



МОСКОВСКИЙ  
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ  
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"  
ПО МАТЕМАТИКЕ

11 КЛАСС. Вариант 11



1. [3 балла] Дан приведённый квадратный трёхчлен  $f(x)$  такой, что уравнение  $f(x) = 2x^2$  имеет единственное решение, а также уравнение  $f(x) = -8$  имеет единственное решение. Найдите сумму корней уравнения  $f(x) = 0$ .
2. [3 балла] Сколькими способами можно представить число  $n = 2^{401} \cdot 3^{500}$  в виде произведения двух натуральных чисел  $x$  и  $y$ , где  $y$  делится на  $x$ ?
3. [5 баллов] Найдите количество пар целых чисел  $(x; y)$ , удовлетворяющих системе

$$\begin{cases} \log_x 2 + 3 \log_y 8 + 4 \log_{xy} \frac{1}{16} = 0, \\ \frac{x-1}{x+1} > \frac{3y-3}{7y+7}, \\ x \leq 31. \end{cases}$$

4. [5 баллов] Найдите все пары натуральных чисел  $(a; b)$  такие, что

$$\begin{cases} 4 \cdot \min(a; b) = 3(a - b)^2, \\ 3 \cdot \max(a; b) = \text{НОК}(a; b). \end{cases}$$

5. [5 баллов] На сторонах  $BA$  и  $BC$  треугольника  $ABC$  с тупым углом  $B$  как на диаметрах построены окружности  $\omega_1$  и  $\omega_2$  соответственно, пересекающиеся в точках  $B$  и  $D$ . Хорда  $BE$  окружности  $\omega_1$  перпендикулярна  $BC$ , а хорда  $BF$  окружности  $\omega_2$  перпендикулярна  $CE$  и касается  $\omega_1$ . Найдите отношение  $BF : BD$ , если  $\cos \angle BCE = \frac{3}{5}$ .
6. [5 баллов] При каких значениях параметра  $a$  система

$$\begin{cases} (y - x^2 - x - 1)(x^2 - 3xy + 4y^2)(y + x - 1) = 0, \\ y = (2a + 1)x - a^2 + 1 \end{cases}$$

имеет ровно 2 решения?

7. [6 баллов] В прямую четырёхугольную призму  $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$  вписана сфера  $\omega$ . Луч с началом в точке  $A$  пересекает  $\omega$  в точках  $P$  и  $Q$ , а луч с началом в точке  $C$  пересекает  $\omega$  в точках  $M$  и  $N$ . Пусть  $O$  — точка пересечения диагоналей четырёхугольника  $ABCD$ . Найдите объём призмы  $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$  и расстояние  $\rho$  от центра  $\omega$  до плоскости  $PAC$ , если известно, что  $AO = 1$ ,  $BO = 2$ ,  $CO = 4$ ,  $AP = \frac{\sqrt{5}}{3}$ ,  $AQ = \frac{5\sqrt{5}}{3}$ ,  $CM = \frac{10\sqrt{5}}{9}$ ,  $CN = 2\sqrt{5}$ .



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

]  $f(x) = x^2 + ax + b$ . Тогда,  $f(x) = 2x^2; -x^2 + ax + b \geq 0$  имеет ровно 1 решение  $\Rightarrow D = a^2 + 4b \geq 0$ .  $f(x) = -8; x^2 + ax + (b+8) = 0$  имеет ровно 1 решение  $\Rightarrow D = a^2 - 4b - 32 \geq 0$ .

$$\begin{cases} a^2 + 4b \geq 0 \\ a^2 - 4b - 32 \geq 0 \end{cases} \quad \begin{array}{l} 8b = -32, -b = -4. \\ a^2 + 4b = a^2 - 16 = 0 \Rightarrow a = \pm 4. \end{array}$$

Сумма корней. Если  $a = 4$ , то

$f(x) = x^2 + 4x - 4$ . По т. Виета сумма корней равна  $-4$ .

Если  $a = -4$ , то  $f(x) = x^2 - 4x - 4$ . По т. Виета сумма корней равна  $4$ .

Ответ:  $\pm 4$ .



