

МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ



11 КЛАСС. Вариант 12

- [3 балла] Дан приведённый квадратный трёхчлен $f(x)$ такой, что уравнение $f(x) = -2x^2$ имеет единственное решение, а также уравнение $f(x) = -6$ имеет единственное решение. Найдите сумму корней уравнения $f(x) = 0$.
- [3 балла] Сколькими способами можно представить число $n = 5^{151} \cdot 7^{600}$ в виде произведения двух натуральных чисел x и y , где y делится на x ?
- [5 баллов] Найдите количество пар целых чисел $(x; y)$, удовлетворяющих системе

$$\begin{cases} 3 \log_x 27 + \log_y 3 + 8 \log_{xy} \frac{1}{9} = 0, \\ \frac{3y+3}{y-1} < \frac{7x+7}{x-1}, \\ y \leq 24. \end{cases}$$

- [5 баллов] Найдите все пары натуральных чисел $(a; b)$ такие, что

$$\begin{cases} 4 \cdot \min(a; b) = 5(a - b)^2, \\ 5 \cdot \max(a; b) = \text{НОК}(a; b). \end{cases}$$

- [5 баллов] На сторонах BA и BC треугольника ABC с тупым углом B как на диаметрах построены окружности ω_1 и ω_2 соответственно, пересекающиеся в точках B и D . Хорда BE окружности ω_1 перпендикулярна BC , а хорда BF окружности ω_2 перпендикулярна CE и касается ω_1 . Найдите отношение $BF : BD$, если $\cos \angle BCE = \frac{3}{4}$.

- [5 баллов] При каких значениях параметра a система

$$\begin{cases} (y + x^2 - 4x + 1)(x^2 - 2xy + 3y^2)(y - 2x + 1) = 0, \\ y = (-2a + 4)x + a^2 - 1 \end{cases}$$

имеет ровно 2 решения?

- [6 баллов] В прямую четырёхугольную призму $ABCDA_1B_1C_1D_1$ вписана сфера ω . Луч с началом в точке A пересекает ω точках P и Q , а луч с началом в точке C пересекает ω в точках M и N . Пусть O — точка пересечения диагоналей четырёхугольника $ABCD$. Найдите объём призмы $ABCDA_1B_1C_1D_1$ и расстояние ρ от центра ω до плоскости PAC , если известно, что $AO = 1$, $BO = 2$, $CO = 11$, $AP = \frac{2}{\sqrt{5}}$, $AQ = 2\sqrt{5}$, $CM = 4\sqrt{5}$, $CN = 5\sqrt{5}$.



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

1

2

3

4

5

6

7

СТРАНИЦА
1 из 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по **каждой из задач** **нумеруются отдельно**. Порча QR-кода недопустима!

$$1. \text{ Туcил } f(x) = x^2 + 6x + c$$

$$x^2 + 6x + c = -2x^2 \text{ ищем корни решения } \rightarrow$$

$$\Delta = 36 - 3c = 0$$

$$\Delta = b^2 - 4 \cdot 3 \cdot c = 0 \quad \text{т.к. решения симметричны}$$

$$b^2 = 12c \quad (1)$$

$$x^2 + 6x + c = -6$$

$$x^2 + 6x + c + 6 = 0 \text{ ищем одно решение}$$

$$\Delta = b^2 - 4(c+6) = 0$$

$$b^2 = 4(c+6) \quad (2)$$

Тогда из (1) и (2):

$$12c = 4(c+6)$$

$$3c = c+6$$

$$2c = 6$$

$$c = 3$$

$$\text{Тогда } b^2 = 36 \text{ из (1)} \Rightarrow b = \pm 6$$

По Th Виноградова: единственный корень $f(x) = 0$ это -6

\Rightarrow единственный корень -6

Ответ: 6 или -6

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

 1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА

1 из 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по **каждой из задач** нумеруются **отдельно**. Порча QR-кода недопустима!

$$2. n = s^{d_1} \cdot 7^{600} = x \cdot y, x, y \in \mathbb{N}$$
$$x = s^{d_1} \cdot 7^{\beta_1}, d_1, \beta_1, d_2, \beta_2 \geq 0 \in \mathbb{Z}$$
$$y = s^{d_2} \cdot 7^{\beta_2}$$

Число x таково, что $y : x \Rightarrow \begin{cases} d_2 \geq d_1 \\ \beta_2 \geq \beta_1 \end{cases}$

Тогда:

$$\left\{ \begin{array}{l} d_1 + d_2 = 151 \\ \beta_1 + \beta_2 = 600 \end{array} \right.$$

$$d_2 \geq d_1$$

$$\beta_2 \geq \beta_1$$

Замечаем, что d_2 и β_2 ограничены

d_1 и β_1 . Так как d_2 может принимать лишь 10

натуральные значения от 76 до 151, то есть 76

значения $d_2 \leq 75$, то $\beta_2 > d_2$

а также β_2 может принимать лишь 10

значения от 300 до 600, то есть $\beta_2 \leq 299$, то

$\beta_1 > \beta_2$, то есть 301

Тогда по условию существования такого натурального 76-го

Ответ: 22876



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

 1 2 3 4 5 6 7СТРАНИЦА
4 из 5

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. **Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно.** Порча QR-кода недопустима!

