



МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

11 КЛАСС. Вариант 11



1. [3 балла] Дан приведённый квадратный трёхчлен $f(x)$ такой, что уравнение $f(x) = 2x^2$ имеет единственное решение, а также уравнение $f(x) = -8$ имеет единственное решение. Найдите сумму корней уравнения $f(x) = 0$.
2. [3 балла] Сколькими способами можно представить число $n = 2^{401} \cdot 3^{500}$ в виде произведения двух натуральных чисел x и y , где y делится на x ?
3. [5 баллов] Найдите количество пар целых чисел $(x; y)$, удовлетворяющих системе

$$\begin{cases} \log_x 2 + 3 \log_y 8 + 4 \log_{xy} \frac{1}{16} = 0, \\ \frac{x-1}{x+1} > \frac{3y-3}{7y+7}, \\ x \leq 31. \end{cases}$$

4. [5 баллов] Найдите все пары натуральных чисел $(a; b)$ такие, что

$$\begin{cases} 4 \cdot \min(a; b) = 3(a-b)^2, \\ 3 \cdot \max(a; b) = \text{НОК}(a; b). \end{cases}$$

5. [5 баллов] На сторонах BA и BC треугольника ABC с тупым углом B как на диаметрах построены окружности ω_1 и ω_2 соответственно, пересекающиеся в точках B и D . Хорда BE окружности ω_1 перпендикулярна BC , а хорда BF окружности ω_2 перпендикулярна CE и касается ω_1 . Найдите отношение $BF : BD$, если $\cos \angle BCE = \frac{3}{5}$.
6. [5 баллов] При каких значениях параметра a система

$$\begin{cases} (y - x^2 - x - 1)(x^2 - 3xy + 4y^2)(y + x - 1) = 0, \\ y = (2a + 1)x - a^2 + 1 \end{cases}$$

имеет ровно 2 решения?

7. [6 баллов] В прямую четырёхугольную призму $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ вписана сфера ω . Луч с началом в точке A пересекает ω в точках P и Q , а луч с началом в точке C пересекает ω в точках M и N . Пусть O — точка пересечения диагоналей четырёхугольника $ABCD$. Найдите объём призмы $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ и расстояние ρ от центра ω до плоскости PAC , если известно, что $AO = 1$, $BO = 2$, $CO = 4$, $AP = \frac{\sqrt{5}}{3}$, $AQ = \frac{5\sqrt{5}}{3}$, $CM = \frac{10\sqrt{5}}{9}$, $CN = 2\sqrt{5}$.



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.



СТРАНИЦА

1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

~~2777~~

~1.

Пусть трехчлен $f(x) = x^2 + ax + b$, тогда

$$f(x) = 2x^2 \Leftrightarrow x^2 + ax + b = 2x^2 \Leftrightarrow x^2 - ax - b = 0$$

имеет 1 решение если $D = a^2 + 4b = 0$

$$f(x) = -8 \Leftrightarrow x^2 + ax + b = -8 \Leftrightarrow x^2 + ax + b + 8 = 0$$

имеет 1 решение если $D = a^2 - 4(b + 8) = 0$

Найдем a и b , решив систему:

$$\begin{cases} a^2 + 4b = 0 \\ a^2 - 4b - 32 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 8b + 32 = 0 \\ a^2 = -4b \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = -4 \\ a^2 = 16 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = -4 \\ \begin{cases} a = -4 \\ a = 4 \end{cases} \end{cases}$$

Возможны 2 трехчлена: $f_1(x) = x^2 + 4x - 4$ и $f_2(x) = x^2 - 4x - 4$

Сумму корней уравнения $f(x) = 0$ найдем по

теореме Виета (корни всегда будут, т.к. и в $f_1(x)$

и в $f_2(x)$ свободный член $b = -4$ — отрицательное

число, т.е. дискриминант всегда положителен)

Для $f_1(x)$: $x_1 + x_2 = -a = -4$

Для $f_2(x)$: $x_1 + x_2 = -a = 4$

Ответ: 4 или -4.



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении **каждой задачи отдельно**.