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА

1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Заметим, что если  $n: x$ , то  $x = 2^a \cdot 3^b$ , где  $0 \leq a \leq 401$ ,  $0 \leq b \leq 500$ ,  
а и  $b$  - целые. Тогда,  $y = \frac{n}{x} = \frac{2^{401} \cdot 3^{500}}{2^a \cdot 3^b} = 2^{401-a} \cdot 3^{500-b}$ . Чтобы  $y$  делилось

на  $x$  должно выполняться система:  $\begin{cases} 401-a \geq a \\ 500-b \geq b \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 401 \geq 2a \\ 500 \geq 2b \end{cases}$ ;

$\begin{cases} 200 \frac{1}{2} \\ 200 \geq a \\ 250 \geq b \end{cases}$  тогда,  $a$  может быть от 0 до 200, а  $b$  от 0 до 250.

У а 201 вариант, у  $b$  - 251.  $201 \cdot 251 = 50451$ .

Ответ: 50451.



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Заметим, что  $x > 0$  и  $y > 0$ , т.к. они не попадают в основания логарифмов. При этом они не могут быть равны 1  $\Rightarrow x > 1$  и  $y > 1$ .

Рассмотрим первое ур-ние:  $\log_x 2 + 3 \log_y 8 + 4 \log_{xy} 16 \geq 0$ ;

$$\log_x 2 + 9 \log_y 2 - 16 \log_{xy} 2 \geq 0. \frac{1}{\log_2 x} + \frac{9}{\log_2 y} - \frac{16}{\log_2 xy} \geq 0;$$

$$\frac{1}{\log_2 x} + \frac{9}{\log_2 y} - \frac{16}{\log_2 x + \log_2 y} \geq 0. \left[ \log_2 x = a, \log_2 y = b. \frac{1}{a} + \frac{9}{b} - \frac{16}{a+b} \geq 0; \right.$$

$$\left. \frac{ab + b^2 + 9a^2 + 9ab - 16ab}{ab(a+b)} \geq 0 \Rightarrow b^2 - b + 9a^2 \geq 0; (b-3a)^2 \geq 0. b = 3a. \right.$$

$\log_2 y = 3 \log_2 x \Rightarrow y = x^3$ . Теперь рассмотрим 2<sup>ое</sup> нер-во:

$$\frac{x-1}{x+1} > \frac{3y-3}{7y+7} = \frac{3(x^3-1)}{7(x^3+1)} = \frac{3(x-1)(x^2+x+1)}{7(x+1)(x^2-x+1)}. \frac{x-1}{x+1} > 0, \text{ т.к. } x > 1. \Rightarrow$$

1)  $\frac{3x^2+3x+3}{7x^2-7x+7}$ . Ур-ие  $x^2-x+1 \geq 0$  не имеет корней, т.к.  $D = 1-4 = -3 < 0$

$0 \Rightarrow x^2-x+1 > 0$  при всех  $x \Rightarrow 7(x^2-x+1) > 0$  при всех  $x$ . Тогда,

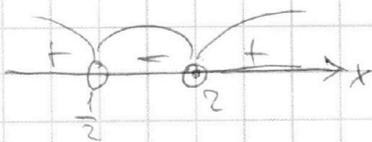
$4x^2-10x+4 > 0, (2x^2-5x+2) > 0$ . Решим ур-ие  $2x^2-5x+2 = 0, D = 25-16 = 9$ .

$x_{1,2} = \frac{5 \pm 3}{4} = \frac{1}{2}; 2$  Тогда,  $2(x-\frac{1}{2})(x-2) > 0 \Rightarrow x \in (-\infty; \frac{1}{2}) \cup (2; +\infty)$ .

Значит, нам подходят все пары  $(x; x^3)$  при  $x > 2$ . Получается 28 пар.

Ответ: все пары вида  $(x; x^3)$  при целом  $x$  от 3 до 31 29.

\* - рассмотрим метод интервалов:





На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$\exists a \leq b$ . Тогда,  $3 \cdot \max(a; b) = \text{НОК}(a; b)$ ;  $3b = \frac{ab}{\text{НОД}(a; b)} \Rightarrow a = 3 \cdot \text{НОД}(a; b)$ .

