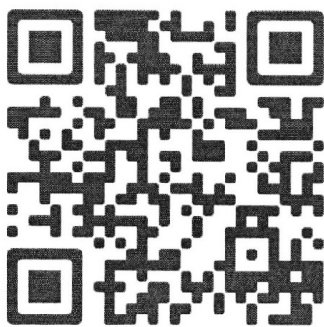




МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

11 КЛАСС. Вариант 12



1. [3 балла] Дан приведённый квадратный трёхчлен $f(x)$ такой, что уравнение $f(x) = -2x^2$ имеет единственное решение, а также уравнение $f(x) = -6$ имеет единственное решение. Найдите сумму корней уравнения $f(x) = 0$.
2. [3 балла] Сколькими способами можно представить число $n = 5^{151} \cdot 7^{600}$ в виде произведения двух натуральных чисел x и y , где y делится на x ?
3. [5 баллов] Найдите количество пар целых чисел $(x; y)$, удовлетворяющих системе

$$\begin{cases} 3 \log_x 27 + \log_y 3 + 8 \log_{xy} \frac{1}{9} = 0, \\ \frac{3y+3}{y-1} < \frac{7x+7}{x-1}, \\ y \leq 24. \end{cases}$$

4. [5 баллов] Найдите все пары натуральных чисел $(a; b)$ такие, что

$$\begin{cases} 4 \cdot \min(a; b) = 5(a - b)^2, \\ 5 \cdot \max(a; b) = \text{НОК}(a; b). \end{cases}$$

5. [5 баллов] На сторонах BA и BC треугольника ABC с тупым углом B как на диаметрах построены окружности ω_1 и ω_2 соответственно, пересекающиеся в точках B и D . Хорда BE окружности ω_1 перпендикулярна BC , а хорда BF окружности ω_2 перпендикулярна CE и касается ω_1 . Найдите отношение $BF : BD$, если $\cos \angle BCE = \frac{3}{4}$.
6. [5 баллов] При каких значениях параметра a система

$$\begin{cases} (y + x^2 - 4x + 1)(x^2 - 2xy + 3y^2)(y - 2x + 1) = 0, \\ y = (-2a + 4)x + a^2 - 1 \end{cases}$$

имеет ровно 2 решения?

7. [6 баллов] В прямую четырёхугольную призму $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ вписана сфера ω . Луч с началом в точке A пересекает ω в точках P и Q , а луч с началом в точке C пересекает ω в точках M и N . Пусть O — точка пересечения диагоналей четырёхугольника $ABCD$. Найдите объём призмы $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ и расстояние ρ от центра ω до плоскости PAC , если известно, что $AO = 1$, $BO = 2$, $CO = 11$, $AP = \frac{2}{\sqrt{5}}$, $AQ = 2\sqrt{5}$, $CM = 4\sqrt{5}$, $CN = 5\sqrt{5}$.



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении **каждой** задачи отдельно.

1
☒2
☐3
☐4
☐5
☐6
☐7
☐СТРАНИЦА
1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Пусть $f(x) = x^2 + bx + c$. Тогда $f(x) = -2x^2 \Leftrightarrow 3x^2 + bx + c = 0$.
По условию у этого ур-ия ровно 1 корень $\Rightarrow D = 0$. $D = b^2 - 12c = 0$. (1)

$f(x) = -6 \Leftrightarrow x^2 + bx + c + 6 = 0$. По условию это ур-ие тоже имеет един.
ственное решение $\Rightarrow D = 0$. $D = b^2 - 4c - 24 = 0$. (2)

Получили систему $\begin{cases} (1) \\ (2) \end{cases}$:

$$\begin{cases} b^2 - 12c = 0 & (1) \\ b^2 - 4c - 24 = 0 & (2) \end{cases} \Rightarrow (1) - (2) = -8c + 24 = 0 \Rightarrow c = 3, \text{ подставим в (1):} \\ b^2 = 12 \cdot 3 = 36. \quad (3)$$

По теореме Виета сумма корней $f(x)$ это $-b$. Из (3) $b = \pm 6 \Rightarrow$

сумма корней может быть 6 или (-6) . Приведу примеры когда
саукае:

1) $f(x) = x^2 + 6x + 3$

$$f(x) = -2x^2 \Leftrightarrow 3x^2 + 6x + 3 = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 3(x+1)^2 = 0 \Leftrightarrow x = -1$$

$$f(x) = -6 \Leftrightarrow x^2 + 6x + 9 = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (x+3)^2 = 0 \Rightarrow x = -3$$

2) $f(x) = x^2 - 6x + 3$

$$f(x) = -2x^2 \Leftrightarrow 3x^2 - 6x + 3 = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 3(x-1)^2 = 0 \Leftrightarrow x = 1$$

$$f(x) = -6 \Leftrightarrow x^2 - 6x + 9 = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x = 3$$

Ответ: 6 или (-6)



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.



