x$$

BD - высота прямогульного $\triangle BCM$, проведенная к гипотенузе

$$BD = \frac{BC \cdot BM}{CM} = \frac{3x \cdot 2x}{\sqrt{3^2 + 2^2}x} = \frac{6}{\sqrt{13}}x$$

$$\frac{BF}{BD} = \frac{\frac{12}{5}x}{\frac{6}{\sqrt{13}}x} = \frac{2\sqrt{13}}{5}$$

Ответ: $\frac{2\sqrt{13}}{5}$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.



- | | | | | | | |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|
| <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|

СТРАНИЦА
2 ИЗ 3

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по **каждой из задач** нумеруются **отдельно**. Порча QR-кода недопустима!

$$\begin{cases} (2a+1)x - a^2 + 1 = x^2 + x + 1 \\ \begin{cases} x=0 \\ 2a-a^2+1=0 \end{cases} \end{cases}$$

$$(2a+1)x - a^2 + 1 = -x + 1$$

$$\textcircled{1} \quad 2a+1 = -1 \Leftrightarrow a = -1$$

$$\begin{cases} -x - 1 + 1 = x^2 + x + 1 \\ \begin{cases} x=0 \\ -1-1+1=0 \end{cases} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + 2x + 1 = 0 \\ x=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 & -\text{здесь} \\ 0 = 1 & \text{неверное для} \\ x=0 & \text{решение} \end{cases}$$

$$a = -1 \quad \text{подходит}$$

$$\textcircled{2} \quad a \neq -1, \quad a \neq -\frac{1}{2}$$

$$\begin{cases} x^2 + x(1-2a-1) + a^2 = 0 \\ \begin{cases} x=0 \\ a^2=1 \end{cases} \\ x(2a+2) - a^2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + x(-2a) + a^2 = 0 \\ x = \frac{a^2}{2(a+1)} \end{cases}$$

Второе уравнение при всех таких a имеет 1 решение,

тогда первое должно иметь либо 1 решение, либо 2, но одно

из них совпадает с решением 2 уравнения

$$x^2 - 2ax + a^2 = 0 \Leftrightarrow (x-a)^2 = 0 \Leftrightarrow x=a \quad -\text{при всех } a$$

1 решение

$$\textcircled{2.1} \quad \frac{a^2}{2(a+1)} = a \Leftrightarrow \begin{cases} a=0 \\ a=2a+2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=0 \\ a=-2 \end{cases} \quad -\text{Эти значения нам не подходят,} \\ \text{так как система имеет 1 решение}$$

$$\textcircled{3} \quad a = -\frac{1}{2}$$

$$\begin{cases} \begin{cases} y = x^2 + x + 1 \\ y = -x + 1 \\ y = 0x - \frac{1}{4} + 1 \end{cases} \\ \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + x + \frac{1}{4} = 0 \\ x = \frac{1}{4} \\ y = \frac{3}{4} \end{cases} \end{cases}$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

- | | | | | | | |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

СТРАНИЦА
1 ИЗ 3

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач **нумеруются отдельно**. Порча QR-кода недопустима!

~6.

$$\left\{ \begin{array}{l} (y - x^2 - x - 1)(x^2 - 3xy + 4y^2)(y + x - 1) = 0 \\ y = (2a+1)x - a^2 + 1 \end{array} \right.$$



$$\left\{ \begin{array}{l} y - x^2 - x - 1 = 0 \\ x^2 - 3xy + 4y^2 = 0 \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} y - x^2 - x - 1 = 0 \\ x^2 - 3xy + 4y^2 = 0 \\ y + x - 1 = 0 \end{array} \right.$$

$$y = (2a+1)x - a^2 + 1$$

$x^2 - 3xy + 4y^2 = 0$ является однородным уравнением 2 степени

относительно X и Y , поэтому оно **равносильно**: уравнение степени

$$\left[\begin{array}{l} \left(\frac{x}{y} \right)^2 - 3 \frac{x}{y} + 4 = 0 \\ \left\{ \begin{array}{l} x \neq 0 \\ y \neq 0 \end{array} \right. \end{array} \right]$$

$$D = 9 - 4 \cdot 4 = -7 < 0 \Rightarrow \text{решений нет, тогда данная}$$

система **равносильна** система

$$\left\{ \begin{array}{l} y = x^2 + x + 1 \\ \left\{ \begin{array}{l} y = 0 \\ x = 0 \end{array} \right. \\ y = -x + 1 \\ y = (2a+1)x - a^2 + 1 \end{array} \right.$$