Генерные методы исключений:

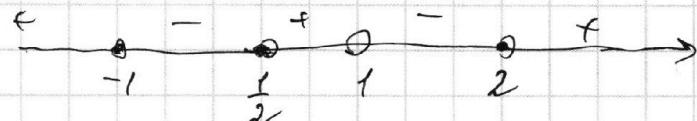
$$2y^2 - 5y + 2 = 0$$

$$\Delta = 25 - 2 \cdot 2 \cdot 4 = 9$$

$$y_{1,2} = \frac{5 \pm 3}{4}$$

$$y_1 = 2$$

$$y_2 = \frac{1}{2}$$



Относим с учётом

того, что $y \leq 2$ квадрат не может решений

на y , также, что $y > 3$ $\exists y \geq 2$

вырожденно.



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

1

2

3

4

5

6

7

СТРАНИЦА
5 ИЗ 5

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по **каждой из задач** нумеруются **отдельно**. Порча QR-кода недопустима!

Так же $x = y^3$, то все сокращаются
знаки у, x будем класть под окошко,
запишем позади все корни (y^3, y) . где у - это
номера всех чисел от 3 8024, то есть 22 решения
Ответ: 22 решения



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

- | | | | | | | |
|----------------------------|----------------------------|---------------------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|
| <input type="checkbox"/> 1 | <input type="checkbox"/> 2 | <input checked="" type="checkbox"/> 3 | <input type="checkbox"/> 4 | <input type="checkbox"/> 5 | <input type="checkbox"/> 6 | <input type="checkbox"/> 7 |
|----------------------------|----------------------------|---------------------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|

СТРАНИЦА
3 из 5

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по **каждой из задач** нумеруются **отдельно**. Порча QR-кода недопустима!

значит дескриптивно расмотрим когда числитель > 0

$$4(y^2 - 1) - 10y(y^2 - 1) > 0$$

$$4((y^2 - 1)(y^2 - 1)) - 10y(y^2 - 1) > 0$$

$$(y^2 - 1)(4y^2 + 4 - 10y) > 0$$

$$(y^2 - 1)(2y^2 - 5y + 2) > 0$$

Решим методом исключения:

$$2y^2 - 5y + 2 = 0$$

$$D = 25 - 2 \cdot 2 \cdot 4 = 9$$

$$y_{1,2} = \frac{5 \pm \sqrt{17}}{4}$$

хотя, что $\frac{5 + \sqrt{17}}{4} > 2$
~~то есть~~

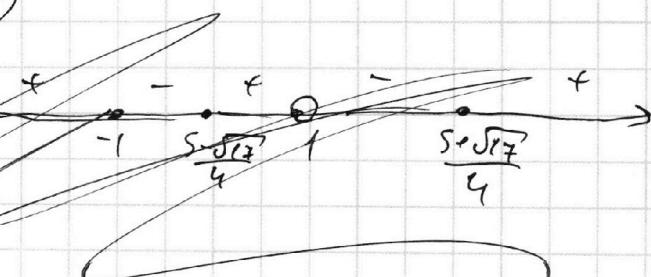
т.к. $5 + \sqrt{17} > 4$

$$\Rightarrow \frac{5 + \sqrt{17}}{4} > 2$$

$$0 < 5 - \sqrt{17} < 1 \Rightarrow \frac{5 - \sqrt{17}}{4} > 0$$

но с учетом, что $y \geq 0$, $y \leq 2$, то недостат

Мин. значение $2\sqrt{y} \geq 3$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.



- | | | | | | | |
|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |
|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|

СТРАНИЦА
2 из 5

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по **каждой из задач** нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\frac{3y^3}{y-1} < \frac{7+x^7}{x-1}$$

$$\frac{3y^3}{y-1} - \frac{7+x^7}{x-1} < 0$$

$$\frac{(3y^3)(x-1) - (7+x^7)(y-1)}{(y-1)(x-1)} < 0$$

$$\frac{10x - 10y - 4 + y + 4}{(x-1)(y-1)} < 0$$

представим $x = y^3$

$$\frac{10y^3 - 10y - 4y^4 + y^4}{(y^3 - 1)(y - 1)} < 0$$

$$\frac{4y^4 - 10y^3 + 10y - 4}{(y^3 - 1)(y - 1)} > 0$$

$$\frac{4(y^4 - 1) - 10y(y^2 - 1)}{(y^3 - 1)^2(y^2 + y + 1)} > 0$$

$(y-1)^2(y^3 + y + 1)$ не делит на знако т.к. $y^2 + y + 1$ - не делится

Насчит $\Rightarrow > 0$, $(y-1)^2 > 0$ на чье значение



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

- | | | | | | | |
|----------------------------|----------------------------|---------------------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|
| <input type="checkbox"/> 1 | <input type="checkbox"/> 2 | <input checked="" type="checkbox"/> 3 | <input type="checkbox"/> 4 | <input type="checkbox"/> 5 | <input type="checkbox"/> 6 | <input type="checkbox"/> 7 |
|----------------------------|----------------------------|---------------------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|

СТРАНИЦА
1 из 5

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по **каждой из задач** **нумеруются отдельно**. Порча QR-кода недопустима!