$\exists b = k \cdot \text{НОД}(a; b) \Rightarrow k \geq 3$ , т.к.  $b \geq a$ ,  $12 \cdot \text{НОД}(a; b) = 3 \cdot (\text{НОД}(a; b))^2 \cdot (3-k)^2$ .

$4 = \text{НОД}(a; b) \cdot (3-k)^2$ . Замечим, что  $k \leq 6$ , т.к. при  $k \geq 6$   $(3-k)^2 \geq 4$ .

Если  $k=3$ , то  $4=0$ , что не правда. Если  $k=4$ , то  $\text{НОД}(a; b) = 4 \Rightarrow a=12$ ,

$b=16$ .  $4 \cdot 12 = 3 \cdot (16-12)^2$  и  $3 \cdot 16 = \text{НОК}(12; 16) = 48$ . Если  $k=5$ , то

$\text{НОД}(a; b) = 1 \Rightarrow a=3, b=5$ .  $4 \cdot 3 = 3 \cdot (3-5)^2$ ;  $3 \cdot 5 = 15 = \text{НОК}(3; 5)$ .

Аналогично при  $a > b$  получаются пары  $(16; 12)$  и  $(5; 3)$ , т.к.  $a=b$  не подходит

Ответ:  $(3; 5); (5; 3); (12; 16); (16; 12)$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

1    2    3    4    5    6    7

СТРАНИЦА  
1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. **Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно.** Порча QR-кода недопустима!

Ответ:  $\frac{452}{5}$ .



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Рассмотрим 1<sup>ю</sup> ур-ние:  $(y-x^2-x-1)(x^2-3xy+4y^2)(y+x-1) = 0$ . Из него

следует,  $\begin{cases} y = x^2 + x + 1 & (1) \\ x^2 - 3xy + 4y^2 = 0 & (2) \\ y = -x & (3) \end{cases}$  Рассмотрим (2).  $x^2 - 3xy + 4y^2 = 0$ .

$D = 9y^2 - 16y^2 = -7y^2 \leq 0$ .  $D = 0$  при  $y = 0$ . При  $y = 0$ ,  $x$  тоже равен 0.

Тогда,  $0 = -a^2 + 1 \Rightarrow a = \pm 1$ . Если  $y = x^2 + x + 1$ , то  $x^2 + 2ax + 1 = (2a+1)x - a^2 + 1$ ;

$x^2 - 2ax + a^2 = 0$ ,  $(x-a)^2 = 0$ ;  $x = a$ . В этом случае мы всегда имеем,

что  $y = a^2 + a + 1$ . Значит, у нас всегда будет ровно 1 решение в

этом случае для любого  $a$ . Теперь, пусть  $y = 1 - x$ . Тогда,  $(1-x)^2 - 2ax + a^2 = 0$

$-a^2 + 1 \Rightarrow x = \frac{a^2}{2a+2}$ , при  $a \neq -1$ .  $y = \frac{2a+2-a^2}{2a+2}$ . Заметим, что решения

в (1) и (3) случае совпадают со (2) не могут, т.к. при  $a = 1$  у

(1) и (3) случае решения будут  $(1, 3)$  и  $(\frac{1}{4}, \frac{3}{4})$ , а у (2) решение

$(0, 0)$ . Если  $a < -1$ , то (3) случай не существует, в (1) получается

пара  $(-1, 1)$ , а в (2) также  $(0, 0)$ . Теперь осталось посмотреть,

когда совпадают 1<sup>ый</sup> и 3<sup>ий</sup> случаи;  $x^2 + x + 1 = -x$ ;  $x(x+2) = 0$ ;

$x = 0$  или  $x = -2$ . Если  $x = 0$ , то для 1<sup>ого</sup> случая и для 3<sup>ого</sup> случая

$a = 0$ . Если  $x = -2$ , то для 1<sup>ого</sup> случая и для 3<sup>ого</sup>  $a = -2$ . Значит,

при  $a = 0$  и  $a = -2$  у нас будет 1 решение, при  $a = 1$  у нас будет <sup>случае</sup> 1 решение,

в остальных случаях будет ровно 2 решения.

Ответ:  $a \in (-\infty; -2) \cup (-2; 0) \cup (0; 1) \cup (1; +\infty)$





На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении **каждой задачи отдельно**.