СТРАНИЦА

1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Если $y : x$, то $y = kx$, где $k \in \mathbb{N}$, $x, y \in \mathbb{N}$. Тогда

$n = xy = kx^2$. По ~~этому~~ ~~у~~ разложение в kx^2 однозначно получается восстановить y и x так представить x^2 в виде $x \cdot x$ 1 способ. Тогда найдем кол-во способов выбрать y из $n = 5^{15} \cdot 7^{600}$ ~~по~~ множитель - квадрат. ~~В~~ x^2 содержит в себе все простые множители в четной степени и это квадрат.

выбрать y из 5^{15} четное кол-во которых есть 76 способов $(\frac{15}{2} + 1)$, так можно взять 5^0 . Выбрать четное кол-во 7 из 600 штук есть 301 способ $(\frac{600}{2} + 1)$ так можно взять 0. Тогда способов выбрать

x^2 $301 \cdot 76$. Все множители, которые не выбрали, это k . Тогда всего способов

$$\begin{array}{r} 301 \\ \times 76 \\ \hline 1806 \\ 2107 \\ \hline 22876 \end{array}$$

Ответ: 22876



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи** отдельно.



СТРАНИЦА
1 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$3 \log_x 27 + \log_y 3 + 8 \log_{xy} \frac{1}{9} = 0 \Leftrightarrow 9 \log_x 3 + \log_y 3 - 16 \log_{xy} 3 = 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{9}{\log_3 x} + \frac{1}{\log_3 y} - \frac{16}{\log_3 xy} = 0 \Leftrightarrow \frac{9}{\log_3 x} + \frac{1}{\log_3 y} = \frac{16}{\log_3 x + \log_3 y}$$

ОДЗ: $\begin{cases} x > 0 \\ x \neq 1 \\ y > 0 \\ y \neq 1 \end{cases}$

Пусть $\log_3 x = a$; $\log_3 y = b$. Тогда:

$$\frac{9}{a} + \frac{1}{b} = \frac{16}{a+b} \quad | \cdot (a+b) \Leftrightarrow 9 + 9\frac{b}{a} + \frac{a}{b} + 1 = 16 \Leftrightarrow \frac{9b}{a} + \frac{a}{b} = 6$$

$$\text{Пусть } \frac{b}{a} = t. \text{ Тогда } 9t + \frac{1}{t} = 6 \quad | \cdot t \Leftrightarrow 9t^2 - 6t + 1 = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (t-3)^2 = 0 \Leftrightarrow t = 3 \Leftrightarrow \frac{b}{a} = 3 \Leftrightarrow b = 3a \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \log_3 y = 3 \log_3 x \Leftrightarrow \log_3 y = \log_3 x^3 \Leftrightarrow y = x^3.$$

Тк $\log_3 a$ монот. на

$$\text{Тогда } \frac{3y+3}{y-1} < \frac{7x+7}{x-1} \Leftrightarrow \frac{3(x^3+1)}{x^3-1} < \frac{7(x+1)}{x-1} \Leftrightarrow$$

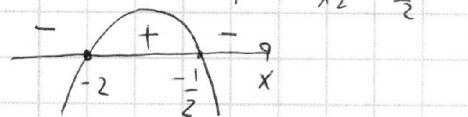
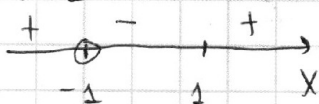
$$\Leftrightarrow \frac{3(x+1)(x^2-x+1)}{(x-1)(x^2+x+1)} < \frac{7(x+1)}{(x-1)} \Leftrightarrow \left(\frac{x+1}{x-1} \right) \left(\frac{3x^2-3x+3}{x^2+x+1} - 7 \right) < 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{x+1}{x-1} \right) \left(\frac{3x^2-3x+3-7x^2-7x-7}{x^2+x+1} \right) < 0 \Leftrightarrow x \in (-\infty; -2) \cup (-1; -\frac{1}{2}) \cup (1; +\infty)$$

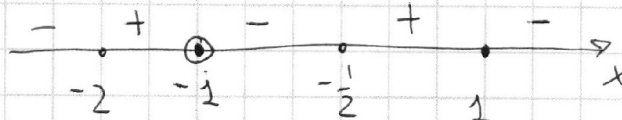
$$\Leftrightarrow \left(\frac{x+1}{x-1} \right) \left(\frac{-4x^2-10x-4}{x^2+x+1} \right) < 0$$

1) $x^2+x+1 > 0$ для $\forall x$ тк $D = 1-4$
2) $-4x^2-10x-4 = -2(2x^2+5x+2)$
 $D = 25-4 \cdot 2 \cdot 2 = 9$
 $x = \frac{-5 \pm 3}{4}$ $x_1 = -2$
 $x_2 = -\frac{1}{2} \Rightarrow$

$$3) \frac{x+1}{x-1} < 0$$



Итого:





На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении **каждой задачи отдельно**.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☒ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА

2 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются **отдельно**. Порча QR-кода недопустима!

