



МОСКОВСКИЙ  
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ  
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"  
ПО МАТЕМАТИКЕ

11 КЛАСС. Вариант 12



1. [3 балла] Дан приведённый квадратный трёхчлен  $f(x)$  такой, что уравнение  $f(x) = -2x^2$  имеет единственное решение, а также уравнение  $f(x) = -6$  имеет единственное решение. Найдите сумму корней уравнения  $f(x) = 0$ .
2. [3 балла] Сколькими способами можно представить число  $n = 5^{151} \cdot 7^{600}$  в виде произведения двух натуральных чисел  $x$  и  $y$ , где  $y$  делится на  $x$ ?
3. [5 баллов] Найдите количество пар целых чисел  $(x; y)$ , удовлетворяющих системе

$$\begin{cases} 3 \log_x 27 + \log_y 3 + 8 \log_{xy} \frac{1}{9} = 0, \\ \frac{3y+3}{y-1} < \frac{7x+7}{x-1}, \\ y \leq 24. \end{cases}$$

4. [5 баллов] Найдите все пары натуральных чисел  $(a; b)$  такие, что

$$\begin{cases} 4 \cdot \min(a; b) = 5(a - b)^2, \\ 5 \cdot \max(a; b) = \text{НОК}(a; b). \end{cases}$$

5. [5 баллов] На сторонах  $BA$  и  $BC$  треугольника  $ABC$  с тупым углом  $B$  как на диаметрах построены окружности  $\omega_1$  и  $\omega_2$  соответственно, пересекающиеся в точках  $B$  и  $D$ . Хорда  $BE$  окружности  $\omega_1$  перпендикулярна  $BC$ , а хорда  $BF$  окружности  $\omega_2$  перпендикулярна  $CE$  и касается  $\omega_1$ . Найдите отношение  $BF : BD$ , если  $\cos \angle BCE = \frac{3}{4}$ .
6. [5 баллов] При каких значениях параметра  $a$  система

$$\begin{cases} (y + x^2 - 4x + 1)(x^2 - 2xy + 3y^2)(y - 2x + 1) = 0, \\ y = (-2a + 4)x + a^2 - 1 \end{cases}$$

имеет ровно 2 решения?

7. [6 баллов] В прямую четырёхугольную призму  $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$  вписана сфера  $\omega$ . Луч с началом в точке  $A$  пересекает  $\omega$  в точках  $P$  и  $Q$ , а луч с началом в точке  $C$  пересекает  $\omega$  в точках  $M$  и  $N$ . Пусть  $O$  — точка пересечения диагоналей четырёхугольника  $ABCD$ . Найдите объём призмы  $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$  и расстояние  $\rho$  от центра  $\omega$  до плоскости  $PAC$ , если известно, что  $AO = 1$ ,  $BO = 2$ ,  $CO = 11$ ,  $AP = \frac{2}{\sqrt{5}}$ ,  $AQ = 2\sqrt{5}$ ,  $CM = 4\sqrt{5}$ ,  $CN = 5\sqrt{5}$ .



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☒ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА  
1 из 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

1. Пусть  $F(x) = x^2 + bx + c$

$x^2 + bx + c = -2x^2$  имеет ~~одно~~ решение  ~~$\Rightarrow$~~

~~$\Rightarrow$~~   $3x^2 + bx + c = 0$

$\Delta = b^2 - 4 \cdot 3 \cdot c = 0$  т.к. решение единственное

$b^2 = 12c$  (1)

$x^2 + bx + c = -6$

$x^2 + bx + c + 6 = 0$  имеет ~~одно~~ решение

$\Delta = b^2 - 4(c + 6) = 0$

$b^2 = 4(c + 6)$  (2)

Тогда из (1) и (2):

$12c = 4(c + 6)$

$3c = c + 6$

$2c = 6$

$c = 3$

Тогда  $b^2 = 36$  из (1)  $\Rightarrow b = \pm 6$

По Th Виета: сумма корней  $F(x) = 0$  это  $-b$

$\Rightarrow$  сумма  $\text{эт } 0 \neq 6$

Отв:  $b = -6$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

1 ☐ 2 ☒ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА  
1 из 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$2. \quad n = 5^{51} \cdot 7^{600} = x \cdot y, \quad x, y \in \mathbb{N}$$

$$x = 5^{\alpha_1} \cdot 7^{\beta_1} \\ y = 5^{\alpha_2} \cdot 7^{\beta_2}, \quad \alpha_1, \beta_1, \alpha_2, \beta_2 \geq 0 \in \mathbb{Z}$$

при этом так как  $y : x \Rightarrow \begin{cases} \alpha_2 \geq \alpha_1 \\ \beta_2 \geq \beta_1 \end{cases}$

Тогда:

$$\begin{cases} \alpha_1 + \alpha_2 = 51 \\ \beta_1 + \beta_2 = 600 \\ \alpha_2 \geq \alpha_1 \\ \beta_2 \geq \beta_1 \end{cases}$$

Заметим, что по  $\alpha_2 \leq \beta_2$  однозначно определяются

$\alpha_1$  и  $\beta_1$ . Также  $\alpha_2$  может принимать лишь те натуральные значения от 76 до 151, если же 76

иначе если  $\alpha_2 \leq 75$ , то  $\beta_2 > \alpha_2$

А также  $\beta_2$  может принимать лишь натуральные значения от 300 до 600, если же  $\beta_2 \leq 299$ , то

$\beta_1 > \beta_2$ , если же 301

Тогда по условию значения  $\alpha_2$  и  $\beta_2$  должны быть в диапазоне 76-301  
Итого: 22876



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.