1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
\_\_ ИЗ \_\_

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$f(x) = x^2 + ax + b$$

$$f(x) + 8 \geq 0$$

$$f(x) - 2x^2 \geq 0$$

$$x^2 + ax + (b + 8) \geq 0$$

$$-x^2 + ax + b \geq 0$$

$$D \geq a^2 - 4b - 32 \geq 0$$

$$D \leq a^2 + 4b \leq 0$$

$$\begin{cases} a^2 + 4b = 0 \\ a^2 - 4b - 32 = 0 \end{cases}$$

$$n = xy$$

$$x = y$$

$$8b = -32$$

$$x = 2 \cdot \frac{a}{3} \Rightarrow y = 2 \cdot \frac{401 - a}{3}$$

$$b = -4$$

$$\begin{cases} a \geq 401 - a \\ b \geq 500 - b \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a \geq 200 \\ b \geq 250 \end{cases}$$

$$a^2 - 16 \geq 0$$

$$a \geq \pm 4$$

$$b \geq 250, 251, \dots, 500 \geq 251$$

$$\frac{\frac{4}{\sqrt{2}}}{2} = \frac{2\sqrt{2}}{2} = \sqrt{2}$$

$$a = 201, 202, \dots, 401 = 201$$

$$\begin{array}{r} \times 251 \\ 201 \\ \hline 251 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 502 \\ 50451 \end{array}$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
\_\_ ИЗ \_\_

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$x^2 - 3x + 4 \geq 0$$

$$(x-1)(x+4)$$

$$D = 9 - 16$$

$$x^2 - 3xy + 4y^2 \geq 0$$

$$D = 9y^2 - 16y^2 = -7y^2$$

$$(0; 0)$$

$$-a^2 + 1 \geq 0$$

$$a = \pm 1$$

$$-2z = \frac{a^2}{2a+2}$$

$$\frac{a^2}{2a+2} =$$

$$a = \frac{1}{2}$$

$$\frac{x-1}{x+1} > \frac{3x^3-3}{7x^3+7}$$

$$\frac{x-1}{x+1} > \frac{3}{7} \frac{(x-1)(x^2+x+1)}{(x+1)(x^2+x+1)}$$

$$1) \frac{3x^2+3x+3}{2x^2-2x+2}$$

$$4x^2 - 10x + 4 > 0$$

$$2x^2 - 5x + 2 > 0$$

$$y \geq x^2 + x + 1 \text{ или } y = 1 - x$$

$$x^2 - 2ax + a^2 \geq 0$$

$$1 - x = (2a+1)x - a^2 + 1$$

$$D = 4a^2$$

$$(2a+2)x = a^2$$

$$(x-a)^2 \geq 0$$

$$x = \frac{a^2}{2a+2}$$

$$x = a$$

$$a = -1$$

$$y = a^2 + a + 1$$

$$D = 25 - 16 = 9$$

при всех  $a$

при всех  $a$ , кроме  $-1$

$$\log_x 2 = \frac{1}{\log_2 x}$$

$$x_{1,2} = \frac{5 \pm 3}{4} = \frac{1}{2}, 2$$

$$x^a \geq 2$$

$$\frac{1}{3} > \frac{21}{63} = \frac{1}{3}$$

$$x = 2^{\frac{1}{a}}$$

$$\frac{1}{\log_2 x} + \frac{9}{\log_2 y} - \frac{1}{\log_2 x + \log_2 y} = 0 \implies \log_2 x = \frac{1}{a}$$