3. $\begin{cases} 3\log_x 27 + \log_y 3 + 8\log_y \frac{1}{9} = 0 & (1) \\ \frac{3y=3}{y-1} < \frac{3x=7}{x-1} & (2) \\ y \leq 24 & (3) \end{cases}$ Ограничения:
 $x > 0$
 $y > 0$
 $x \neq 1$
 $y \neq 1$
 $x+y \neq 1$

Преобразуем (1):

$$\frac{9}{\log_3 x} + \frac{1}{\log_3 y} = \cancel{\frac{16}{\log_3 x + y}}, \text{ при}$$

согласии выполнения ограничений. Такое преобразование возможно

$$\log_3 x = a, \log_3 y = b$$

$$\frac{9}{a} + \frac{1}{b} = \frac{16}{a+b}$$

$$\frac{9b+a}{ab} = \frac{16}{a+b}, ab \neq 0, a+b \neq 0, \text{ т.к. можно делить на них;}$$

$$(9b+a)(a+b) = 16ab$$

$$9ab + ab^2 + a^2b + 9b^2 - 16ab = 0$$

$$(3b-a)^2 = 0$$

$$\Rightarrow a = 3b$$

$$\log_3 x = 3\log_3 y, \text{ тогда } x = y^3$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.



- | | | | | | | |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|---------------------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|
| <input type="checkbox"/> 1 | <input type="checkbox"/> 2 | <input type="checkbox"/> 3 | <input checked="" type="checkbox"/> 4 | <input type="checkbox"/> 5 | <input type="checkbox"/> 6 | <input type="checkbox"/> 7 |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|---------------------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|

СТРАНИЦА
2 из 3

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются **отдельно**. Порча QR-кода недопустима!

$S \cdot \text{HOD}(a, b) = 6$, значит возможны лишь случаи:

$$b = S, \quad b = 10, \quad b = 20$$

Посмотрим через значение a какое значение b может принять.

$$4b = Sa^2 - 10ab + Sb^2$$

$$Sa^2 - 10ab + Sb^2 - 4b = 0$$

$D = 100b^2 - 4 \cdot S \cdot (Sb^2 - 4b) = 16 \cdot Sb$, так как

a и b натуральные, то решение возможно лишь

если $D = k^2$, где $k \in \mathbb{Z}$, а также если $S \in \mathbb{N}$, то

a будет целочисленным.

$$16 \cdot Sb = k^2$$

$$Sb = \left(\frac{k}{4}\right)^2 \Rightarrow Sb = z^2, \quad z \in \mathbb{Z}, \quad \text{то такое}$$

возможны лишь при $b = 5$ и $b = 20$ т.к. при $b = 10$:

$Sb = z^2$, что неверно.

$$\begin{aligned} 1) \quad & b = 5 \Rightarrow a = \sqrt{10b + \sqrt{64}} \\ & \text{или } a = \sqrt{10b - \sqrt{64}} \\ 2) \quad & b = 20 \Rightarrow a = \sqrt{10b + \sqrt{83}} \\ & \text{или } a = \sqrt{10b - \sqrt{83}} \end{aligned}$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи **отдельно**.

- | | | | | | | |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

СТРАНИЦА
1 из 3

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач **нумеруются отдельно**. Порча QR-кода недопустима!

4. Значит, что любые задания симметричны

относительно a и b , при чём если $a=b$, то
 $\text{НОК}(a, b) = a = b$, но тогда будущая система

превращается в равенство $5a = a$, откуда $a=0$,

но $a \neq 0$ не удовлетворяет. Значит, рассмотрим

случай, когда $a > b$, тогда $\min(a, b) = b$, $\max(a, b) = a$

Тогда $\text{НОД}(a, b) = d$

Тогда из того что $4b = 5(a-b)$

значит, что $a \vdots d$, $b \vdots d \Rightarrow a-b \vdots d \Rightarrow$

П. Ч. $\vdash d^2 \Rightarrow 4b \vdash d^2$, но если $d = \text{НОД}(a, b)$, то

$b = k d$, где $\text{НОД}(kd) = 1 \Rightarrow 4k \vdash d \Rightarrow d \mid d$

$d \mid d \Rightarrow \text{НОД}(a, b)$ может быть только либо

1, 2, 4.

Таким образом получаем в системе:

$5a = \text{НОК}(a, b)$, так как известно $\text{НОК}(a, b) \cdot \text{НОД}(a, b) = ab$

$$\Rightarrow \text{НОК}(a, b) = \frac{ab}{\text{НОД}(a, b)}$$

Тогда: $5a = \frac{ab}{\text{НОД}(a, b)}$, $a > 0 \Rightarrow$ деление на a ;

а делится на $\text{НОД}(a, b)$;

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении **каждой** задачи **отдельно**.