СТРАНИЦА

4 из 5

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Темам методов интегриров:

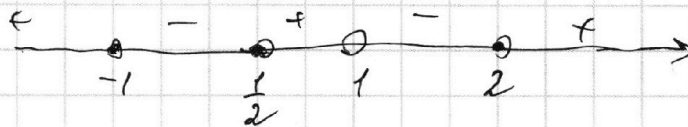
$$2y^2 - 5y + 2 = 0$$

$$D = 25 - 2 \cdot 2 \cdot 4 = 9$$

$$y_{1,2} = \frac{5 \pm 3}{4}$$

$$y_1 = 2$$

$$y_2 = \frac{1}{2}$$



Однако с учетом

того, что  $y \leq 24$  перебрал лишь решения

на  $y$ , также, что  $y$  от 3 до 24

выключил.





На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1  
☐

2  
☐

3  
☒

4  
☐

5  
☐

6  
☐

7  
☐

СТРАНИЦА  
5 из 5

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Так же  $x = y^3$ , то при последовательном  
уменьшении  $y$ ,  $x$  будет уменьшаться  
каждый раз в кубе  $(y^3, y)$ . где  $y$  — это  
случайное число от 3 до 24, то есть 22 решения  
Ответ: 22 решения



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении **каждой задачи** отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☒ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА  
3 из 5

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

знаки достаточно рассмотреть когда знаменатель  $> 0$

$$4(y^4 - 1) - 10y(y^2 - 1) > 0$$

$$4((y^2 - 1)(y^2 + 1)) - 10y(y^2 - 1) > 0$$

$$(y^2 - 1)(4y^2 + 4 - 10y) > 0$$

$$(y^2 - 1)(2y^2 - 5y + 2) > 0$$

Решим квадратное уравнение:

$$2y^2 - 5y + 2 = 0$$

$$D = 25 - 2 \cdot 2 \cdot 4 = 9$$

$$y_{1,2} = \frac{5 \pm \sqrt{9}}{4}$$

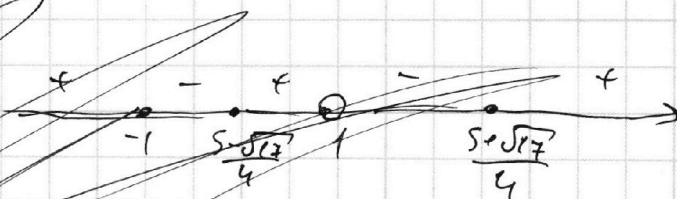
хочо, щоб  $5 + \sqrt{9} > 9$

т.к.  $5 + \sqrt{9} > 4$

$$\Rightarrow \frac{5 + \sqrt{9}}{4} > 2$$

$$0 < 5 - \sqrt{9} < 1 \Rightarrow \frac{5 - \sqrt{9}}{4} > 0$$

Но с учетом того  $y > 0$ ,  $y \leq 24$ , то получаем  
лишь решения  $24 \leq y \leq 3$





На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☒ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА  
2 из 5

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\frac{3y+3}{y-1} < \frac{7x+7}{x-1}$$

$$\frac{3y+3}{y-1} - \frac{7x+7}{x-1} < 0$$

$$\frac{(3y+3)(x-1) - (7x+7)(y-1)}{(y-1)(x-1)} < 0$$

$$\frac{10x - 10y - 4x + y + 4}{(x-1)(y-1)} < 0$$

предположим  $x = y^3$

$$\frac{10y^3 - 10y - 4y^4 + 4}{(y^3-1)(y-1)} < 0$$

$$\frac{4y^4 - 10y^3 + 10y - 4}{(y^3-1)(y-1)} > 0$$

$$\frac{4(y^4-1) - 10y(y^2-1)}{(y-1)^2(y^2+y+1)} > 0$$

$(y-1)^2(y^2+y+1)$  не влияет на знак т.к.  $y^2+y+1$  - всегда положителен  $\Rightarrow > 0$ ,  $(y-1)^2 > 0$  также положителен



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☒ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА  
1 из 5

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$3. \begin{cases} 3\log_x 27 + \log_y 3 + 8\log_{xy} \frac{1}{9} = 0 & (1) \\ \frac{3y+3}{y-1} < \frac{3x+3}{x-1} & (2) \\ y \leq 24 & (3) \end{cases} \text{ Ограничения:}$$

$$\begin{aligned} x &> 0 \\ y &> 0 \\ x &\neq 1 \\ y &\neq 1 \\ xy &\neq 1 \end{aligned}$$

Преобразуем (1):

$$\frac{9}{\log_3 x} + \frac{1}{\log_3 y} = \frac{16}{\log_3 xy}$$

Сделав замену  $\log_3 x = a$ ,  $\log_3 y = b$ , тогда преобразование выглядит так:

$$\log_3 x = a, \log_3 y = b$$

$$\frac{9}{a} + \frac{1}{b} = \frac{16}{a+b}$$

$$\frac{9b+a}{ab} = \frac{16}{a+b}, \quad ab \neq 0, \quad a+b \neq 0, \quad \text{тогда можно домножить на } ab(a+b);$$

$$(9b+a)(a+b) = 16ab$$

$$9ab + ab + a^2 + 9b^2 - 16ab = 0$$

$$(3b-a)^2 = 0$$

$$\Rightarrow a = 3b$$

$$\log_3 x = 3\log_3 y, \quad \text{тогда } x = y^3$$





На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☒ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА

2 из 3

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$5 \cdot \text{НОД}(a, b) = b$ , значит возможно лишь случаи:

$$b = 5, \quad b = 10, \quad b = 20$$

Рассмотрим первое уравнение системы как квадратное относительно  $a$ :

$$4b = 5a^2 - 10ab + 5b^2$$

$$5a^2 - 10ab + 5b^2 - 4b = 0$$

$$D = 100b^2 - 4 \cdot 5 \cdot (5b^2 - 4b) = 16 \cdot 5b, \text{ так как}$$

$a$  и  $b$  натуральные, то решение возможно лишь если  $D = k^2$ , где  $k \in \mathbb{Z}$ , иначе нет  $b \in \mathbb{N}$ , то  $a$  будет иррациональным.

