



МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

11 КЛАСС. Вариант 12



1. [3 балла] Дан приведённый квадратный трёхчлен $f(x)$ такой, что уравнение $f(x) = -2x^2$ имеет единственное решение, а также уравнение $f(x) = -6$ имеет единственное решение. Найдите сумму корней уравнения $f(x) = 0$.
2. [3 балла] Сколькими способами можно представить число $n = 5^{151} \cdot 7^{600}$ в виде произведения двух натуральных чисел x и y , где y делится на x ?
3. [5 баллов] Найдите количество пар целых чисел $(x; y)$, удовлетворяющих системе

$$\begin{cases} 3 \log_x 27 + \log_y 3 + 8 \log_{xy} \frac{1}{9} = 0, \\ \frac{3y+3}{y-1} < \frac{7x+7}{x-1}, \\ y \leq 24. \end{cases}$$

4. [5 баллов] Найдите все пары натуральных чисел $(a; b)$ такие, что

$$\begin{cases} 4 \cdot \min(a; b) = 5(a - b)^2, \\ 5 \cdot \max(a; b) = \text{НОК}(a; b). \end{cases}$$

5. [5 баллов] На сторонах BA и BC треугольника ABC с тупым углом B как на диаметрах построены окружности ω_1 и ω_2 соответственно, пересекающиеся в точках B и D . Хорда BE окружности ω_1 перпендикулярна BC , а хорда BF окружности ω_2 перпендикулярна CE и касается ω_1 . Найдите отношение $BF : BD$, если $\cos \angle BCE = \frac{3}{4}$.
6. [5 баллов] При каких значениях параметра a система

$$\begin{cases} (y + x^2 - 4x + 1)(x^2 - 2xy + 3y^2)(y - 2x + 1) = 0, \\ y = (-2a + 4)x + a^2 - 1 \end{cases}$$

имеет ровно 2 решения?

7. [6 баллов] В прямую четырёхугольную призму $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ вписана сфера ω . Луч с началом в точке A пересекает ω в точках P и Q , а луч с началом в точке C пересекает ω в точках M и N . Пусть O — точка пересечения диагоналей четырёхугольника $ABCD$. Найдите объём призмы $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ и расстояние ρ от центра ω до плоскости PAC , если известно, что $AO = 1$, $BO = 2$, $CO = 11$, $AP = \frac{2}{\sqrt{5}}$, $AQ = 2\sqrt{5}$, $CM = 4\sqrt{5}$, $CN = 5\sqrt{5}$.



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.



СТРАНИЦА

1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$f(x) = x^2 + bx + c.$$

$$1) \quad x^2 + bx + c = -2x^2$$

$$3x^2 + bx + c = 0$$

$$\Delta: \quad b^2 - 12c = 0.$$

Дискриминант равен нулю т.к. по условию корни единственные.

$$2) \quad x^2 + bx + c = -6$$

$$x^2 + bx + (c+6) = 0$$

$$\Delta: \quad b^2 - 4(c+6) = 0.$$

Т.к. корни один, то дискриминант равен нулю.
Получаем систему:

$$\begin{cases} b^2 - 12c = 0 \\ b^2 - 4(c+6) = 0 \end{cases}$$

$$b^2 - 12c - b^2 + 4c + 24 = 0 \Rightarrow 8c = 24 \Rightarrow c = 3. \Rightarrow$$

$$b^2 - 12c = b^2 - 12 \cdot 3 = 0 \Rightarrow b = \pm 6.$$

По теореме Виетта у квадратного многочлена сумма корней это $-b \Rightarrow$ сумма корней: ± 6 .

Ответ: $6, -6$



На одной странице можно оформлять **только одну задачу**. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1
☐