 1 2 3 4 5 6 7СТРАНИЦА
3 ИЗ 3

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач **нумеруются отдельно**. Порча QR-кода недопустима!

$$1) b=5: \Rightarrow a = \frac{10 \cdot 5 \pm \sqrt{16 \cdot 25}}{10} = 5 \pm \frac{20}{10} =$$

$$5 \pm 2 \Rightarrow a = 7$$

$a > 3 < b$, тогда ясно, что оба
решения

уравнение смысла сопутствующее при $a=7$

$$\text{т.к. } \text{HOD}(a, b) = 1$$

$$2) b=20: \quad a = \frac{10 \cdot 20 \pm \sqrt{16 \cdot 25 \cdot 4}}{10} =$$

$$= 20 \pm \frac{40}{10} \Rightarrow \text{тогда } a = 24$$

$a = 16 < b$ - пренебрежим

Когда $a = 24$, второе уравнение тоже имеет смысл

$$\text{т.к. } \text{HOD}(a, b) = 4$$

Аналогичного разбуждения для $b > a$, когда
поднимается смыслу значение b или

$$\text{Ответ: } (5; 7), (7; 5), (20; 24), (24; 20)$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

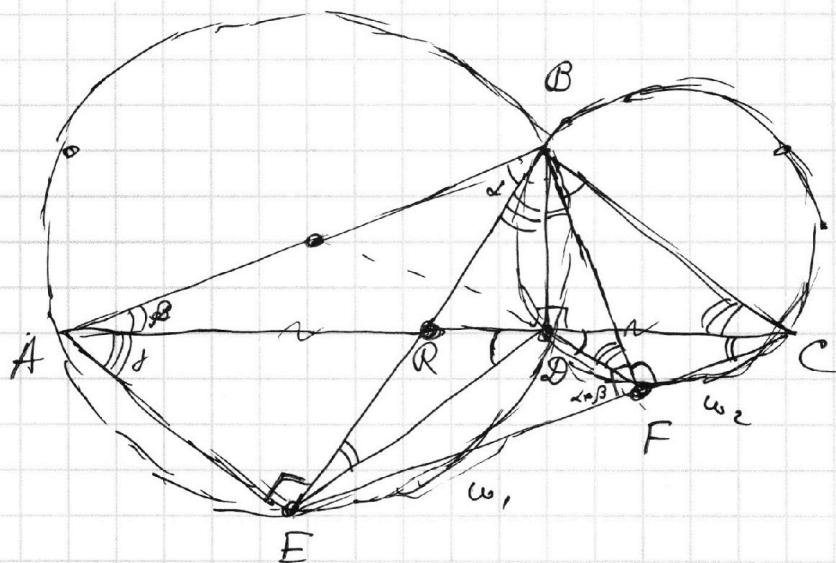
- | | | | | | | |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|---------------------------------------|----------------------------|----------------------------|
| <input type="checkbox"/> 1 | <input type="checkbox"/> 2 | <input type="checkbox"/> 3 | <input type="checkbox"/> 4 | <input checked="" type="checkbox"/> 5 | <input type="checkbox"/> 6 | <input type="checkbox"/> 7 |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|---------------------------------------|----------------------------|----------------------------|

СТРАНИЦА
1 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по **каждой из задач** **нумеруются отдельно**. Порча QR-кода недопустима!

Решение! Имеем $\angle BAD = \beta$, $\angle EAD = \gamma$, $\angle ABE = \alpha$,

Тогда Т.к. $\angle AEB = 90^\circ$ (исходный отмечено на рисунке), то $\alpha + \beta + \gamma = 90^\circ$



$\angle EAD = \angle EBD = \gamma$, $\angle BDF = \angle BDE = \beta$

$\angle BAD = \angle DBF = \beta$ (угол окружности при вершине отсекающей дуги) , $\angle DBF = \angle DCF$, $\angle FBC = 90^\circ$,
 $\alpha + \beta + \gamma = 90^\circ \Rightarrow \angle FBC = \alpha$

По формуле косинуса имеем. Д: $BD = \sqrt{BR \cdot BC}$

, $BF = BC \cdot BE$
 $\frac{1}{EC}$, $\angle AEB = 90^\circ = \angle EBC \Rightarrow AE \perp BC$,

$\angle ABE = \angle BEF = 90^\circ - \angle EDF \Rightarrow AB(EF) = AB(BC)$
 $AB(BC) -$ отмечено

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

- | | | | | | | |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|
| <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|

СТРАНИЦА
1 из 3

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по **каждой из задач** **нумеруются отдельно**. Порча QR-кода недопустима!

$$6. \begin{cases} (y + x^2 - 4x + 1)(x^2 - 2xy + 3y^2)(y - 2x + 1) = 0 \\ y = (-2a+4)x + a^2 - 1 \end{cases}$$