$$16 \cdot 5b = k^2$$

$$5b = \left(\frac{k}{4}\right)^2 \Rightarrow 5b = z^2, \quad z \in \mathbb{Z}, \text{ но тогда}$$

возможно лишь при  $b = 5$  и  $b = 20$  т.к. при  $b = 10$ ;

$$50 = z^2, \text{ что неверно.}$$

1)  ~~$b = 5 \Rightarrow a = \frac{+10b \pm \sqrt{4b^2}}{10} = \frac{+10 \pm 10}{10} = +5 \pm \frac{1}{2}$~~   
~~ни  $\in \mathbb{Z}$~~

2)  ~~$b = 20 \Rightarrow a = \frac{+10b \pm \sqrt{4b^2}}{10} = \frac{+20 \pm 20}{10} = 2 \pm 1$~~   
 ~~$a = 2$  или  $a = 1$~~





На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1  
☐2  
☐3  
☐4  
☒5  
☐6  
☐7  
☐СТРАНИЦА  
1 из 3

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

4. Заметим, что условие задачи симметрично относительно  $a$  и  $b$ , при этом если  $a = b$ , то  $\text{НОК}(a, b) = a = b$ , но тогда всякая система преобразуется в равенство  $5a = a$ , откуда  $a \neq 0$ , но  $a \neq b$  не выполняется. Значит рассмотрим случай, когда  $a > b$ , тогда  $\min(a, b) = b$ ,  $\max(a, b) = a$ .  
Пусть  $\text{НОД}(a, b) = d$

Тогда из того что  $4b = 5(a - b)^2$  имеем, что  $a \vdash d$ ,  $b \vdash d \Rightarrow a - b \vdash d \Rightarrow$   
т.ч.  $\vdash d^2 \Rightarrow 4b \vdash d^2$ , но если  $d = \text{НОД}(a, b)$ , то  
 $b = kd$ , где  $\text{НОД}(kd, d) = 1 \Rightarrow 4k \vdash d \Rightarrow$   
 $4 \vdash d \Rightarrow \text{НОД}(a, b)$  может быть равен лишь  
1, 2, 4.

Рассмотрим более подробно в случае:

$$5a = \text{НОК}(a, b), \text{ как известно } \text{НОК}(a, b) \cdot \text{НОД}(a, b) = ab \\ \Rightarrow \text{НОК}(a, b) = \frac{ab}{\text{НОД}(a, b)}$$

Тогда:  $5a = \frac{ab}{\text{НОД}(a, b)}$ ,  $a > 0 \Rightarrow$  разделим на  $a$ ;  
и получим на  $\text{НОД}(a, b)$ ;



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7  
☐ ☐ ☐ ☒ ☐ ☐ ☐

СТРАНИЦА  
3 из 3

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$1) b=5: \Rightarrow a = \frac{10 \cdot 5 \pm \sqrt{16 \cdot 25}}{10} = 5 \pm \frac{20}{10} =$$

$$5 \pm 2 \Rightarrow a = 7$$

тогда ясно, что оба  
 $a=3 < b$  - произведения

удовлетворяют условиям задачи при  $a=7$

$$\text{т.к. } \text{НОД}(a, b) = 1$$

$$2) b=20: a = \frac{10 \cdot 20 \pm \sqrt{16 \cdot 25 \cdot 4}}{10} =$$

$$= 20 \pm \frac{40}{10} \Rightarrow \text{тогда } a = 24$$

$a=16 < b$  - произведения

при  $a=24$ , второе условие тоже выполнено

$$\text{т.к. } \text{НОД}(a, b) = 4$$

Аналогично разберемся случаем  $b > a$ , тогда  
получимся аналогичные пары

Ответ:  $(5; 7), (7; 5), (20; 24), (24; 20)$



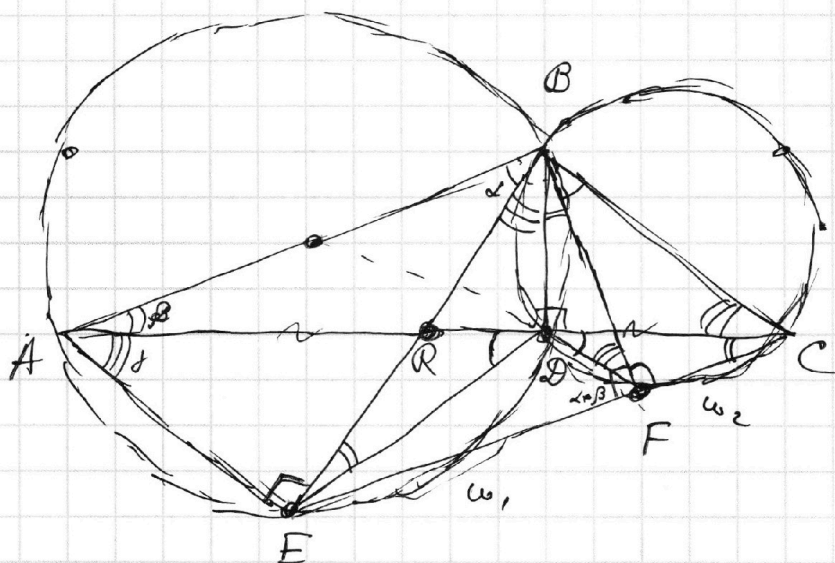
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☒ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА  
1 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Решение: пусть  $\angle BAD = \beta$ ,  $\angle EAD = \gamma$ ,  $\angle ABE = \alpha$ ,  
Тогда т.к.  $\angle AEB = 90^\circ$  (вписанный опирается на диаметр),  
то  $\alpha + \beta + \gamma = 90^\circ$