$$\log_x x = a$$

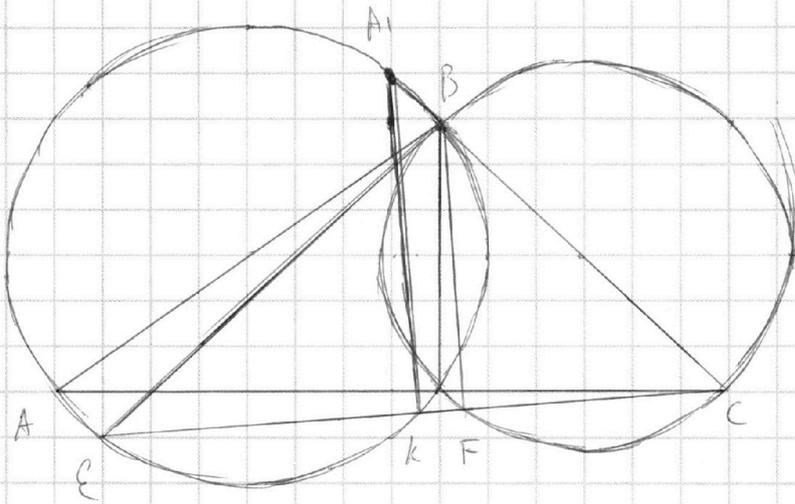


На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении **каждой задачи отдельно**.

1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
\_\_ ИЗ \_\_

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются **отдельно**. Порча QR-кода недопустима!