Значит нам нужно найти количество таких значений $(x; y)$, что $y = x^3$;

$x \in (-\infty; -2) \cup (-1; -\frac{1}{2}) \cup (1; +\infty)$; что $x > 0$; $x \neq 1$; $y > 0$; $y \neq 1$
(ограничение на логарифмы), и что $y \leq 24$.

Тогда $x \in (1; +\infty)$

$$\begin{cases} y = x^3 \\ y \leq 24 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x^3 \leq 24 \Rightarrow x = 2 & y = 8 \\ x > 1 & \text{или } x \geq 3 \\ x \in \mathbb{Z} & y = x^3 \geq 27 \end{cases}$$

Ответ: пара $((2; 8))$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☒	☐	☐	☐

СТРАНИЦА

1 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

~~Известно~~ Известно, что $\frac{ab}{\text{НОД}(a;b)} = \text{НОК}(a;b)$

1) Пусть $a \leq b$. Тогда
$$\begin{cases} 4a = 5(a-b)^2 & (1) \\ 5b = \text{НОК}(a;b) & (2) \end{cases}$$

2) (2) $\Leftrightarrow 5b = \frac{ab}{\text{НОД}(a;b)} \Leftrightarrow 5 = \frac{a}{\text{НОД}(a;b)} \Rightarrow a = 5 \cdot \text{НОД}(a;b)$

(1): $4a = 5(a-b)^2$. Пусть $a_1 = \frac{a}{\text{НОД}(a;b)}$; $b_1 = \frac{b}{\text{НОД}(a;b)}$. Тогда

(1) $\Leftrightarrow 4a = 5 \cdot (\text{НОД}(a;b))^2 (a_1 - b_1)^2 \Leftrightarrow 4 \cdot \text{НОД}(a;b) = (\text{НОД}(a;b))^2 (a_1 - b_1)^2 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 4 = \text{НОД}(a;b) \cdot (a_1 - b_1)^2$. Так $a, b \in \mathbb{N}$, то $\text{НОД}(a;b)$ и $a_1, b_1 \in \mathbb{N} \Rightarrow$

$\Rightarrow$ Существует 3 варианта разложения 4 на множители: $4 \cdot 1 = 4$ Ко-ти
 $1 \cdot 4 = 4$
 $2 \cdot 2 = 4$

Один из множителей должен быть равен $(a_1 - b_1)^2$ он должен быть точным квадратом, т.к. $a_1 - b_1 \in \mathbb{Z} \Rightarrow$ осталось 2 варианта

а) $\text{НОД}(a;b) = 1$; $(a_1 - b_1)^2 = 4 \Rightarrow a_1 = a$; $b_1 = b$; $(a_1 - b_1)^2 = 4 = (a - b)^2 \Rightarrow$

$\Rightarrow |a - b| = 2$. Так $a \leq b$, то $b = a + 2$. Пусть $\text{НОД}(a;b) = 1$, то $\text{НОК}(a;b) = ab$. Подставим в (2): $5(a+2) = a(a+2) \Leftrightarrow 5a+10 = a^2+2a \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow a^2 - 3a - 10 = 0$

$D = 9 + 40 = 49$

$a = \frac{3 \pm 7}{2} \Rightarrow \begin{cases} a = 5 \\ a = -2 \end{cases}$, так $a \in \mathbb{N}$, то $a = 5$, $b = 5 + 2 = 7$, $\text{НОД}(5;7) = 1$. Эта пара подходит

б) $\text{НОД}(a;b) = 4$; $(a_1 - b_1)^2 = 1 \Rightarrow a_1 = 4a_1$; $b_1 = 4b_1$ и $|a_1 - b_1| = 1 \Rightarrow$

$\Rightarrow b_1 = a_1 + 1$ так $a_1 \leq b_1 \Rightarrow b = 4a_1 + 4 = a + 4$. Подставим в (2):

$5(a+4) = \frac{a(a+4)}{4} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -4 \\ 5 = \frac{a}{4} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -4 \\ a = 20 \end{cases}$, но $a \in \mathbb{N} \Rightarrow a = 20$; $b = 24$, $\text{НОД}(20;24) = 4$

Эта пара подходит.