При этих решениях каждому значению X соответствует
одно значение Y , поэтому эта система
имеет столько же решений, сколько имеет решений
составленность (при всех a кроме $-\frac{1}{2}$)



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.



- | | | | | | | |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

СТРАНИЦА
3 ИЗ 3

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются **отдельно**. Порча QR-кода недопустима!

$$x^2 + x + \frac{1}{4} \leq 0$$

$$\Delta = 1 - 4 \cdot \frac{1}{4} \leq 0$$

$$x = \frac{-1}{2}$$

Система имеет 2 решения: $(\frac{1}{4}, \frac{3}{4})$ и $(-\frac{1}{2}, \frac{3}{4})$

$a = -\frac{1}{2}$ нам подходит

Причём, что данная система имеет ровно 2 решения при $a \in (-\infty; -2) \cup (-2; -1) \cup (-1; 0) \cup (0; +\infty)$

Ответ: $(-\infty; -2) \cup (-2; -1) \cup (-1; 0) \cup (0; +\infty)$

$$(2) \quad a = -1 \quad a = -\frac{1}{2}$$

$$\begin{cases} x = a \\ x = 0 \\ a = 1 \\ x = \frac{a^2}{2(a+1)} \end{cases}$$

При $a = 1$ 3 решения

$$\frac{a^2}{2(a+1)} = a \Leftrightarrow \begin{cases} a = 0 \\ a = 2a + 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 0 \\ a = -2 \end{cases}$$

Эти значения нам не подходит, при них система имеет 1 решение

Причём, что система имеет 2 решения при

$$a \in (-\infty; -2) \cup (-2; 0) \cup (0; 1) \cup (1; +\infty)$$

Ответ: $(-\infty; -2) \cup (-2; 0) \cup (0; 1) \cup (1; +\infty)$

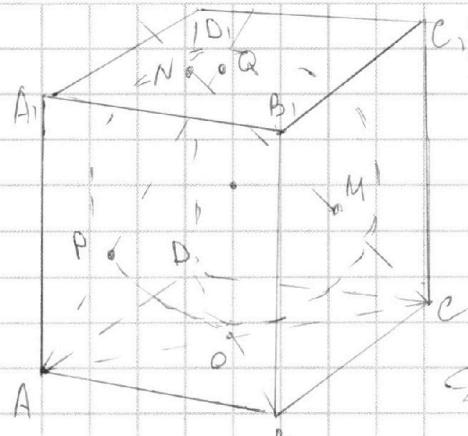


На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

 1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по **каждой из задач** **нумеруются отдельно**. Порча QR-кода недопустима!



$$AO = 1, BO = 2, CO = 4,$$
$$AP = \frac{\sqrt{5}}{3}, AQ = \frac{5\sqrt{5}}{3}$$
$$CM = \frac{10\sqrt{5}}{3}, CN = 2\sqrt{5}.$$

Данные условия однозначно дают

показать, что $PEAQ \sim MENC$

$$PAQ = \frac{4}{3}\sqrt{5}$$

$$NM = \frac{8}{9}\sqrt{5}$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

1

2

3

4

5

6

7

СТРАНИЦА
— ИЗ —

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. **Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно.** Порча QR-кода недопустима!