$\angle EAD = \angle EBD = \gamma$ , из вписанности  $\angle DCF = \angle DBF$   
 $\angle BAD = \angle DBF = \beta$  (углы опираются на одну дугу отстоявшие  
вспомогательных),  $\angle DBF = \angle DCF$ ,  $\angle FBC = 90^\circ$ ,  
 $\alpha + \beta + \gamma = 90^\circ \Rightarrow \angle FBC = \alpha$

По формуле секущей касаят. д:  $BD = \frac{BR \cdot BC}{RC}$ ,  
и  $BF = \frac{BC \cdot BE}{EC}$ ,  $\angle AEB = 90^\circ = \angle EBC \Rightarrow AE \parallel BC$ ,

$\angle ABE = \angle BEF = 90^\circ - \angle EBF \Rightarrow AB \parallel EC \Rightarrow$   
 $ABEC$  - параллелограмм



На одной странице можно оформлять **только одну задачу**. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

☐☐☐☐☐☒☐

СТРАНИЦА

1 из 3

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$6. \begin{cases} (y + x^2 - 4x + 1)(x^2 - 2xy + 3y^2)(y - 2x + 1) = 0 \\ y = (-2a + 4)x + a^2 - 1 \end{cases}$$

что получается:

$$\begin{cases} y + x^2 - 4x + 1 = 0 & (1) \\ x^2 - 2xy + 3y^2 = 0 & (2) \\ y - 2x + 1 = 0 & (3) \\ y = (-2a + 4)x + a^2 - 1 \end{cases}$$

$$(2) \quad x^2 - 2xy + 3y^2 = (x - y)^2 + 2y^2 = 0, \text{ однако } 2y^2 \geq 0, (x - y)^2 \geq 0 \Rightarrow \text{решение возможно только при } y = x = 0$$

$$(1) \text{ подставим } y = (-2a + 4)x + a^2 - 1:$$

$$x^2 - 4x + 1 + a^2 - 1 - 2ax + 4x = 0$$

$$x^2 - 2ax + a^2 = 0$$

$$(x - a)^2 = 0, \text{ значит решение лишь при}$$

$$x = a.$$

$$(3) \text{ подставим } y = (-2a + 4)x + a^2 - 1:$$

$$-2ax + 4x + a^2 - 1 - 2x + 1 = 0$$





На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

☐ ☐ ☐ ☐ ☐ ☒ ☐

СТРАНИЦА  
3 из 3

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

2)  $a = -1$ , тогда (2) имеет решение  $x = y = 0$ ,

а (1) имеет решение  $x = -1$ , а

(3) имеет решение при  $\frac{a^2}{2(a-1)} = \frac{1}{4} = x$ ,

значит, что решения различны  $\Rightarrow a = -1$  подходит, т.к. решение 3

3) если  $a \neq \pm 1$ , то (2) не имеет решений,

(1) имеет решение при  $x = a$ , а (3) имеет решение при  $x = \frac{a^2}{2(a-1)}$ , значит система будет

иметь 2 решения если решения (1) и (3) различны,

то есть не подходит лишь  $a$ :  $a = \frac{a^2}{2(a-1)}$ ,

решим это уравнение:

$a = 0$  - решение, если  $a \neq 0$ , то поделим на  $a$ :

$\frac{a^2}{2(a-1)} = 1$ ,  $a \neq 1 \Rightarrow$  поделим на  $2(a-1)$

$a = 2a - 2 \Rightarrow a = 2$

Значит не подходят лишь  $a = 0$ ,  $a = 2$ ,  $a = -1$

Ответ:  $a \in (-\infty; -1) \cup (-1; 0) \cup (0; 2) \cup (2; +\infty)$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

☐☐☐☐☐☒☐

СТРАНИЦА  
2 из 3

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$a^2 - 2ax + 2x = 0$$

$$a^2 = x(2a - 2), \text{ если } a = 1, \text{ то}$$

$1 = 0$ , что неверно, в противном случае если  $a \neq 1$ ,

то можем поделить на  $2a - 2$ :

$$x = \frac{a^2}{2(a-1)}$$

Рассмотрим несколько случаев:

1)  $a = 1 \Rightarrow (3)$  не имеет решений, тогда

(1) имеет решение  $x = 1$ , а второе имеет

$$\text{решение } x = y = 0, \text{ тогда } y = (-2a + 4)x + a^2 - 1 =$$
$$= 0 + 1 - 1 = 0$$

(замечание: из второго уравнения исходной системы

видно, что  $y$  однозначно выражается через  $x$ , поэтому

например при  $x = 1$  решение находится.

Замечание, что решение (2)  $x = y = 0$  достигается

только при  $a = \pm 1$  (случай  $a = 1$  уже рассмотрен) т.к.

тогда второе уравнение имеет вид  $a^2 = 1$ .