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

1
☐

2
☐

3
☐

4
☒

5
☐

6
☐

7
☐

СТРАНИЦА

2 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

2) ~~Симметричная система~~ ~~симметричная система~~

Заметим, что знаменная система симметрична относительно a и b . То есть если $(a; b)$ подходит, то $(b; a)$ подходит тоже. Следовательно если мы нашли все пары, где $(a_1 \leq b_1)$, то и все пары ~~где~~ $(b_1 \leq a_1)$ тоже подходят. Причем если $\exists$ решение $(x_0; y_0)$, где $x_0 \geq y_0$, то тогда мы должны были найти решение $(y_0; x_0)$ т.к. $y_0 \leq x_0$. А значит, что случай 2) ~~всё~~ a аналогичен уже рассмотренному и имеет решение

$$\begin{cases} b = 20 \\ a = 24 \end{cases} \quad \text{и} \quad \begin{cases} b = 5 \\ a = 7 \end{cases}$$

$$\text{Ответ: } \begin{cases} a = 5 \\ b = 7 \end{cases} ; \begin{cases} a = 20 \\ b = 24 \end{cases} ; \begin{cases} a = 7 \\ b = 5 \end{cases} ; \begin{cases} a = 24 \\ b = 20 \end{cases}$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.



СТРАНИЦА

1 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$(y + x^2 - 4x + 1)(x^2 - 2xy + 3y^2)(y - 2x + 1) = 0$. Это равенство 0, когда хотя бы одна из скобок 0, тогда преобразуем:

$$\begin{cases} y = -x^2 + 4x - 1 & (1) \\ y = 2x - 1 & (2) \\ (x - y)^2 + 2y^2 = 0 & (3) \end{cases}$$

Рассмотрим (3): $(x - y)^2 \geq 0$ и $2y^2 \geq 0 \Rightarrow$
 $\Rightarrow (x - y)^2 + 2y^2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x - y = 0 \\ 2y^2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow x = y = 0$

$$\begin{cases} y = -x^2 + 4x - 1 & (1) \\ y = 2x - 1 & (2) \\ y = x = 0 & (4) \end{cases}$$

Теперь рассмотрим второе условие:

$$y = (-2a + 4)x + a^2 - 1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow y = -2ax + 4x + a^2 - 1 = (a - x)^2 - x^2 + 4x - 1$$

То есть $\begin{cases} (y + x^2 - 4x + 1)(x^2 - 2xy + 3y^2)(y - 2x + 1) = 0 \\ y = (-2a + 4)x + a^2 - 1 \end{cases} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \begin{cases} y = (a - x)^2 - x^2 + 4x - 1 & (5) \\ y = -x^2 + 4x - 1 & (1) \\ y = 2x - 1 & (2) \\ y = x = 0 & (4) \end{cases}$ ~~Решим эту систему.~~ Будем решать эту систему. ~~Решим~~ Для этого должно выполняться (5) и что-то из (1); (2); (3). Пусть верно (1).

Если верно (1) и (5), то $y = (a - x)^2 - x^2 + 4x - 1 = -x^2 + 4x - 1 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow (a - x)^2 = 0 \Leftrightarrow a = x$. То есть точки $(a; -a^2 + 4a - 1)$ всегда удовлетворяют системе.

Пусть верно (4) и (5). Тогда $0 = a^2 - 1 \Leftrightarrow a = \pm 1$. Значит при $a = \pm 1$ системе удовлетворяет точка $(0; 0)$ или при каких других значениях a она не удовлетворяет.

~~Решим~~



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7



СТРАНИЦА

2 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Пусть ~~все~~ ~~справедливо~~ верны (2) и (5). Тогда

$$2x - 1 = a^2 + x^2 - 2ax - x^2 + 4x - 1 \Leftrightarrow a^2 = 2ax - 2x \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{a^2}{2(a-1)}. \text{ Такие точки существуют при всех } a, \text{ кроме } a=1, \text{ при}$$

$$a=1: \Leftrightarrow y = 1 + x^2 - 2x - x^2 + 4x - 1 = 2x \text{ и } 2x \neq 2x - 1 \Rightarrow (5) \neq (2).$$

Значит при всех ~~a~~ ~~равных~~ ~~1~~ существует решение $(\frac{a^2}{2(a-1)}, \frac{a^2}{a-1} - 1)$.

Иных других решений у системы быть не может, так система выполняется только если верно (1) или (2) или (4) и (5).