Что получаем:

$$\left\{ \begin{array}{l} y + x^2 - 4x + 1 = 0 \quad (1) \\ x^2 - 2xy + 3y^2 = 0 \quad (2) \\ y - 2x + 1 = 0 \quad (3) \end{array} \right.$$

$$y = (-2a+4)x + a^2 - 1$$

$$(2) \quad x^2 - 2xy + 3y^2 = (x-y)^2 + 2y^2 = 0, \text{ значит } 2y^2 \geq 0, \quad (x-y)^2 \geq 0 \Rightarrow \text{решение } \text{единственное}$$

иметь вид $y = x = 0$

$$(1) \quad \text{получим } y = (-2a+4)x + a^2 - 1;$$

$$x^2 - 4x + 1 + a^2 - 1 - 2ax + 4x = 0$$

$$x^2 - 2ax + a^2 = 0$$

$(x-a)^2 = 0$, значит решений лишь один

$$x = a.$$

$$(3) \quad \text{получим } y = (-2a+4)x + a^2 - 1;$$

$$-2ax + 4x + a^2 - 1 - 2x + 1 = 0$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.



- | | | | | | | |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|
| <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|

СТРАНИЦА
3 из 3

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по **каждой из задач** нумеруются **отдельно**. Порча QR-кода недопустима!

2) $a = -1$, тогда (2) имеет решение $x = y = 0$,

если (1) имеет решение $x = -1$, а

(3) имеет решение при $\frac{a^2}{2(a-1)} = \frac{1}{4} = x$,

досто, что учителя разделил $\Rightarrow a = -1$, не будем
+ 1. решения 3

3) если $a \neq \pm 1$, то (2) не имеет решений,

(1) имеет решения при $x = a$, а (3) имеет

решение при $x = \frac{a^2}{2(a-1)}$, значит система будет

иметь 2 решения если решения (1) и (3) различны,

то это не подходит для a : $a = \frac{a^2}{2(a-1)}$,

решим это уравнение:

$a = 0$ - решение, если $a \neq 0$, то подходит для a :

$$\frac{a^2}{2(a-1)} = 1, a \neq 1 \Rightarrow \text{множество решений } a \neq 2(a-1)$$

$$a = 2a - 2 \Rightarrow a = 2$$

значит не подходит для $a = 0, a = 2, a = -1$

Ответ: $a \in (-\infty; -1) \cup (0; 2) \cup (2; +\infty)$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

- | | | | | | | |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

СТРАНИЦА
2 из 3

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$a^2 - 2ax + 2x = 0$$

$$a^2 = x(2a - 2), \text{ если } a \neq 1, \text{ т.д.}$$

$a=0$, что невозможно, б) уравнение имеет корни если $a \neq 1$,

т.о. можем поделить на $2a-2$:

$$x = \frac{a^2}{2(a-1)}$$

Рассмотрим несколько случаев:

1) $a=1 \Rightarrow$ (3) не имеет решений, т.к. x

(1) единственное решение $x=1$, а т.к. имеем

решение $x=y=0$, тогда $y = (-2a+4)x + a^2 - 1 = 0 + 1 - 1 = 0$

(замечание: из второго уравнения получаем y в виде

функции, что y выражается через x , поэтому

функция y для $x=1$ равна 0.

Замечание, что решение (2) $x=y=0$ достигается

также при $a=\pm 1$ (если $a=1$ выше разобрано) т.к.

тогда б) для уравнение имеет корень $a^2 = 1$.



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

1

2

3

4

5

6

7

СТРАНИЦА
ИЗ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач **нумеруются отдельно**. Порча QR-кода недопустима!

$$\frac{3y+3}{y-1} < \frac{7x+7}{x-1}$$

$$\frac{(3y+3)(x-1) - (7x+7)(y-1)}{(x-1)(y-1)} < 0$$

$$3xy - 3y^2 + 3x - 3 - 7xy - 7x^2 - 7y + 7 = \\ = 10x - 10y - 4y^2 + 4 < 0$$

$$10y^3 - 10y - 4y^2 - 4 < 0 \quad | : 4$$

$$\frac{10}{4}y^3 - \frac{10}{4}y - \frac{4}{4}y^2 - 1 < 0$$

y^3 (



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

- | | | | | | | |
|----------------------------|----------------------------|---------------------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|
| <input type="checkbox"/> 1 | <input type="checkbox"/> 2 | <input checked="" type="checkbox"/> 3 | <input type="checkbox"/> 4 | <input type="checkbox"/> 5 | <input type="checkbox"/> 6 | <input type="checkbox"/> 7 |
|----------------------------|----------------------------|---------------------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|