1	2	3	4	5	6	7
☐	☒	☐	☐	☐	☐	☐

СТРАНИЦА

1 из 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$\sim 2.$

$$n = 2^{401} \cdot 3^{500} = x \cdot y \quad x \in \mathbb{N} \quad y \in \mathbb{N}$$

$$y : x \Rightarrow y = xk \quad k \in \mathbb{N}$$

$$2^{401} \cdot 3^{500} = x^2 k$$

П.к. 2 и 3 - взаимно простые числа, x можно

представить в виде $2^a \cdot 3^b$ $a \in \mathbb{N}_{\setminus \{0\}}$ $b \in \mathbb{N}_{\setminus \{0\}}$

$$2^{401} \cdot 3^{500} = (2^a \cdot 3^b)^2 \cdot k = 2^{2a} \cdot 3^{2b} \cdot k$$

П.к. $k \in \mathbb{N}$, то $0 \leq a \leq 200$, $0 \leq b \leq 250$

Всего есть 201 способ выбрать число a и 251 способ

выбрать число b , и т.к. a и b выбираются независимо

друг от друга, число x можно выбрать $201 \cdot 251$ способами,

а каждому выбранному числу x соответствует ровно

1 значение $y = \frac{2^{401} \cdot 3^{500}}{x}$, причем $y > x$ при всех выбранных

a и b (т.к. n - не полный квадрат) и $y : x$

Выбрать 2 числа x и y можно $201 \cdot 251 = 50451$

способами.

Ответ: 50451



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☒	☐	☐	☐	☐

СТРАНИЦА

1 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$\sim 3.$

$$\begin{cases} \log_x 2 + 3\log_y 8 + 4\log_{xy} \frac{1}{16} = 0 \\ \frac{x-1}{x+1} > \frac{3y-3}{5y+7} \\ x \leq 31 \end{cases}$$

П.к. x, y и xy - основания логарифма:

$$x > 0, x \neq 1, y > 0, y \neq 1, xy > 0, xy \neq 1$$

Мы ищем целые x и y , поэтому достаточно условий

$$x > 1, y > 1$$

$$\log_x 2 + 3\log_y 8 + 4\log_{xy} \frac{1}{16} = 0 \quad \Rightarrow \log_x 2 + \log_y 8 + \log_{xy} \frac{1}{16} = 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{\log_2 x} + \frac{3 \cdot 3}{\log_2 y} + \frac{4 \cdot (-4)}{\log_2 xy} = 0 \quad \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{\log_2 y \cdot \log_2 xy + 9 \log_2 x \cdot \log_2 xy - 16 \log_2 x \cdot \log_2 y}{\log_2 x \cdot \log_2 y \cdot \log_2 xy} = 0 \quad \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \log_2 y (\log_2 x + \log_2 y) + 9 \log_2 x (\log_2 x + \log_2 y) - 16 \log_2 x \cdot \log_2 y = 0$$

$$\Leftrightarrow \log_2 y (\log_2 x + \log_2 y) + 9 \log_2 x (\log_2 x + \log_2 y) - 16 \log_2 x \cdot \log_2 y = 0 \quad \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (\log_2 y)^2 + 9(\log_2 x)^2 - 6 \log_2 x \cdot \log_2 y = 0$$

$$\textcircled{1} \log_2 x = 0 \Rightarrow \log_2 y = 0$$

$x = 1, y = 1$ - не удовлетворяет условиям $x > 1, y > 1$

$$\textcircled{2} \log_2 x \neq 0$$

$$\left(\frac{\log_2 y}{\log_2 x} \right)^2 - 6 \frac{\log_2 y}{\log_2 x} + 9 = 0$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☒	☐	☐	☐	☐

СТРАНИЦА

2 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\frac{\Delta}{y} = 9 - 9 = 0$$

$$\frac{\log_2 x}{\log_2 y} = \frac{6}{2} = 3$$

$$\log_2 x = 3 \log_2 y \Leftrightarrow x = y^3$$

Системе удовлетворяют полные кубы x не большие 31, кубический корень из которых y удовлетворяет неравенству системы, причем $x > 1$

$$\textcircled{1} \quad x = 1 \quad y = 1$$

$$\frac{1-1}{1+1} > \frac{3 \cdot 1 - 3}{7 \cdot 1 + 7} \Leftrightarrow 0 > \frac{0}{14} \quad \text{или неверно, } x=1 \text{ не подходит}$$

$$\textcircled{2} \quad x = 8 \quad y = 2$$

$$\frac{8-1}{8+1} > \frac{3 \cdot 2 - 3}{7 \cdot 2 + 7} \Leftrightarrow \frac{7}{9} > \frac{3}{21} \Leftrightarrow 7 \cdot 21 > 27 \quad \text{верно}$$

$(8; 2)$ - решение системы

$$\textcircled{3} \quad x = 27 \quad y = 3$$

$$\frac{27-1}{27+1} > \frac{3 \cdot 3 - 3}{7 \cdot 3 + 7} \Leftrightarrow \frac{26}{28} > \frac{6}{28} \quad \text{верно}$$

$(27; 3)$ - решение системы

Ответ: 2 решения.