Спрашивается, когда решений ровно 2. Выпишем возможные решения:

$$(a, -a^2 + 4a - 1); (0; 0) \text{ (при } a = \pm 1); (\frac{a^2}{2(a-1)}, \frac{a^2}{a-1} - 1) \text{ при } a \neq 1.$$

Заметим, что ~~(a, -a^2 + 4a - 1)~~ ~~никогда~~ не совпадает с $(0; 0)$, как

$$\text{и } (\frac{a^2}{2(a-1)}, \frac{a^2}{a-1} - 1) \text{ тоже не совпадает с } (0; 0).$$

Узнаем при каких a совпадают решения $(a, -a^2 + 4a - 1)$ и $(\frac{a^2}{2(a-1)}, \frac{a^2}{a-1} - 1)$:

$$a = \frac{a^2}{2(a-1)} \Leftrightarrow \begin{cases} a=0 \\ 1 = \frac{a}{2(a-1)} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=0 \\ 2a-2=a \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a=0 \\ a=2 \end{cases}$$

$$\text{Так же при } a=0: -a^2 + 4a - 1 = 0 = \frac{a^2}{a-1} - 1$$

$$\text{при } a=2: -a^2 + 4a - 1 = 3 = \frac{a^2}{a-1} - 1$$

Значит при любых a , не равных $1; -1; 0; 2$ существует ровно 2 решение.

При $a=0$ и $a=2$ существует ровно 1 решение (при $a=0$ это $(0; -1)$ и при $a=2$ это $(2; 3)$)

При $a=1$ есть 2 решения $(1; 2)$ и $(0; 0)$

При $a=-1$ есть 3 решения: $(-1; -6); (0; 0)$ и $(-\frac{1}{4}; -\frac{1}{2} - 1)$

Ответ: $a \in (-\infty; -1) \cup (-1; 0) \cup (0; 2) \cup (2; +\infty)$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

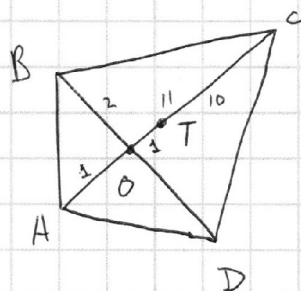
1 2 3 4 5 6 7
☐ ☐ ☐ ☐ ☐ ☐ ☒

СТРАНИЦА
 1 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Пусть $T \in \alpha(ABCD)$ и T — точка касания W с $\alpha(ABCD)$. Тогда в плоскости, проходящей через луч AP и T как касательная и секущая $AT^2 = AP \cdot AQ = \frac{2}{\sqrt{5}} \cdot 2\sqrt{5} = 4 \Rightarrow AT = 2$.

Вспомогательная, через луч CM и T как касательные к окружности и секущая $CT^2 = CM \cdot CN = 4\sqrt{5} \cdot 5\sqrt{5} = 100 \Rightarrow CT = 10$.



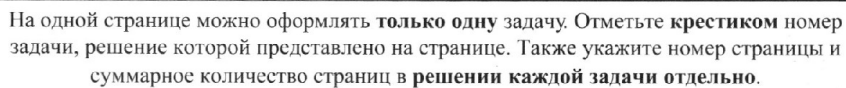
По условию диагональ $AC = AO + OC = 12$. Но $AT + TC = 10 + 2 = 12 \Rightarrow$ по чер-ву треугольника $T \in AC$, иначе $AT + TC > AC$.

~~Пусть W — центр сферы.~~ Пусть W — центр сферы.

Т.к. это прямая призма, то $W \in \alpha(A'B'C'D')$, $\alpha(A'B'C'D') \parallel \alpha(ABCD)$ и точки касания лежат в той же $\alpha(A'B'C'D')$. Потому что радиусы WX в точки касания перпендикулярны боковым кл-м, а $\Rightarrow$ параллельны основаниям. $A' \in AA_1$; $B' \in BB_1$ и т.д.

Рассмотрим $A'B'C'D'$; этот четырех-ик равен $ABCD$. ~~То есть~~ Окружность с центром W касается $A'B'$; $B'C'$; $C'D'$; $A'D'$. ~~Всегда~~, А её центр лежит на $A'C'$ (т.к. $TE \in AC$), а призма прямая. Но раз центр висс. окр-ти лежит на диагонали, то диагональ $A'C'$ — биссектриса $\angle B'C'D'$ и $\angle B'A'D'$. Тогда $\angle B'C'A' = \angle A'C'D'$; $\angle B'A'C' = \angle C'A'D' \Rightarrow \triangle A'B'C' = \triangle A'D'C'$. Тогда $B'O = OD' = 2$ по условию. $B'A' = A'D'$ ~~по 3-му~~ ~~рав-ва углов~~ $\Rightarrow A'O$ — медиана в равном $\triangle A'B'D' \Rightarrow A'O \perp B'D'$. Тогда $A'B' = \sqrt{5} = A'D'$; $B'C' = 5\sqrt{5} = C'D'$.