СТРАНИЦА
ИЗ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по **каждой из задач** нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$3 \log_x 27 + \log_y 3 + 8 \log_y \frac{1}{9} = 0 \quad | \quad \text{Oyu:}$$

$$\frac{3y+3}{y-1} < \frac{7x+7}{x-1}$$

$$y \leq 24$$

$$x > 0$$

$$y > 0$$

$$x \neq 1$$

$$y \neq 1$$

$$xy \neq 1$$

$$3 \log_x 3^3 = 9 \log_x 3 + \log_y 3 + 8 \log_y 3^{-2}$$

$$9 \log_x 3 + \log_y 3 - 16 \log_y 3 = 0$$

$$\log_x 3 = \log_3$$

$$\log_x 3 = \frac{1}{\log_3 x}$$

$$\frac{9}{\log_3 x} + \frac{1}{\log_y 3} = \frac{16}{\log_x y}$$

$$\frac{9}{a} + \frac{1}{b} = \frac{16}{a+b}$$

$$\log_a b = \frac{\log_c b}{\log_c a}$$

$$\frac{3y+3}{y-1} = \frac{7x+7}{x-1}$$

$$\frac{3y+3}{y-1} - \frac{7x+7}{x-1} = 0$$

$$\frac{3(y+1)(x-1) - 7(x+1)(y-1)}{(y-1)(x-1)} = 0$$

$$3(xy+x-y-1) - 7(xy+4x-4y+4) = 0$$

$$= 3xy+3x-3y-3 - 7xy-7y+7x+7$$

$$-4xy+10x-10y+4$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

- | | | | | | | |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|
| <input type="checkbox"/> 1 | <input type="checkbox"/> 2 | <input type="checkbox"/> 3 | <input type="checkbox"/> 4 | <input type="checkbox"/> 5 | <input type="checkbox"/> 6 | <input type="checkbox"/> 7 |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|

СТРАНИЦА
ИЗ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. **Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно.** Порча QR-кода недопустима!

$$y - 2x^2 + 1 = 0$$

$$y = (-2\alpha^2 + 1)x^2 + \alpha^2 - 1$$

$$-2\alpha x + \alpha x + \alpha^2 - 1 = 0$$

$$\alpha^2 - 2\alpha x + 1 = 0$$

$$\alpha^2 - 2\alpha x + 2x = 0$$

Мы имеем:

$$(1) \quad x = \alpha \Rightarrow \text{решение} \quad \begin{array}{r} 21 \\ 22876 \end{array}$$

$$(2) \quad x = y = 0 \Rightarrow \text{решение} \quad \begin{array}{r} 30 \\ 36 \\ \hline 1806 \end{array} \quad \alpha^2 - 1 = 0 \quad \alpha = \pm 1$$

$$(3) \quad \text{если } \alpha = 1 \Rightarrow \text{нет решений},$$

$$\text{такие } \alpha \neq 1, 20 \quad \frac{\alpha^2}{2(\alpha-1)}$$

$$\text{также если } x = -1$$

$$\begin{array}{r} 151 \\ -15 \\ \hline 76 \end{array}$$

$$\text{также } \alpha \geq 0$$

$$22 < 27 \Rightarrow 27$$

$$76 \geq 151$$

$$08 < 190$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

- | | | | | | | |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|
| <input type="checkbox"/> 1 | <input type="checkbox"/> 2 | <input type="checkbox"/> 3 | <input type="checkbox"/> 4 | <input type="checkbox"/> 5 | <input type="checkbox"/> 6 | <input type="checkbox"/> 7 |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|

СТРАНИЦА
ИЗ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по **каждой из задач** **нумеруются отдельно**. Порча QR-кода недопустима!

$$\begin{cases} \textcircled{1} b^2 - 4(a+2) \cdot 3a = 0 \\ \textcircled{2} b^2 - 4a(6+3a) = 0 \end{cases} \quad \left| \begin{array}{l} y^3(10-4y) - (10y-4) \\ \cancel{xy} \quad 1 - \text{допуск} \end{array} \right.$$

$$b^2 - 12(a+2)a = 0 \Rightarrow b^2/12(a^2+2a) = 0$$

$$b^2/12a^2 - 12 - \frac{24}{a} = 0 \quad | :a^2$$

$$y \leq 2x$$

$$b^2 = 8a^2$$

$$\frac{b^2}{a^2} = 8 \quad \frac{b^2}{a^2} - 12 - \frac{24}{a} = 0$$

$$b^2 = 24a - 12a^2 = 0$$

Решение. Определитель $\Rightarrow a = 1$

$$n = 5^{151} \cdot 2^{600} = x \cdot y, \quad y : x$$

$$x = 5^{\alpha_1} \cdot 2^{\beta_1}$$

$\cos(\alpha)$

$$y = 5^{\alpha_2} \cdot 2^{\beta_2} \quad \left\{ \begin{array}{l} \alpha_2 > \alpha_1 \\ \beta_2 > \beta_1 \end{array} \right.$$

$$\alpha_1 + \alpha_2 = 151$$

$$\beta_1 + \beta_2 = 600$$

При искомых синхронных
значениях α_1 и α_2

$$\frac{BF}{BD} = ? \quad \cos BCF = \frac{3}{4}$$

значимые углы

$$\frac{BF}{BC} = 2$$

$$\frac{BF}{FC} = y$$

второй способ $\triangle BDF$?

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.



СТРАНИЦА
ИЗ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по **каждой из задач** **нумеруются отдельно**. Порча QR-кода недопустима!