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☒	☐	☐	☐

СТРАНИЦА

1 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

~ 4 .

$$\begin{cases} 4 \min(a; b) = 3(a-b)^2 \\ 3 \max(a; b) = \text{НОК}(a; b) \end{cases}$$

$$\text{НОК}(a; b) = \frac{a \cdot b}{\text{НОД}(a; b)} = \frac{\max(a; b) \cdot \min(a; b)}{\text{НОД}(a; b)}$$

$$3 = \frac{\min(a; b)}{\text{НОД}(a; b)} \Leftrightarrow \min(a; b) = 3 \text{НОД}(a; b)$$

Тогда $4 \cdot 3 \cdot \text{НОД}(a; b) = 3(a-b)^2 \Leftrightarrow 4 \text{НОД}(a; b) = (a-b)^2$

$$(a-b)^2 : 4 \Leftrightarrow (a-b) : 2$$

a и b одной чётности

$\text{НОД}(a; b)$ - полный квадрат

д) Пусть $a \geq b$, тогда $\min(a; b) = b = 3 \text{НОД}(a; b)$; $\max(a; b) = a$

$$(a - 3 \text{НОД}(a; b))^2 = 4 \text{НОД}^2(a; b)$$

$$a^2 - 6a \text{НОД}(a; b) + 9 \text{НОД}^2(a; b) - 4 \text{НОД}^2(a; b) = 0$$

$$\begin{cases} a = 2\sqrt{\text{НОД}(a; b)} + 3 \text{НОД}(a; b) \\ a = -2\sqrt{\text{НОД}(a; b)} + 3 \text{НОД}(a; b) \end{cases} \leq b = 3 \text{НОД}(a; b) \text{ - нельзя}$$

$$a = 2\sqrt{\text{НОД}(a; b)} + b$$

$$\text{НОК}(a; b) = \frac{a \cdot b}{\text{НОД}(a; b)} = \frac{2b\sqrt{\text{НОД}(a; b)} + b^2}{\text{НОД}(a; b)} = 2b\sqrt{\text{НОД}(a; b)} + 3b$$

~~$$6 \text{НОД}(a; b) \sqrt{\text{НОД}(a; b)} + 9 \text{НОД}^2(a; b) = 6 \text{НОД}(a; b) \sqrt{\text{НОД}(a; b)} + 3$$~~

~~Решения системы не имеют.~~



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении **каждой задачи отдельно**.

1
☐

2
☐

3
☐

4
☒

5
☐

6
☐

7
☐

СТРАНИЦА
2 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Решения системы имеют вид:

$$(2x + 3x^2; 3x^2), \text{ где } x^2 = \text{НОД}(a; b), x \in \mathbb{N}$$

2) Если $a < b$, то

$$b = -2\sqrt{\text{НОД}(a; b)} + 3\text{НОД}(a; b)$$

Решение системы имеет вид

$$(3x^2; -2x + 3x^2), \text{ где } x^2 = \text{НОД}(a; b), x \in \mathbb{N}$$

Ответ: $(2x + 3x^2; 3x^2) \quad x \in \mathbb{N}$

$$(3x^2; -2x + 3x^2) \quad x \in \mathbb{N}$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

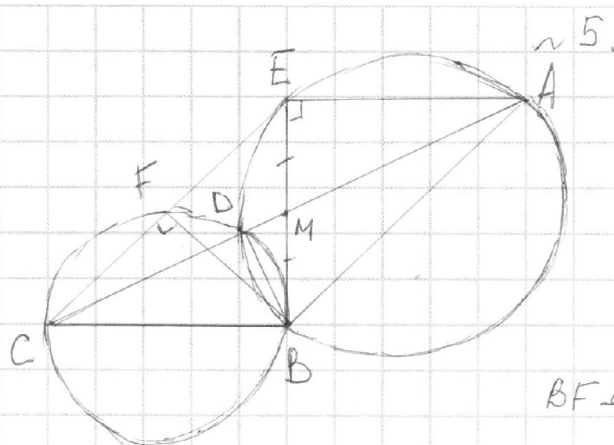
1 2 3 4 5 6 7

☐ ☐ ☐ ☐ ☒ ☐ ☐

СТРАНИЦА

1 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



Дано: $\triangle ABC$, $\angle B = 90^\circ$, AB - диаметр

W_1 , BC - диаметр W_2 , $W_1 \cap W_2 = \{B, D\}$

BE - хорда W_1 , $BE \perp BC$, BF - хорда W_2 ,

$BF \perp CE$, BF касается W_1 , $\cos \angle BCE = \frac{3}{5}$

Найти: BF : BD

Решение:

$\angle CFB = 90^\circ$ (опирается на диаметр BC)

Ит.к. $BF \perp CE$ и $BF \perp CF \Rightarrow C, F$ и E лежат на 1 прямой

$\angle BDC = 90^\circ$ (опирается на диаметр BC) }
 $\angle BDA = 90^\circ$ (опирается на диаметр AB) } $\Rightarrow D \in AC$ (т.к. $\angle ADC = 180^\circ$)

Пусть $\angle BCE = \alpha$, тогда $\angle CEB = 90^\circ - \alpha$ (т.к. $BE \perp BC$)

$\angle EBF = 90^\circ - \angle FEB = 90^\circ - 90^\circ + \alpha = \alpha$ (т.к. $BF \perp EC$)

$\angle EBA = 90^\circ - \angle FBE = 90^\circ - \alpha$ (т.к. BF - касательная, а AB - диаметр)

$\angle CEB = \angle ABE \Rightarrow CE \parallel AB$

$\angle CBE = \angle AEB = 90^\circ$ ($\angle BEA$ опирается на диаметр) $\Rightarrow BC \parallel EA$

CEAB - параллелограмм

Пусть $AC \cap EB = M$, тогда M - середина EB



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

☐☐☐☐☒☐☐

СТРАНИЦА
2 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\cos BCE = \frac{BC}{CE} = \frac{3}{5} \quad (\text{в } \triangle BCE)$$

Пусть $BC = 3x$, тогда $CE = 5x$

$$BE = \sqrt{(5x)^2 - (3x)^2} = 4x \quad (\text{по т. Пифагора})$$

$$BM = \frac{BE}{2} = 2x$$

BF - высота прямоугольного $\triangle BCE$, проведенная к гипотенузе

$$BF = \frac{BC \cdot BE}{CE} = \frac{3x \cdot 4x}{5x} = \frac{12}{5}x$$

BD - высота прямоугольного $\triangle BCM$, проведенная к гипотенузе

$$BD = \frac{BC \cdot BM}{CM} = \frac{3x \cdot 2x}{\sqrt{3^2 + 2^2}x} = \frac{6}{\sqrt{13}}x$$

$$\frac{BF}{BD} = \frac{12 \cdot \sqrt{13}}{5 \cdot 6} = \frac{2\sqrt{13}}{5}$$

$$\text{Ответ: } \frac{2\sqrt{13}}{5}$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☒ 7 ☐

СТРАНИЦА
2 ИЗ 3

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\begin{cases} (2a+1)x - a^2 + 1 = x^2 + x + 1 \\ x=0 \\ -a^2 + 1 = 0 \end{cases}$$

$$(2a+1)x - a^2 + 1 = -x + 1$$

① $2a+1 = -1 \Leftrightarrow a = -1$

$$\begin{cases} -x - 1 + 1 = x^2 + x + 1 \\ x=0 \\ -0 - 1 + 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + 2x + 1 = 0 \\ x=0 \\ 0 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \\ x = 0 \end{cases}$$

- ~~одно~~
 ~~два~~
 ~~решения~~

$a = -1$ ~~не~~ подходит

② $a \neq -1, a \neq -\frac{1}{2}$

$$\begin{cases} x^2 + x(1-2a-1) + a^2 = 0 \\ x=0 \\ a^2 = 1 \\ x(2a+2) - a^2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + x(-2a) + a^2 = 0 \\ x = \frac{a^2}{2(a+1)} \end{cases}$$

Второе уравнение при всех таких a имеет 1 решение, тогда первое должно иметь либо 1 решение, либо 2, но одно из них совпадает с решением 2 уравнения

$$x^2 - 2ax + a^2 = 0 \Leftrightarrow (x-a)^2 = 0 \Leftrightarrow x = a \quad \text{— при всех } a \text{ 1 решение}$$

②.1. $\frac{a^2}{2(a+1)} = a \Leftrightarrow \begin{cases} a = 0 \\ a = 2a+2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 0 \\ a = -2 \end{cases}$

— эти значения нам не подходят, при них система имеет 1 решение

③ $a = -\frac{1}{2}$

$$\begin{cases} y = x^2 + x + 1 \\ y = -x + 1 \\ y = 0x - \frac{1}{4} + 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + x + \frac{1}{4} = 0 \\ x = \frac{1}{4} \\ y = \frac{3}{4} \end{cases}$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