$S_{A'B'C'D'} = S_{ABCD} = S_{A'B'D'} + S_{C'B'D'} = \frac{2 \cdot 4}{2} + \frac{11 \cdot 4}{2} = 24$. Пусть R — радиус сферы. Т.к. окр-ть с радиусом R висает в $A'B'C'D'$, то $S_{A'B'C'D'} = P \cdot R$. $P = \text{полн. пер-тр} = 6\sqrt{5} \Rightarrow R = \frac{24}{6\sqrt{5}} = \frac{4}{\sqrt{5}}$. Тогда $V_{\text{призмы}} = h \cdot S$, где $h = 2R$ т.к. призма прямая $\Rightarrow V = 2R \cdot S = \frac{8}{\sqrt{5}} \cdot 24 = \frac{192}{\sqrt{5}}$.



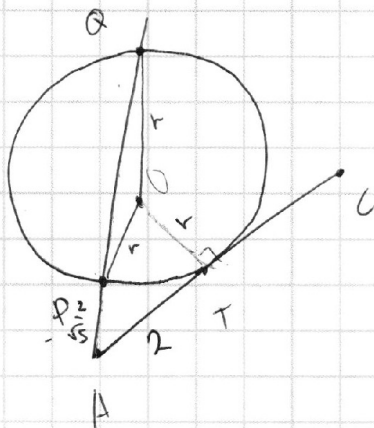
7

☒

СТРАНИЦА
2 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Теперь нужно найти $P(W; PAC)$. Рассмотрим ил-тв через Яремлю АТС и луг АР:



$$AQ = 255 = 244$$

$$AP = \frac{2}{\sqrt{5}} = \frac{P}{2}$$

$AQ =$

Ошбер: обзём крзмы $\frac{192}{\sqrt{5}}$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

1
☐2
☐3
☐4
☐5
☐6
☐7
☐СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\begin{matrix} x \neq 0 \\ x \neq 1 \\ y \neq 0 \\ y \neq 1 \end{matrix}$$

$$\frac{1}{y} = 0$$

$$3 \log_x 2 + \log_y 3 + 8 \log_x y = 0$$

$$\frac{3y+3}{y-1} < \frac{7x+7}{x-1}$$

$$y \leq 24$$

$$\frac{3(y+1)}{(y-1)} < \frac{7(x+1)}{(x-1)}$$

$$\frac{3}{3} \frac{x^3+1}{x^3-1} < \frac{7(x+1)}{x-1}$$

$$\frac{3(x+1)(x^2-x+1)}{(x-1)(x^2+x+1)} < \frac{7(x+1)}{(x-1)}$$

$$\left(\frac{x+1}{x-1} \right) \left(\frac{3x^2-3x+3}{x^2+x+1} - 7 \right) < 0$$

$$\frac{x+1}{x-1} \left(\frac{3x^2-3x+3-7x^2-7x+7}{x^2+x+1} \right) < 0$$

$$3 \log_x 3 + \log_y 3 + 8 \log_x y = 0$$

$$\frac{9}{\log_3 x} + \frac{1}{\log_3 y} - \frac{16}{\log_3 xy} = 0$$

$$\frac{16}{\log_3 x + \log_3 y}$$

$$\frac{9 \log_3 y + \log_3 x}{\log_3 x}$$

$$\frac{\log_3 y}{\log_3 x} = 3$$

$$\log_3 y = 3 \log_3 x$$

$$\log_3 y = \log_3 x^3$$

$$y = x^3$$

$$\frac{9}{a} + \frac{1}{b} - \frac{16}{a+b} = 0$$

$$\frac{9}{a} + \frac{1}{b} = \frac{16}{a+b}$$

$$\frac{9(a+b)}{a} + \frac{a+b}{b} = 16$$

$$9 + \frac{9b}{a} + \frac{a}{b} + 1 = 16$$

$$\frac{9b}{a} + \frac{a}{b} = 6$$

$$9t + \frac{1}{t} = 6$$

$$9t^2 + 1 - 6t = 0$$

$$9t^2 - 6t + 1 = 0$$

$$D = 36 - 36 = 0$$

$$(t-1)^2$$

$$t = 1$$

$$\frac{b}{a} = 3$$





На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Handwritten solutions for various geometry problems, including diagrams of cubes, spheres, and triangles, with calculations and labels.

Top left: $\frac{2\sqrt{5}}{5}$

Top right: $AQ = A$
 $(x-r)(x+r) = 4$

Left side: Diagram of a cube with points A, B, C, D, A₁, B₁, C₁, D₁. A circle is drawn below it.