$$\tan(\alpha + \beta) = \frac{4}{3}$$

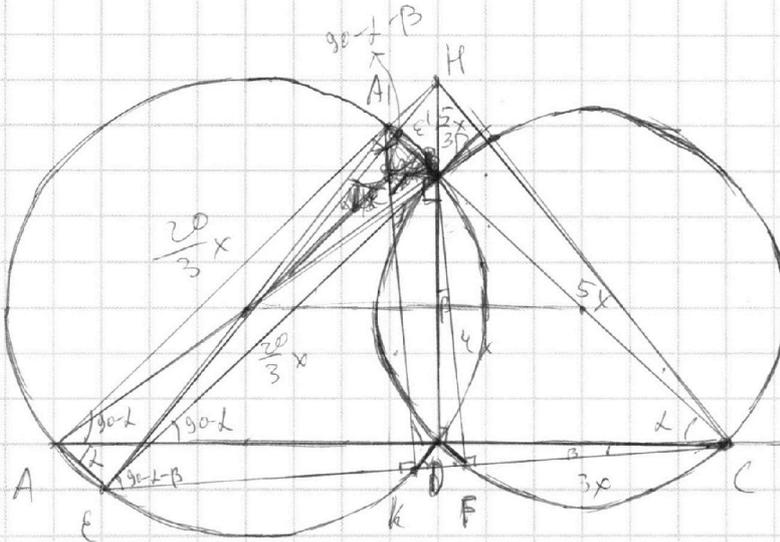


На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
\_\_ ИЗ \_\_

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



$$\operatorname{tg}(\alpha + \beta) = \frac{4}{3}$$

$$\angle DKE = \alpha$$

$$\angle C = \alpha$$

$$\angle DPK = 90 - \alpha$$

$$\frac{BF}{BD} = \frac{\sin(\alpha + \beta)}{\sin \alpha}$$

$$\sin \alpha = \frac{ED}{AB}$$

$$\frac{AA_1}{AC}$$

$$\frac{100}{6} x^2$$

$$S_{ABC} = \frac{100}{6} x^2 - \frac{50}{3} x^2$$

$$S_{AA_1C} = \frac{20}{3} x^2$$

$$A, B = \frac{5}{3} x$$

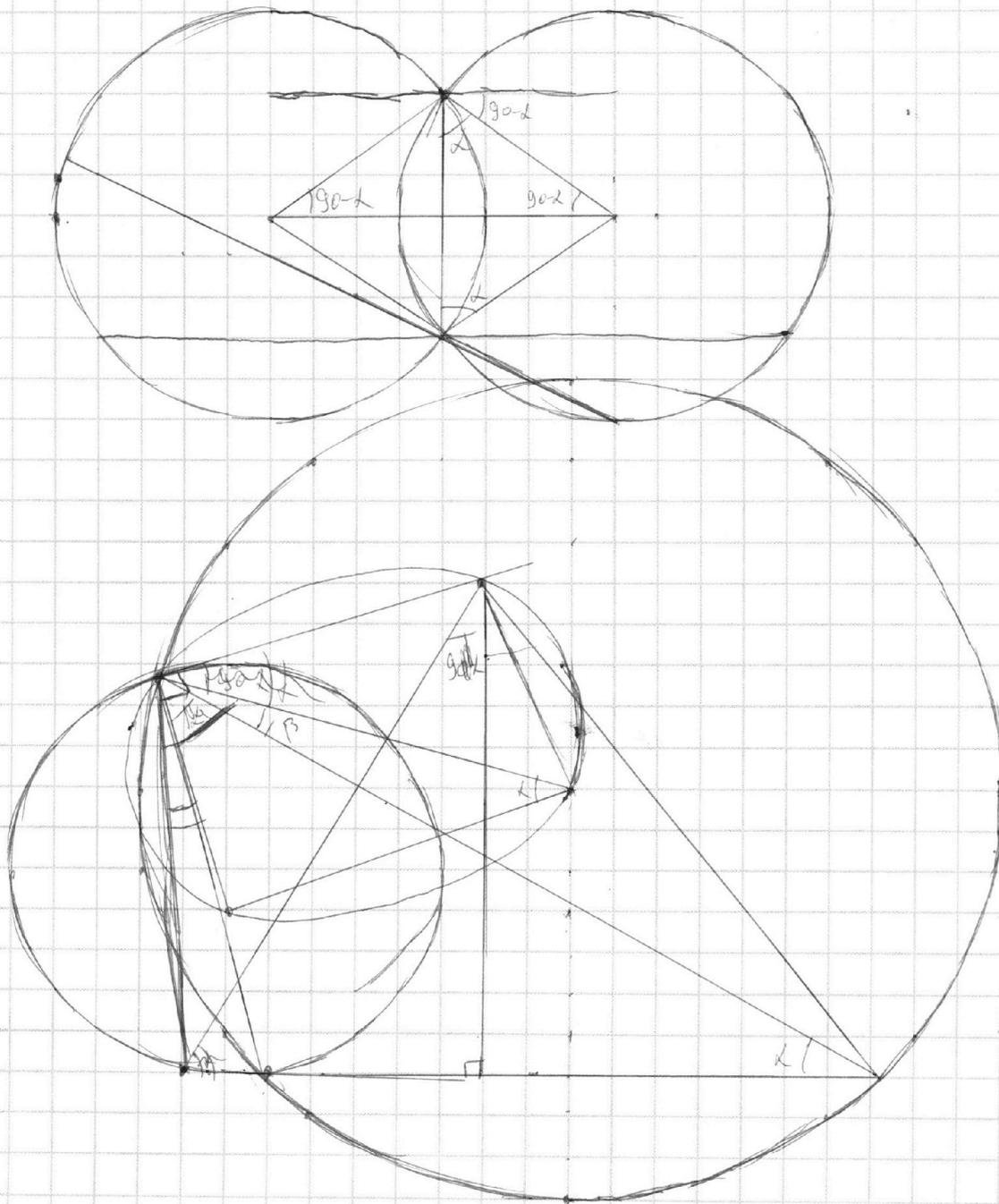


На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
\_\_ ИЗ \_\_

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. **Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно**. Порча QR-кода недопустима!





На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
\_\_ ИЗ \_\_

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. **Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно**. Порча QR-кода недопустима!

$$a < b$$

$$a < 0$$

$$4a = 3(a-b)^2$$

$$y = x+1$$

$$3b = \frac{ab}{\text{НОД}(a;b)} \Rightarrow a = 3 \text{НОД}(a;b)$$

$$y = 1-x$$

$$x = 0$$

$$y = 1$$

$$4 \cdot \text{НОД}(a;b) = (a-b)^2$$

$$x^2 + 2x + 1 - x - 1 = x^2 = 0$$

$$b = k \text{НОД}(a;b)$$

$$4 = \text{НОД}(a;b) (3-k)^2$$

$$k < 1 \Rightarrow \text{НОД}(a;b) < 1 \Rightarrow a = 3; b = 1$$

$$k \geq 3$$

$$k = 4 \quad \text{НОД}(a;b) = 4 \Rightarrow a = 12; b = 16$$

$$4 \cdot 12 = 3 \cdot 4^2 \quad \checkmark$$

$$3 \cdot 16 = 48 \quad \checkmark$$

$$k = 5 \quad \text{НОД}(a;b) = 1; \Rightarrow a = 3; b = 5$$

$$4 \cdot 3 = 3 \cdot 2^2$$

$$3 \cdot 5 = 15$$