1. $f(x)$

$$f(x) = -2x^2 \text{ имеет одно решение} \quad a^2 - x(2a - 2) = 0$$

$$f(x) = -6 \text{ имеет одно решение} \quad a^2 = x(2a - 2)$$

Задачи?

$$f(x) = ax^2 + bx + c$$

$$ax^2 + bx + c = -2x^2 \Rightarrow \text{нашлось } 2 \text{ решения}$$

$$ax^2 + bx + c = -6 - \text{нашлось 2 решения}$$

$$D=6(-1) \quad x^2(a+2) + bx + c = 0$$

$$2) \quad ax^2 + bx + (c+6) = 0$$

$$1) \quad b^2 - 4(a+2)c = 0$$

$$b^2 - 4a(c+6) = 0$$

$$4(a+2)c = 4a(c+6)$$

$$(a+2)c = a(c+6)$$

$$ac + 2c = ac + 6a$$

$$\boxed{c = 3a}$$

$$\frac{6}{a} - ?$$

$$b = 2(a+2)c$$

$$a = 1:$$

$$y \text{ бокал}$$

$$y \text{ небо } x=1$$

я гравюру нашу

таки $a = -1$

\rightarrow



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

 1 2 3 4 5 6 7СТРАНИЦА
ИЗ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по **каждой из задач** нумеруются **отдельно**. Порча QR-кода недопустима!

$$\begin{cases} 4b = s(a-b)^2 \\ s a = 2ab(a+b) \end{cases}$$

$$4b = sa^2 - 10ab + b^2$$

$$sa^2 - 10ab + sb^2 - 4b = 0$$

$$D = 100b^2 - 4 \cdot s(s b^2 - 4b) = 4ab$$

$$100b^2 - 100b^2 + 16 \cdot s \cdot b$$

$$sb = a^2$$

$$b = \text{коэф.} \cdot s$$

и
коэф.
число
из

нужен, у него $ROD = d \Rightarrow$

$$\text{у Р.7. коэф} \geq 0 \quad d^2$$

$y : ROD$

$$sa = \frac{ab}{ROD}$$

$$s \cdot ROD = b$$

$$\Rightarrow b \leq 20$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

- | | | | | | | |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|
| <input type="checkbox"/> 1 | <input type="checkbox"/> 2 | <input type="checkbox"/> 3 | <input type="checkbox"/> 4 | <input type="checkbox"/> 5 | <input type="checkbox"/> 6 | <input type="checkbox"/> 7 |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|

СТРАНИЦА
_ ИЗ _

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по **каждой из задач** нумеруются **отдельно**. Порча QR-кода недопустима!

$$\left\{ \begin{array}{l} 4. \min(a; b) = s(a-b)^2 \\ s \max(a; b) = \text{HOK}(a; b) \end{array} \right.$$

ВСЕГДА

$$s(\max a; b) = \text{HOK}(a; b)$$

меньше
к шагам

тогда если $a=b \Rightarrow \text{HOK} = a=b$

иначе $a>b$

$$\left\{ \begin{array}{l} 4b = s(a-b)^2 \\ s a = \text{HOK}(a; b) \end{array} \right.$$

$$\text{HOK} = \frac{a; b}{\text{НОД}}$$

$$s a = \frac{a; b}{\text{НОД}}$$

$$b = s \text{НОД}(a; b)$$

$$4b = sa^2 - 10ab + sb^2$$

то есть всегда a
меньше чётного большего,
также b четное
 s нечётное

$$b : s$$

$$(a-b) : \boxed{s \cdot n}$$

$$x^2 - 6x + 3$$

$$3x^2 + 6x + 3$$

$$3x^2 - 6x + 3$$

$$x^2 - 6x + 9$$

$$x^2 - 6x + 9$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

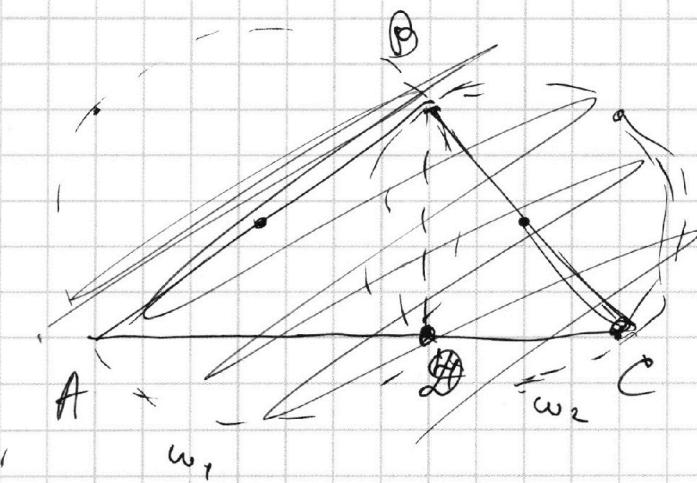
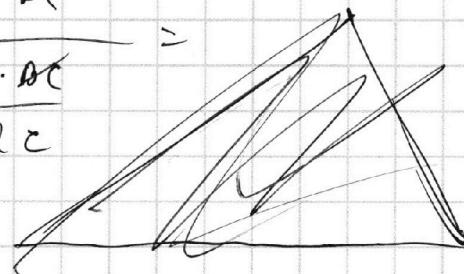
 1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
2 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. **Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно.** Порча QR-кода недопустима!