1
☐2
☐3
☐4
☐5
☐6
☒7
☐СТРАНИЦА
1 ИЗ 3

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

~6.

$$\begin{cases} (y - x^2 - x - 1)(x^2 - 3xy + 4y^2)(y + x - 1) = 0 \\ y = (2a+1)x - a^2 + 1 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y - x^2 - x - 1 = 0 \\ x^2 - 3xy + 4y^2 = 0 \\ y + x - 1 = 0 \\ y = (2a+1)x - a^2 + 1 \end{cases}$$

$x^2 - 3xy + 4y^2 = 0$ является однородным уравнением 2 степени

относительно x и y , поэтому оно равносильно: ~~уравнению системы~~

$$\begin{cases} \left(\frac{x}{y}\right)^2 - 3\frac{x}{y} + 4 = 0 \\ \begin{cases} x=0 \\ y=0 \end{cases} \end{cases}$$

$$D = 9 - 4 \cdot 4 = -7 < 0 \Rightarrow \text{решений нет, тогда данная}$$

система равносильна системе

$$\begin{cases} \begin{cases} y = x^2 + x + 1 \\ \begin{cases} y=0 \\ x=0 \end{cases} \end{cases} \\ y = -x + 1 \\ y = (2a+1)x - a^2 + 1 \end{cases}$$

Среди её решений каждому значению x соответствует
ровно одно значение y , поэтому эта система
имеет столько же решений, сколько имеет решений
совокупность (при всех a кроме $-\frac{1}{2}$) ~~система~~



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи **отдельно**.

1
☐2
☐3
☐4
☐5
☐6
☒7
☐

СТРАНИЦА

3 ИЗ 3

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются **отдельно**. Порча QR-кода недопустима!

$$x^2 + x + \frac{1}{4} = 0$$

$$D = 1 - 4 \cdot \frac{1}{4} = 0$$

$$x = \frac{-1}{2}$$

Система имеет 2 решения: $(\frac{1}{4}; \frac{3}{4})$ и $(-\frac{1}{2}; \frac{3}{4})$ ~~$(0; 0)$~~

$a = -\frac{1}{2}$ нам ~~не~~ подходит

~~Получаем, что данная система имеет ровно 2 решения при $a \in (-\infty; -2) \cup (-2; -1) \cup (-1; 0) \cup (0; +\infty)$~~

~~Ответ: $(-\infty; -2) \cup (-2; -1) \cup (-1; 0) \cup (0; +\infty)$~~

② $a = -1$ $a = -\frac{1}{2}$

$$\begin{cases} x = a \\ \begin{cases} x = 0 \\ a = 1 \end{cases} \\ x = \frac{a^2}{2(a+1)} \end{cases}$$

При $a = 1$ 3 решения

$$\frac{a^2}{2(a+1)} = a \Leftrightarrow \begin{cases} a = 0 \\ a = 2a + 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 0 \\ a = -2 \end{cases}$$

- эти значения нам не подходят, при них система имеет 1 решение

Получаем, что система имеет 2 решения при

$$a \in (-\infty; -2) \cup (-2; 0) \cup (0; 1) \cup (1; +\infty)$$

Ответ: $(-\infty; -2) \cup (-2; 0) \cup (0; 1) \cup (1; +\infty)$.



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

1
☐

2
☐

3
☐

4
☐

5
☐

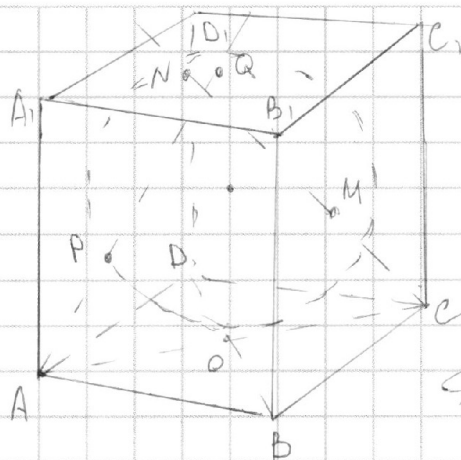
6
☐

7
☒

СТРАНИЦА

1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



$$\begin{aligned} AO &= 1, \quad BO = 2, \quad CO = 4, \\ AP &= \frac{\sqrt{5}}{3}, \quad AQ = \frac{5\sqrt{5}}{3}, \\ CM &= \frac{10\sqrt{5}}{3}, \quad CN = 2\sqrt{5} \end{aligned}$$