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1  
☐

2  
☐

3  
☐

4  
☐

5  
☐

6  
☐

7  
☐

СТРАНИЦА  
\_\_ ИЗ \_\_

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

или-то не  
считается

$$\frac{3y+3}{y-1} < \frac{7x+7}{x-1}$$

$$\frac{(3y+3)(x-1) - (7x+7)(y-1)}{(x-1)(y-1)} < 0$$

$$\begin{aligned} 3xy - 3y + 3x - 3 - 7xy + 7x - 7y + 7 &= \\ = 10x - 10y - 4y + 4 &< 0 \end{aligned}$$

$$10y^3 - 10y - 4y^4 - 4 < 0 \quad | : 4$$

$$\frac{10}{4}y^3 - \frac{10}{4}y - y^4 - 1 < 0$$

$$y^3 ($$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи** отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☒ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА  
\_\_ ИЗ \_\_

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. **Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно.** Порча QR-кода недопустима!

$$3. \left\{ \begin{array}{l} 3 \log_x 27 + \log_y 3 + 8 \log_{xy} \frac{1}{9} = 0 \\ \frac{3y+3}{y-1} < \frac{7x+7}{x-1} \\ y \leq 24 \end{array} \right. \quad \text{Одн.:$$

$$\begin{array}{l} x > 0 \\ y > 0 \\ x \neq 1 \\ y \neq 1 \\ xy \neq 1 \end{array}$$

$$3 \log_x 3^3 = 9 \log_x 3 + \log_y 3 + 8 \log_{xy} 3^{-2}$$

$$9 \log_x 3 + \log_y 3 - 16 \log_{xy} 3 = 0$$

$$\log_x 3 = \frac{\log 3}{\log x}$$

$$\log_x 3 = \frac{1}{\log_3 x}$$

$$\frac{9}{\log_3 x} + \frac{1}{\log_3 y} = \frac{16}{\log_3 xy}$$

$$\frac{9}{a} + \frac{1}{b} = \frac{16}{a+b}$$

$$\log_a b = \frac{\log_c b}{\log_c a}$$

$$\frac{3y+3}{y-1} = \frac{7x+7}{x-1}$$

$$\frac{3y+3}{y-1} - \frac{7x+7}{x-1} = 0$$

$$\frac{2(y+1)(x-1) - 7(x+1)(y-1)}{(y-1)(x-1)} = 0$$

$$3(xy+x-y-1) - 7(x+y+y-1)$$

$$= 3xy + 3x - 3y - 3 - 7xy - 7y + 7x + 7$$

$$= -4xy + 10x - 10y + 4$$





На одной странице можно оформлять **только одну задачу**. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

☐ ☐ ☐ ☐ ☐ ☐ ☐

СТРАНИЦА  
из

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$y - 2x + 1 = 0$$

$$y = (-2a + 4)x + a^2 - 1$$

$$-2ax + 4x + a^2 - 1 = 0$$

$$a^2 - 2ax + 2 = 0$$

$$a^2 - 2ax + 2 = 0$$

или что-то:

(1)  $x = a \Rightarrow$  решение

(2)  $x = y = 0 \Rightarrow$  решение

(3) если  $a = 1 \Rightarrow$  нет решений,

если  $a \neq 1, \neq 0$

если еще  $x = -1$

если  $a \neq 7$

$2 \leq 75 \Rightarrow 21$

304

76 80 151

08 190

$$\begin{array}{r} 301 \\ + 76 \\ \hline \end{array}$$

$$1806$$

$$2107$$

$$22876$$

$$= 0$$

$$\begin{array}{r} 301 \\ + 76 \\ \hline \end{array}$$

$$1806$$

$$2107$$

$$22876$$

или еще

$$\begin{array}{l} a^2 - 1 = 0 \\ a = \pm 1 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 151 \\ - 75 \\ \hline 76 \end{array}$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА  
\_\_ ИЗ \_\_

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\begin{cases} 1) b^2 - 4(a+2) \cdot 3a = 0 \\ 2) b^2 - 4(6+3a) = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} y^3(10-4y) - (10y-4) \\ \text{пусть } 1 - \text{поршень} \end{cases}$$

$$b^2 - 12(a+2)a = 0 \Rightarrow b^2 - 12(a^2 + 2a) = 0$$

$$b^2 - 12a^2 - 24a = 0 \quad | : a^2$$

$$y \leq 24$$

$$b^2 - 12a^2 - 24a = 0$$

$$\frac{b^2}{a^2} - 12 - \frac{24}{a} = 0$$

$$\frac{b^2}{a^2} - 12 - \frac{24}{a} = 0$$

$$b^2 - 24a - 12a^2 = 0$$

$$\text{Решение: } \text{уравнение } \Rightarrow a = 1$$

$$n = 5^{151} \cdot 7^{600} = x \cdot y, \quad y : x$$

$$x = 5^{d_1} \cdot 7^{B_1}$$

$$\cos(H)$$

$$y = 5^{d_2} \cdot 7^{B_2}$$

$$\begin{cases} d_2 > d_1 \\ B_2 > B_1 \end{cases}$$

$$d_1 + d_2 = 151$$

$$B_1 + B_2 = 600$$

и если считать  
тогда получится

$$\frac{BF}{BD} = ?$$

$$\cos B \angle E = \frac{2}{3}$$

знаем из условия  
что такое

$$\frac{BF}{BC} = \frac{2}{3}$$

$$\frac{BF}{FE} = y$$

both sides  $\Delta BDF$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи** отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА  
\_\_ ИЗ \_\_

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

1.  $f(x)$

$$f(x) = -2x^2 \text{ имеет одно решение}$$

$$f(x) = -6 \text{ имеет одно решение}$$

Задача - ?