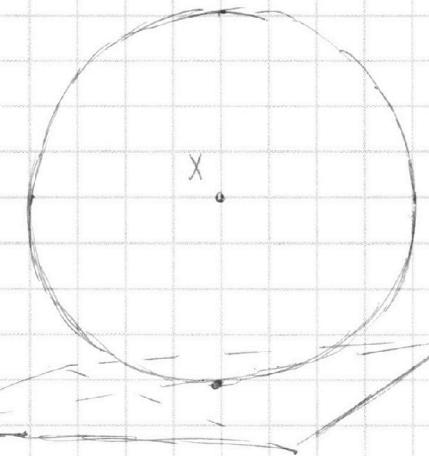
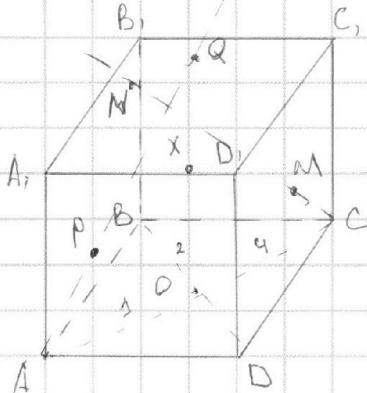
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.



- | | | | | | | |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| <input type="checkbox"/> |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|

СТРАНИЦА
ИЗ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. **Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно.** Порча QR-кода недопустима!



$$AQ > AP \quad CM < CN$$

$$PQ = \frac{4}{3}\sqrt{5} \quad NM = \frac{8}{9}\sqrt{5}$$

~~наимакс~~

НОК в 3 раза большие max = радиус $\rho/3$

НОД в 3 раза меньшие min = радиус $\rho/3$

НОК = НОД · 3 · ρ = 3 max = ρ · min = 18

НОД - полный квадрат

$$CD = 36n^2 - 4 \cdot 9n^2 + 4 \cdot 4n = 16n$$

$$НОД = 16 \quad b = 48$$

$$НОД = 1 \quad b = 3$$

$$15 = 15$$

$$a = 2 \cdot 4 + 3 \cdot 16 = 8 + 48$$

$$4 \cdot 3 = 3(a-3)$$

$$3a = \frac{a \cdot b}{НОД} =$$

$$a = 2 + 3 = 5$$

$$НОД = 9 \quad b = 27$$

$$НОД = 4 \quad b = 12$$

$$a = 2 \cdot 3 + 3 \cdot 9 = 33$$

$$a = 4 + 3 \cdot 4 = 16$$

$$НОК = 3 \cdot 16$$

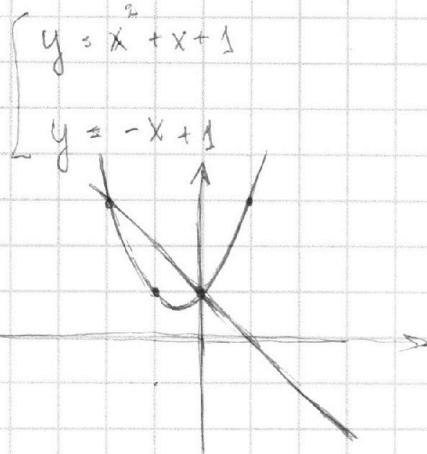


На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

- | | | | | | | |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|
| <input type="checkbox"/> 1 | <input type="checkbox"/> 2 | <input type="checkbox"/> 3 | <input type="checkbox"/> 4 | <input type="checkbox"/> 5 | <input type="checkbox"/> 6 | <input type="checkbox"/> 7 |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|

СТРАНИЦА
ИЗ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по **каждой из задач** **нумеруются отдельно**. Порча QR-кода недопустима!



$$x^2 - 3xy + 4y^2 \geq 0$$

$$(8x^2 + 2y^2)^2 + xy \geq 0$$

$$4\left(\frac{y}{x}\right)^2 - 3\frac{y}{x} + 1 \geq 0$$

$$D = 9 - 16 \cdot 16 < 0$$

$$\frac{y}{x} = 1 \text{ или } \frac{y}{x} = \frac{3}{4}$$

$$\frac{y}{x} = \frac{3}{4} \quad \text{корней}$$

$$\text{нет}$$

$$y = (2a+3)x - a^2 + 1$$

0	b
1	3
2	3
3	3
4	6
5	9

$$\cos BCE = \frac{3}{5}$$

$$\frac{BF}{BD} = ? \quad \log_2 2 + 3 \log_2 3 + 4 \log_2 \frac{1}{16} =$$

$$\frac{BC}{CE} = \frac{3}{5} \quad \log_2 x = \frac{1}{\log_2 x}$$

$$CE \parallel AB \quad AE \parallel BC \quad \frac{1}{16} \cdot \frac{1}{2^4} = 2^{-4}$$