Данные условия однозначно дают

понять, что

$P \in AQ, M \in NC$

$$PQ = \frac{4}{3}\sqrt{5}$$

$$NM = \frac{8}{3}\sqrt{5}$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

1
☐

2
☐

3
☐

4
☐

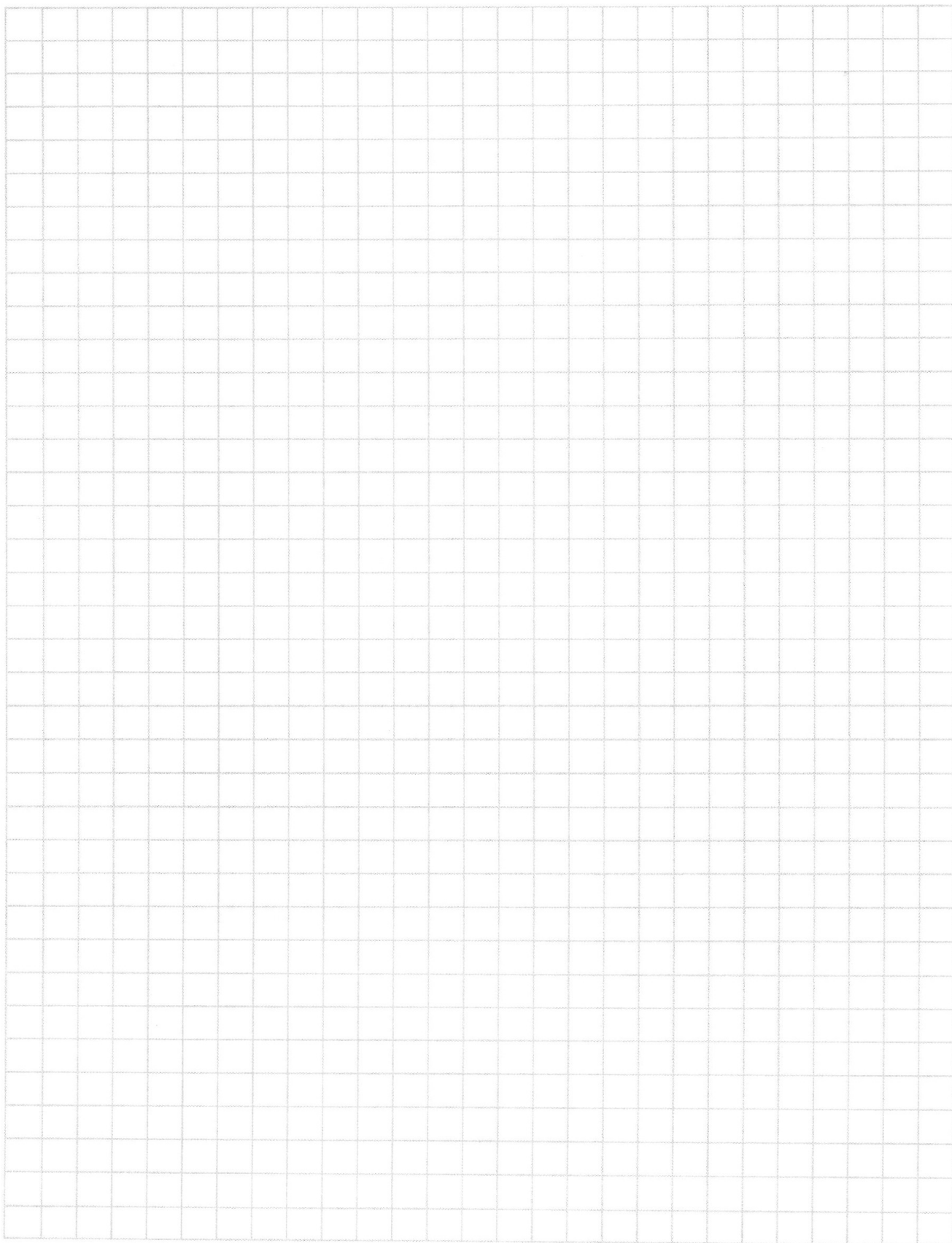
5
☐

6
☐

7
☐

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. **Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно.** Порча QR-кода недопустима!