$$f(x) = ax^2 + bx + c$$

$$ax^2 + bx + c = -2x^2 \Rightarrow \text{имеем одно решение}$$

$$ax^2 + bx + c = -6 \Rightarrow \text{имеем одно решение}$$

$$D = b^2 - 4ac = 0 \quad 1) \quad x^2(a+2) + bx + c = 0$$

$$2) \quad ax^2 + bx + (c+6) = 0$$

$$1) \quad b^2 - 4(a+2)c = 0$$

$$b^2 - 4a(c+6) = 0$$

$$4(a+2)c = 4a(c+6)$$

$$(a+2)c = a(c+6)$$

$$ac + 2c = ac + 6a$$

$$\boxed{c = 3a}$$

$$a^2 - x(2a-2) = 0$$

$$a^2 = x(2a-2)$$

у 2 решения  
если  $a \neq 1$

$$a = 1:$$

у 6 корней,

у корня  $x = 1$

у 6 корней

если  $a = -1$

$\Rightarrow$

$$\frac{b^2}{a} - ?$$

$$b^2 = 4(a+2)c$$





На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

1 2 3 4 5 6 7  
☐ ☐ ☐ ☐ ☐ ☐ ☐

СТРАНИЦА

\_\_\_ ИЗ \_\_\_

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\begin{cases} 4b = s(a-b)^2 \\ sa = \text{НОД}(a, b) \end{cases}$$

$$4b = sa^2 - 10ab + 5b^2$$

$$sa^2 - 10ab + 5b^2 - 4b = 0$$

$$D = 100b^2 - 4 \cdot s(s b^2 - 4b) \geq 0$$

$$100b^2 - 100b^2 + 16 \cdot s \cdot b$$

$$sb = a^2$$

$$b - \text{НОД}(a, b) \cdot s$$

мы имеем  $\text{НОД} = d \Rightarrow$   
 по лемме  $\text{НОД} \mid a^2$

$$4 : \text{НОД}$$

$$a = p_1^{d_1} \dots p_n^{d_n}$$

$$b = p_1^{b_1} \dots p_n^{b_n}$$

$$p_1^{d_1} \dots p_n^{d_n} \cdot s$$

$$b_1 = d_1 + 1$$

по  
 лемме, что  $a \mid b$   
 по лемме.

$$sa = \frac{ab}{\text{НОД}}$$

$$s \cdot \text{НОД} = b$$

$$\Rightarrow b \leq 20$$





На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1  
☐2  
☐3  
☐4  
☐5  
☐6  
☐7  
☐СТРАНИЦА  
\_\_ ИЗ \_\_

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$4. \begin{cases} 4 \cdot \min(a; b) = S(a-b)^2 \\ S \max(a; b) = \text{НОК}(a; b) \end{cases}$$

ВСЕ И ЕА  
медианы  
к шнотенге

$$S \cdot (\max(a; b)) = \text{НОК}(a; b)$$

пусть, если  $a = b \Rightarrow \text{НОК} = a = b$   
пусть  $a > b$

$$\begin{cases} 4b = S(a-b)^2 \\ Sa = \text{НОК}(a; b) \end{cases}$$

$$\text{НОК} = \frac{a \cdot b}{\text{НОД}}$$

$$Sa = \frac{a \cdot b}{\text{НОД}}$$

$$b = S \text{НОД}(a; b)$$

$$4b = Sa^2 - 10ab + Sb^2$$

То есть везде у  $a$   
степень больше, поэтому  
только у  $b$  степень  
 $S$  на 1 больше

$$b : S$$

$$(a-b) : \boxed{\min S}$$

$$\cancel{x^2} - 6x + 3$$

$$3x^2 - 6x + 3$$

$$3x^2 - 6x + 3$$

$$x^2 - 6x + 9$$

$$x^2 - 6x + 9$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

1  
☐

2  
☐

3  
☐

4  
☐

5  
☒

6  
☐

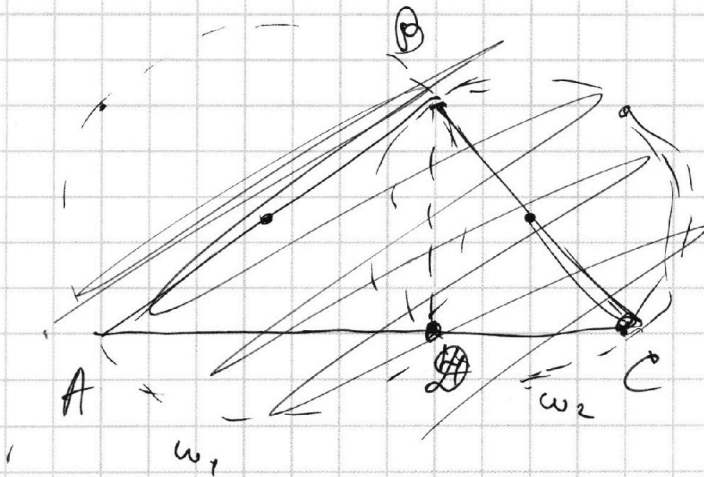
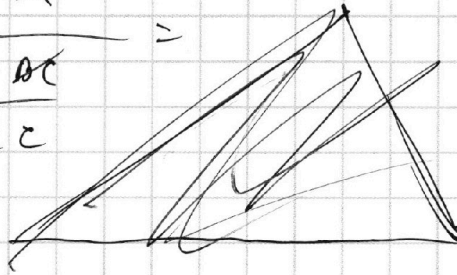
7  
☐

СТРАНИЦА  
2 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются **отдельно**. Порча QR-кода недопустима!

$\Rightarrow BR = \frac{1}{2} BF, RC = \frac{1}{2} AC$

$\Rightarrow \frac{BF}{BD} = \frac{\frac{BC \cdot BF}{EC}}{\frac{BR \cdot AC}{RC}} =$





На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА

— ИЗ —

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$6. \begin{cases} (y + x^2 - 4x + 1)(x^2 - 2xy + 3y^2)(y - 2x + 1) = 0 \\ y = (-2a + 4)x + a^2 - 1 \end{cases}$$