Center: Diagram of a sphere with points P, Q, T, R. Calculations: $AT^2 = AP \cdot AQ$, $CT^2 = CH \cdot CN$, $4\sqrt{5} \cdot 5\sqrt{5} = 100$.

Right side: Diagram of a sphere with points N, T, M, C. Calculations: $(10-R)(10+R) = 100 - R^2$.

Bottom left: Diagram of a cube with points A, B, C, D, W, R, T, O. Calculations: $S = P \cdot R$, $h = 2R$, $V = \frac{2}{3}PR^2$.

Bottom center: Diagram of a triangle with points A, B, C, W, R, T. Calculations: $CT = 10$, $AT = 2$.

Bottom right: Diagram of a cube with points A, B, C, D, A', B', C', D', W, R, T, O. Calculations: $S = PR$, $x(x+2R) = 4 - R^2$, $(12-x-2R)(12-x) = 100 - R^2$.



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$f(x) = x^2 + bx + c$$

$$f(x) = -2x^2$$

$$x^2 + bx + c = -2x^2 \quad (1-v)x^2 = -v$$

$$3x^2 + bx + c = 0$$

$$D = b^2 - 12c = 0$$

$$b^2 = 12c$$

$$c = \frac{b^2}{12}$$

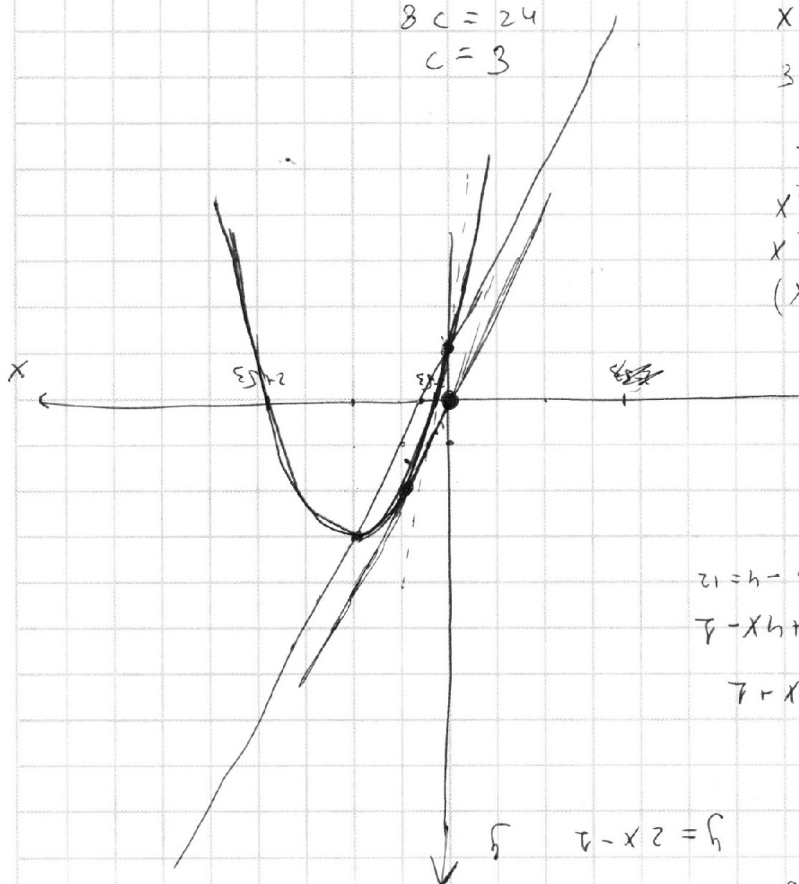
$$f(x) = -6$$

$$x^2 + bx + c + 6 = 0$$

$$D = b^2 - 4c - 24 = 0 = b^2 - 12c$$

$$8c = 24$$

$$c = 3$$



$$(0, 0) \rightarrow \text{точка пересечения}$$

$$f(x) = -6$$

$$\text{Сумма корней } f(x) = 0$$

$$\text{произведение корней}$$

$$b = -X$$

$$x^2 + bx + c = 0$$

$$D = b^2 - 4c = 8c = b^2 - \frac{b^2}{3} = \frac{2b^2}{3}$$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2}$$