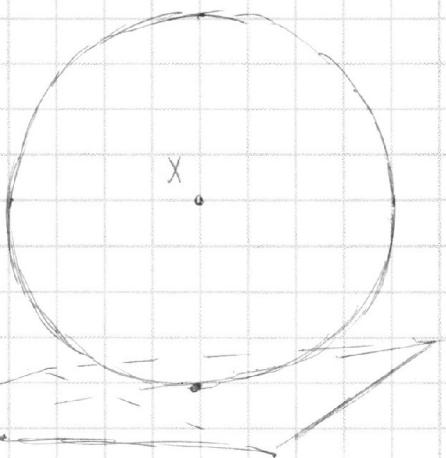
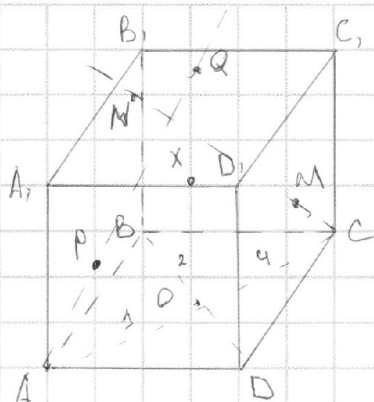


На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7
☐ ☐ ☐ ☐ ☐ ☐ ☐

СТРАНИЦА
 __ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



$$AQ > AP \quad CM < CN$$

$$PQ = \frac{4}{3}\sqrt{5}$$

$$NM = \frac{8}{9}\sqrt{5}$$

~~NPQMP~~

НОК в 3 раза больше max = $p \cdot \text{НОД}$

$p/3$

НОД в 3 раза меньше min = $q \cdot \text{НОД} = 3 \cdot \text{НОД}$

$$\text{НОК} = \text{НОД} \cdot 3 \cdot p = 3 \cdot \text{max} = p \cdot \text{min}$$