или 2 решения

$$x^2 - 2xy + 3y^2 = x(x - 2y) + 3y^2$$

$$x^2 - 2xy + y^2 = (x - y)^2 + 2y^2 \Rightarrow \text{решение } x = y = 0$$

невозможно делить на 0

$$x \neq y$$

$$(-2a + 4)x + a^2 - 1 + x^2 - 4x + 1$$

$$x^2 - 4x + 1 - 2a + 4x + a^2 - 1$$

$$(x - a)^2 = 0 \Rightarrow x = a$$

$$y = (-2a + 4)x + a^2 - 1 = -2a + 1$$

$$\log_3 3 + \log_3 3 = \log_3 y^3$$

$$\log_3 x = 3 \cdot \log_3 y$$

$$\log_3 x = \log_3 y^3$$

$$y = 1 - \text{корень}$$

$$4(y^4 - 1) - 10y(y^2 - 1)$$

$$(y - 1)(y^2 + y + 1)$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

1  
☐2  
☐3  
☐4  
☐5  
☐6  
☐7  
☐СТРАНИЦА  
\_\_ ИЗ \_\_

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\frac{2}{a} + \frac{1}{b} = \frac{16}{ab}$$

$$\frac{2b+a}{ab} = \frac{16}{ab}$$

$$(2b+a)(a+b) = 16ab$$

$$2ab + 2b^2 + a^2 + ab = 16ab$$

$$2b^2 + a^2 - 6ab = 0$$

$$(2b^2 + a^2 - 6ab)$$

$$(3b-a)^2 = 0$$

$$3b = a$$

$$a_2 = 1$$

$$1/6$$

$$75$$

$$76$$

$$6, 7, 8, 9, 0$$

$$5 + 71 = 76$$

$$от 300 до 600$$

$$5 + \sqrt{19} > 9$$

$$2y^2 - 5y + 2 > 0$$

$$D = 25 -$$

$$\frac{15}{76}$$

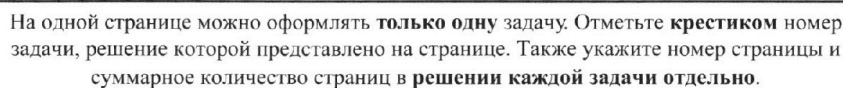
$$от 1 до 75$$

$$от 3 до 44$$

$$1-24$$

$$от 81 до 151$$





СТРАНИЦА  
\_\_\_ ИЗ \_\_\_

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. **Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!**