~~3.~~ $\Rightarrow BR = \frac{1}{2} BE, RC = \frac{1}{2} AC$

$$\Rightarrow \frac{BF}{BD} = \frac{\frac{BE - BR}{EC}}{\frac{BR \cdot AC}{RC}} =$$





На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

- | | | | | | | |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|
| <input type="checkbox"/> 1 | <input type="checkbox"/> 2 | <input type="checkbox"/> 3 | <input type="checkbox"/> 4 | <input type="checkbox"/> 5 | <input type="checkbox"/> 6 | <input type="checkbox"/> 7 |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|

СТРАНИЦА
_ ИЗ _

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по **каждой из задач** **нумеруются отдельно**. Порча QR-кода недопустима!

$$6. \left\{ \begin{array}{l} (y - x^2 - 4x + 4)(x^2 - 2xy + 3y^2)(y - 2x + 1) = 0 \\ y = (-2x + 4)x - x^2 - 1 \end{array} \right.$$

ищем 2 решения

$$\begin{aligned} & x^2 - 2xy - x(-2y) + 3y^2 \\ & x^2 - 2xy + y^2 = (-x - y)^2 + 2y^2 \Rightarrow \text{решение } x = y = 0 \end{aligned}$$

некоторые бессмыслица

$$y \neq y$$

$$(-2x + 4)x - x^2 - 1 + x^2 - 4x + 1$$

$$\begin{aligned} & x^2 - 4x + 1 - 2x + 4x - x^2 - 1 \\ & (x - 1)^2 = 0 \quad \Rightarrow \text{решение} \end{aligned}$$

$$\text{или } (-2x + 4)x - x^2 - 1 - 2x - 1$$

$$\log_3 x + \log_3 y = \log_3 xy$$

$$\log_3 x = 3 \cdot \log_3 y$$

$$\log_3 x = \log_3 y^3$$

$y = 1$ - кривь

$$4(y - 1) - 10y(y^2 - 1)$$

$$(y - 1)(y^2 + y + 1)$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

 1 2 3 4 5 6 7СТРАНИЦА
_ ИЗ _

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по **каждой из задач** **нумеруются отдельно**. Порча QR-кода недопустима!

$$\frac{2}{a} + \frac{1}{b} = \frac{16}{ab}$$

$$5 + \sqrt{49} > 9$$

$$\frac{96-a}{ab} = \frac{16}{a+b}$$

$$2y^2$$

$$2y^2 - 5y + 2 > 0$$

$$(2b-a)(a+b) = 16ab$$

$$D = 25 -$$

$$9ab + 2b^2 - a^2 - ab = 16ab$$

$$2b^2 - a^2 - 6ab = 0$$

$$\begin{array}{r} 15 \\ \times 26 \\ \hline 75 \end{array}$$

$$(2b-a)^2 =$$

$$(3b-a)^2 = 0$$

$$3b = a$$

$$d_2 = 876$$

от 1 до 25

76

от 3 до 44

75

1-24

от 81 до 151

76

6, 7, 8, 9, 0

5 + 7 = 12

от 300 до 600



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

 1 2 3 4 5 6 7СТРАНИЦА
_ ИЗ _

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по **каждой из задач** нумеруются **отдельно**. Порча QR-кода недопустима!

№ 280 Н. Михеев

№ 2 Н. Михеев

$$\angle BCF = 90^\circ$$

$$45^\circ = 360$$

Всё ясно

$$\cos \alpha \cos \beta$$

$$\alpha + \beta = 90^\circ - f$$

$$21 \text{ задача} \quad \beta + \alpha + 180^\circ - f = 180^\circ$$

если известно

$$180 - 2f$$

$$\cos(\alpha + \beta) = \cos(90^\circ - f)$$

$$180^\circ - 2f + 2\alpha + \beta =$$

$$\cos \sin f = 180 + 5^\circ - 2f$$

Число ~ 70 Удивительно

$\alpha + \beta$ указан

одно значение
расходится

$$\frac{AE}{\sin \alpha} = AB$$

$$BF = AE \cdot \sin(\beta + f)$$

$$\frac{BC}{\sin \alpha} = AB \Rightarrow BC = AB \cdot \sin \alpha$$

но число и число ~ 70 не

не согласованы



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

1

2

3

4

5

6

7

СТРАНИЦА

ИЗ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. **Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно.** Порча QR-кода недопустима!



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

1

2

3

4

5

6

7

СТРАНИЦА
_ ИЗ _

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. **Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно.** Порча QR-кода недопустима!



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

1

2

3

4

5

6

7

СТРАНИЦА
ИЗ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. **Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно.** Порча QR-кода недопустима!