$$x_1 + x_2 = \frac{-b + \sqrt{D} - b - \sqrt{D}}{2}$$

$$= \frac{-2b}{2} = -b$$

$$x^2 + 6x + 3$$

$$3x^2 + 6x + 3$$

$$3(x+1)^2$$

$$x^2 + 6x + 3 = -6$$

$$x^2 + 6x + 9 = 0$$

$$(x+3)^2$$

$$x = -3 \pm 0$$

$$x = -3$$

$$x = -3$$

$$x = -3$$

$$x = -3$$

$$x = -3$$

$$x = -3$$

$$x = -3$$

$$x = -3$$

$$x = -3$$

$$x = -3$$

$$x = -3$$

$$x = -3$$

$$x = -3$$

$$x = -3$$

$$x = -3$$

$$x = -3$$

$$x = -3$$

$$x^2 - 6x + 3$$

$$3x^2 - 6x + 3$$

$$3(x-1)^2$$

$$x^2 - 6x + 3 = -6$$

$$x^2 - 6x + 9 = 0$$

$$(x-3)^2$$

$$x = 3 \pm 0$$

$$x = 3$$

$$x = 3$$

$$x = 3$$

$$x = 3$$

$$x = 3$$

$$x = 3$$

$$x = 3$$

$$x = 3$$

$$x = 3$$

$$x = 3$$

$$x = 3$$

$$x = 3$$

$$x = 3$$

$$x = 3$$

$$x = 3$$

$$x = 3$$

$$x = 3$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

1
☐2
☐3
☐4
☐5
☐6
☐7
☐СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. **Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно.** Порча QR-кода недопустима!

$$4 \cdot \min(a; b) = 5(a-b)^2$$

$$5 \cdot \max(a; b) = \text{KOK}(a; b)$$

$$1) a \leq b$$

$$5b = \text{KOK}(a; b) \Rightarrow a : 5$$

$$\frac{a \cdot b}{\text{KOD}} = \frac{\text{KOK}}{\text{KOD}}$$

$$\frac{a \cdot b}{\text{KOD}} = 5b$$

$$a = 5 \cdot \text{KOD}$$

$$a = 5 \cdot \text{KOD}$$

$$a - b = \text{KOD}(a_1 - a_2)$$

$$4a = 5(a-b)^2$$

$$4 \text{KOD} = (a-b)^2$$

$$4a = 5a^2 + 5b^2 - 10ab$$

$$4 \text{KOD} = \text{KOD}^2 (b - a_1)^2$$

$$4 = \text{KOD} (b - a_1)^2$$

$$4 = \frac{1 \cdot 4}{2 \cdot 2}$$

$$4 \cdot 1$$

$$1) 4 = (b-a)^2 \Rightarrow b-a=2$$

$$b = a+2$$

$$5a+10 = a(a+2)$$

$$2) b_1 = a_1 + 1$$

$$b = 4b_1 = 4a_1 + 4$$

$$a = 4a_1$$

$$x^2 + x + 1$$

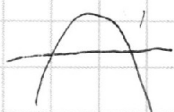
$$D = 1 - 4 < 0$$

$$-2(2x^2 + 5x + 2)$$

$$D = 25 - 4 \cdot 2 \cdot 2 = 9$$

$$x = \frac{-5 \pm 3}{4} \quad x = -2$$

$$x = -\frac{1}{2}$$





На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. **Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно.** Порча QR-кода недопустима!

$$\begin{cases} y = (a-x)^2 - x^2 + 4x - 1 \\ y = 2x - 1 \\ y = -x^2 + 4x - 1 \\ y = 0; x = 0 \end{cases}$$

$x = a$ всегда решение

при $a = \pm 1$ точка $(0; 0)$ подходит

$$x = \frac{-a^2}{2(1-a)} \text{ решение при } a \neq 1$$

если $a = 1$: $(1-x)^2 - x^2 + 4x - 1 = 2x - 1$

$$1 + x^2 - 2x - x^2 + 4x - 1 = 2x - 1$$

$$0 = -1$$

нет решений

при всех x верно:

$$a = 0$$

$$a = 2$$

$$a = 1$$

$$(a = 1)$$

$$2x - 1 = a^2 + x^2 - 2ax - x^2 + 4x - 1$$

$$a^2 - 2ax + 2x = 0$$

$$2x(1-a) + a^2 = 0$$

$$x = \frac{-a^2}{2(1-a)} \text{ это решение } \exists \text{ при } \forall a \neq 1$$

$$1) \frac{-a^2}{2(1-a)} = a$$

$$2) \frac{-a^2}{2(1-a)} = 0$$

$$a = 1 \quad 2 \text{ решения}$$

$$a = 2 \quad 1 \text{ решение}$$

$$a = 0 \quad 1 \text{ решение}$$

$$a = -1 : 3 \text{ решения}$$

у каждого всегда 2 решения

если $a = 0$

$$a \neq 0: \frac{-a}{2(1-a)} = 1$$

$$-a = 2 - 2a$$

$$a = 1$$

$$-a = 2 - 2a$$

$$2 = 2a - a$$

$$2 = a$$

$$x = \frac{-1}{4}$$

$$-1 \quad 0 \quad 1 \quad 2$$