250 K. Zell

$$\alpha + \beta + \gamma + \delta + \epsilon = 360$$

$$\Delta^* \beta_{ef} = 90^\circ$$

Bejegyzés

~~$\cos \alpha \beta$~~

~~$\cos \alpha \cos \beta$~~

$\alpha + \beta = 90^\circ - \gamma$

21. Same can be written  $\beta + \alpha = 180^\circ - \gamma = 180^\circ$

$$\angle \alpha \beta = 90^\circ - \gamma$$

180-22

$$\cos(\alpha - \beta) = \cos(90 - \gamma)$$

$$B0^{-22} + 20\beta =$$

$$\cos 5.7 f =$$

$$= 180^\circ + \beta - 2$$

2-3 год

Письмо от О. Хранить  
до отъезда  
развеста

$$\frac{AE}{\sin \alpha} = AB$$

$$BF = AE \cdot \sin(\beta_{ef})$$

$$\frac{BC}{\sin \alpha} = AB \Rightarrow BC = AB \cdot \sin \alpha$$

по цене и качеству  
нашей одежды



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

1  
☐

2  
☐

3  
☐

4  
☐

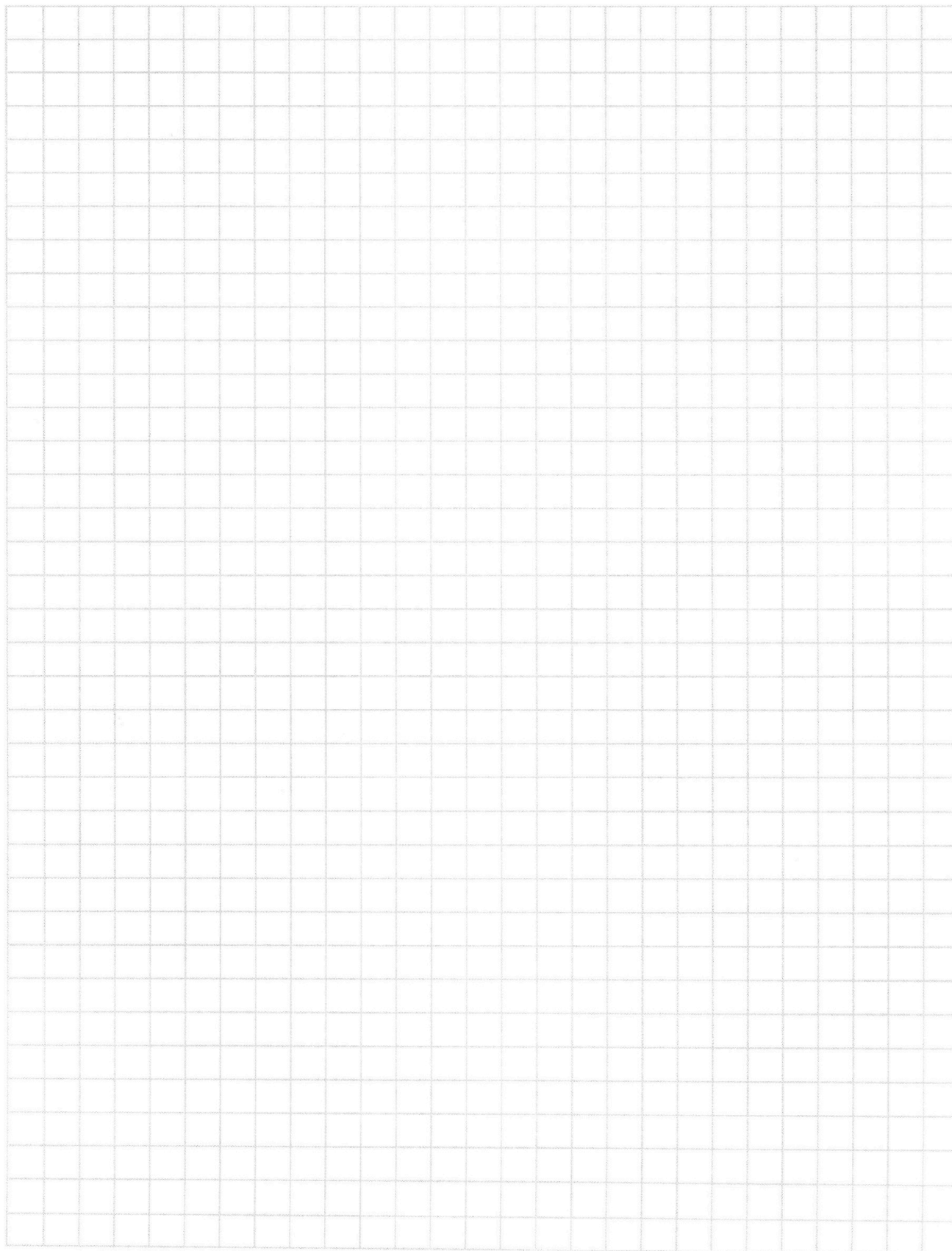
5  
☐

6  
☐

7  
☐

СТРАНИЦА  
\_\_ ИЗ \_\_

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. **Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно.** Порча QR-кода недопустима!





На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

1  
☐

2  
☐

3  
☐

4  
☐

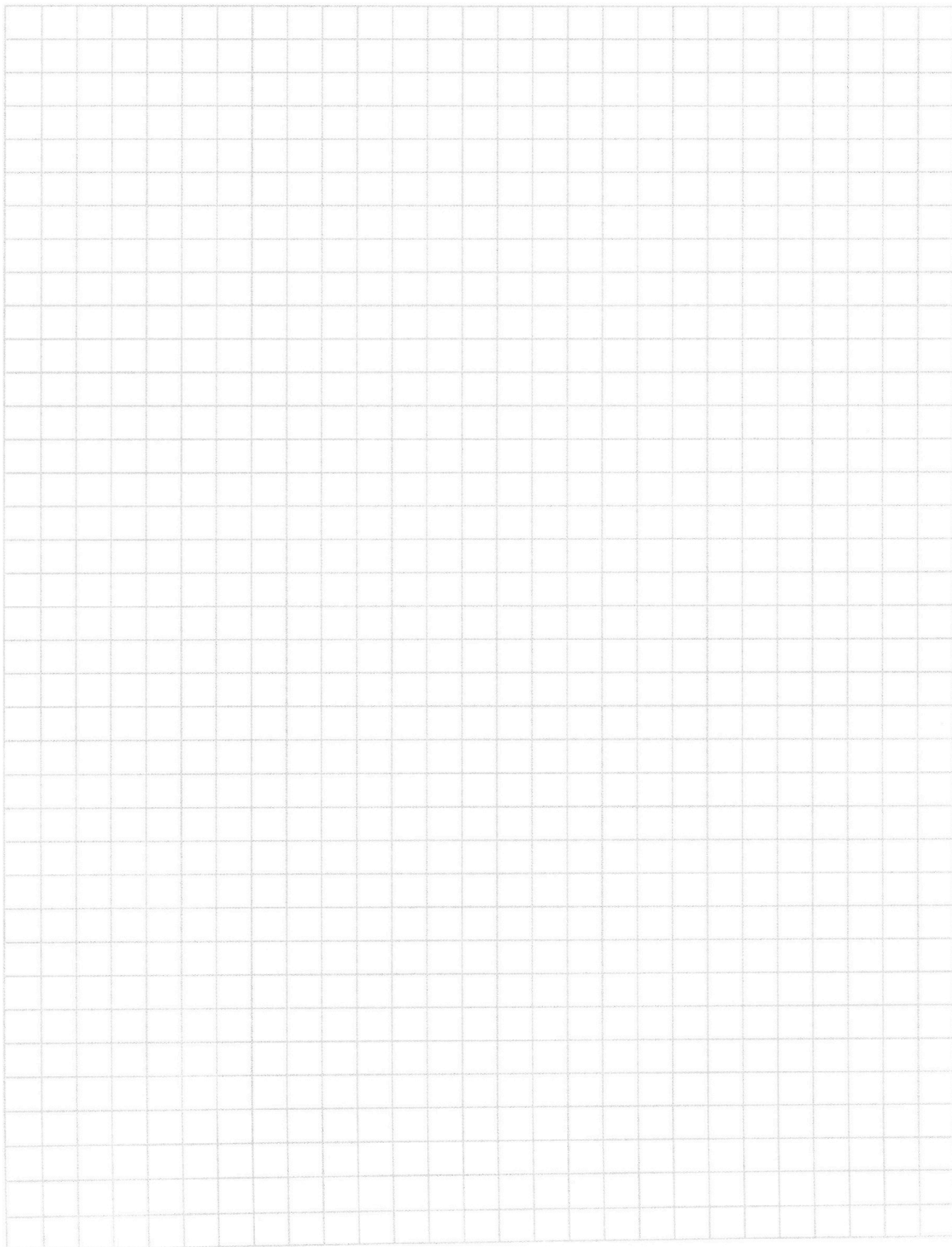
5  
☐

6  
☐

7  
☐

СТРАНИЦА  
\_\_ ИЗ \_\_

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. **Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно.** Порча QR-кода недопустима!





На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

1  
☐

2  
☐

3  
☐

4  
☐

5  
☐

6  
☐

7  
☐

СТРАНИЦА  
\_\_ ИЗ \_\_

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. **Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно.** Порча QR-кода недопустима!