CEAB - параллелограмм

W₂

$$\log_2 2 \cdot 4 = \log_2 2 + \log_2 4$$

$$3 \cdot 1 + 2$$

$$5x$$

$$F$$

F E C E

D E A C

$$a \geq b$$

$$b : 3$$

$$(a-b) : 2$$

a и b **одной**
степени

$$3a = НОК(a, b)$$

$$\text{НОК} : a \quad \text{НОК} : b$$

$$\text{НОК}(a, b) = a \cdot \frac{b}{\text{НОД}(a, b)} : 3$$

$$b = 3 \text{НОД}(a, b)$$

$$\log_a bc = \log_a b + \log_a c$$





На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

- | | | | | | | |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|
| <input type="checkbox"/> 1 | <input type="checkbox"/> 2 | <input type="checkbox"/> 3 | <input type="checkbox"/> 4 | <input type="checkbox"/> 5 | <input type="checkbox"/> 6 | <input type="checkbox"/> 7 |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|

СТРАНИЦА
ИЗ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по **каждой из задач** нумеруются **отдельно**. Порча QR-кода недопустима!

$$f(x) = x^2 + ax + b$$

$$f(x) = 2x^2$$

$$x^2 + ax + b = 2x^2 \quad -1 \text{ корень}$$

$$x^2 - ax - b = 0$$

$$x^2 + ax + b = -8 \quad -3 \text{ корень}$$

$$x^2 + ax + b + 8 = 0$$

$$\begin{cases} a^2 + 4b = 0 \\ a^2 - 4(b+8) = 0 \end{cases}$$

$$8b + 32 = 0$$

$$x_1 = \frac{-a + \sqrt{D}}{2}$$

$$b = -4$$

$$a^2 = 16$$

$$a = -4$$

$$x_2 = \frac{-a - \sqrt{D}}{2}$$

$$a = 4$$

$$x_1 \cdot x_2 = \frac{a^2 - (a^2 - 4b)}{4} = 0$$

$$\begin{cases} x^2 - 4x - 4 = 0 \\ x^2 + 4x - 4 = 0 \end{cases}$$

$$x_1 + x_2 = \pm 4$$

$$x^2 - 4x + 4 = 9 \quad x = 2$$

$$\begin{aligned} 2^{401} \cdot 3^{500} &= x \cdot y \\ &\rightarrow x^2 \cdot k \\ &= (2^a \cdot 3^b)^2 \cdot k \end{aligned}$$

$$y : x \quad y = xk$$

$$x^2 + 4x + 4 = 0 \quad x = -2$$

хорошо (без хвостов)

201 · 251 способом

$$\begin{cases} \log_x 2 + 3 \log_y 8 + 4 \log_{xy} \frac{1}{16} = 0 \\ \frac{x-1}{x+1} > \frac{3y-3}{7y+7} \end{cases}$$

$$x > 0$$

$$\begin{matrix} 251 \\ 201 \\ 251 \end{matrix}$$

$$x \neq 1$$

$$y > 0$$

$$\begin{matrix} 251 \\ 201 \\ 251 \end{matrix}$$

$$y \neq 1$$

$$7(x-1)(y+1) > 3(y-1)(x+1) \iff 7(xy - y + x - 1) > 3(xy - x + y - 1)$$

$$4xy - 10y + 10x - 4 > 0 \quad xy > -3,5x + 2,5y + 1$$

$$\begin{cases} 4 \min(a, b) = 3(a-b)^2 \\ 3 \max(a, b) = \text{НОК}(a, b) \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \textcircled{1} \quad a > b & \quad \begin{cases} 4b = 3(a-b)^2 \leq 3a^2 + 3b^2 - 6ab \\ 3a = \text{НОК}(a, b) \end{cases} \end{aligned}$$