НОД - полный квадрат

$$D = 36n^2 - 4 \cdot 9n^2 + 4 \cdot 4n = 16n$$

$$\text{НОД} = 16 \quad b = 48$$

$$\text{НОД} = 1 \quad b = 3$$

$$15 = 15$$

$$a = 2 \cdot 4 + 3 \cdot 16 = 8 + 48$$

$$4 \cdot 3 = 3(a-3)^2$$

$$3a = \frac{a \cdot b}{\text{НОД}}$$

$$a = 2 + 3 = 5$$

$$a = 3$$

$$\text{НОД} = 9 \quad b = 27$$

$$\text{НОД} = 4 \quad b = 12$$

$$a = 2 \cdot 3 + 3 \cdot 9 = 33$$

$$a = 4 + 3 \cdot 4 = 16$$

$$\text{НОК} = 3 \cdot 16$$

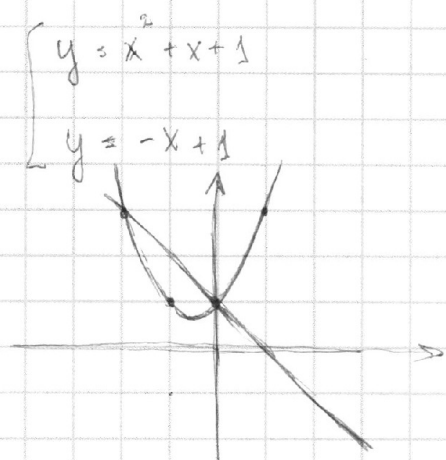


На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



$$x^2 - 3xy + 4y^2 \leq 0$$

$$4\left(\frac{y}{x}\right)^2 - 3\frac{y}{x} + 1 \leq 0$$

$$D = 9 - 16 \cdot 4 < 0$$

$$\frac{y}{x} = \frac{1}{4}$$

корней

$$\frac{y}{x} = \frac{1}{4}$$

нет

$$y = (2a+1)x - a^2 + 1$$

a	b
4	3
2	3
3	3
2	6
3	9

$$\cos BCE = \frac{3}{5}$$

$$\frac{BF}{BD} = \frac{\log_2 2 + 3 \log_2 3 + 4 \log_2 \frac{1}{16}}{1}$$

$$\frac{BC}{CE} = \frac{3}{5}$$

$$\log_2 2 = \frac{1}{\log_2 x}$$

$$\frac{1}{16} = \frac{1}{2^4} = 2^{-4}$$

$$CE \parallel AB \quad AE \parallel BC$$

CEAB - параллелограмм

DEAE

$$a \geq b$$

$$b : 3$$

$$(a-b) : 2$$

a и b одной
значности

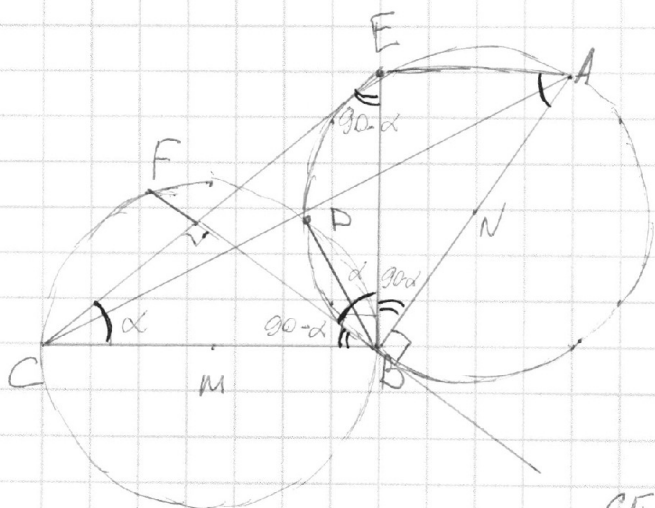
$$4b = 3(a-b)^2$$

$$3a = \text{НОК}(a; b)$$

$$\text{НОК} : a \quad \text{НОК} : b$$

$$\text{НОК}(a; b) = a \cdot \frac{b}{\text{НОД}(a; b)} : 3$$

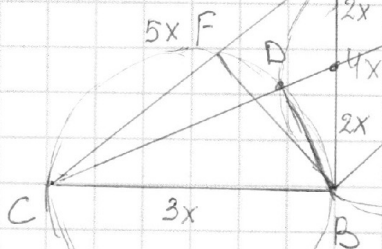
$$b = 3 \text{НОД}(a; b)$$



W2

$$\log_2 2 \cdot 4 = \log_2 2 + \log_2 4$$

3 1+2



$$\log_a bc = \log_a b + \log_a c$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

☐ ☐ ☐ ☐ ☐ ☐ ☐

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$f(x) = x^2 + ax + b$$

$$f(x) = 2x^2$$

$$x^2 + ax + b = 2x^2 \quad - 1 \text{ корень}$$

$$x^2 - ax - b = 0$$

$$x^2 + ax + b = -8 \quad - 3 \text{ корень}$$

$$x^2 + ax + b + 8 = 0$$

$$\begin{cases} a^2 + 4b = 0 \\ a^2 - 4(b+8) = 0 \end{cases}$$

$$8b + 32 = 0$$

$$b = -4$$

$$a^2 = 16$$

$$a = -4$$

$$a = 4$$

$$x_1 = \frac{-a + \sqrt{D}}{2}$$

$$x_2 = \frac{-a - \sqrt{D}}{2}$$

$$x_1 \cdot x_2 = \frac{a^2 - (a^2 - 4b)}{4} = b$$

$$\begin{cases} x^2 - 4x - 4 = 0 \\ x^2 + 4x - 4 = 0 \end{cases}$$

$$x_1 + x_2 = \pm 4$$

$$2^{401} \cdot 3^{500}$$

$$= x \cdot y$$

$$= x^2 \cdot k$$

$$= (2^a \cdot 3^b)^2 \cdot k$$

$$y : x$$

$$y = x^k$$

$$0 \leq a \leq 200$$

$$0 \leq b \leq 250$$

$$201 \cdot 251 \text{ способ}$$

$$\begin{cases} \log_x 2 + 3 \log_y 8 + 4 \log_{xy} \frac{1}{16} = 0 \\ \frac{x-1}{x+1} > \frac{3y-3}{3y+4} \\ x \leq 31 \end{cases}$$

$$x > 0$$

$$x \neq 1$$

$$y > 0$$

$$y \neq 1$$

$$\begin{array}{r} \times 251 \\ 201 \\ \hline 502 \\ 50451 \end{array}$$

$$7(x-1)(y+1) > 3(y-1)(x+1) \Leftrightarrow 7(xy - y + x - 1) > 3(xy - x + y - 1)$$

$$4xy - 10y + 10x - 4 > 0$$

$$xy > -35x + 25y + 1$$

$$\begin{cases} 4 \min(a, b) = 3(a-b)^2 \\ 3 \max(a, b) = \text{НОК}(a, b) \end{cases}$$

$$\text{НОК}(a, b) = \frac{ab}{\text{НОД}(a, b)}$$

$$\textcircled{1} a \geq b \quad \begin{cases} 4b = 3(a-b)^2 = 3a^2 + 3b^2 - 6ab \\ 3a = \text{НОК}(a, b) = \frac{ab}{\text{НОД}(a, b)} \end{cases}$$