2
☒

3
☐

4
☐

5
☐

6
☐

7
☐

СТРАНИЦА
1 из 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Найдем кол-во делителей числа $n = 5^{151} \cdot 7^{600}$. Каждый делитель состоит из какого-то кол-ва пятёрок и какого-то кол-ва семёрок тогда общее кол-во делителей — $152 \cdot 601$. Заметим, что если у делителя на x , то y больше, чем x . Представим $y = 5^a \cdot 7^b$, $x = 5^{151-a} \cdot 7^{600-b}$. Тогда заметим, что $a > 151 - a$ и $b > 600 - b$. $\Rightarrow$
 $a > \frac{151}{2}$ $b > 300$, т.к. b — целое число.
~~Итак, нужно подсчитать количество делителей, у которых $a > 151 - a$ и $b > 600 - b$. Это можно сделать, подсчитав количество делителей, у которых $a < 151 - a$ и $b < 600 - b$. Тогда количество способов выбрать a : 76, количество способов выбрать b : 299. Т.к. $x \cdot y = n$, то при определении y кол-во пар однозначно определяется, то кол-во способов найти пару (x, y) удовлетворяющую условию = количеству способов найти y . Кол-во способов найти y : $76 \cdot 299 = 22724$.~~

Ответ: 22724



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☒	☐	☐	☐	☐

СТРАНИЦА

1 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Т.к. в системе есть логарифмы заменим О.О.:

$$О.О.: \begin{cases} x > 0 & x \neq 1 \\ y > 0 & y \neq 1 \\ xy > 0 & xy \neq 1 \end{cases}$$

$$3 \log_x 3 + \log_y 3 + 8 \cdot \log_{xy} 3 = 9 \log_x 3 + \log_y 3 - 16 \log_{xy} 3 =$$

$$= \frac{9}{x} + \frac{1}{y} - \frac{16}{xy} = 0.$$

Замечка: $\log_3 x = a$ $\log_3 y = b$

$$\frac{9}{a} + \frac{1}{b} - \frac{16}{a+b} = \frac{9b(a+b) + a(a+b) - 16ab}{ab(a+b)} = \frac{9ab + 9b^2 + a^2 + ab}{ab(a+b)} - \frac{16ab}{ab(a+b)} =$$

$$= \frac{9b^2 + a^2 - 6ab}{ab(a+b)} = 0 = \frac{(a-3b)^2}{ab(a+b)} = 0 \Rightarrow$$

$$a = 3b \Rightarrow \log_3 x = 3 \log_3 y \Rightarrow x = y^3$$

Подставим $x = y^3$ во второе неравенство системы:

$$3 \left(\frac{y+1}{y-1} \right) < 7 \left(\frac{y^3+1}{y^3-1} \right) \Rightarrow 7 \frac{(y+1)(y^2+y+1)}{(y-1)(y^2+y+1)} - 3 \left(\frac{y+1}{y-1} \right) > 0$$

$$\left(\frac{y+1}{y-1} \right) \left(\frac{7y^2-7y+7 - 3(y^2+y+1)}{y^2+y+1} \right) > 0.$$

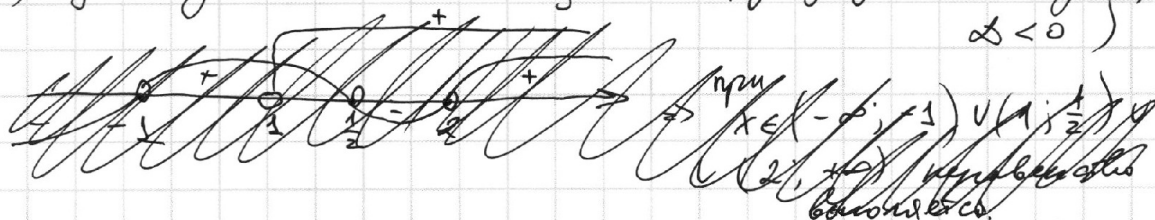
$$\frac{y+1}{y-1} \cdot \frac{4y^2-10y+4}{y^2+y+1} > 0.$$

$$\frac{y+1}{y-1} \cdot \frac{2(y-2)(y-\frac{1}{2})}{y^2+y+1} > 0.$$

Решим методом интервалов:

1) корни знаменателя: $y = -1, y = 2, y = \frac{1}{2}$

2) корни числителя: $y = 1$. (т.к. y^2+y+1 нет корней, т.к. $\Delta < 0$)





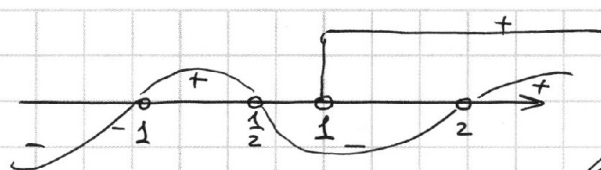
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.



СТРАНИЦА

2 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



$\Rightarrow$ при $x \in (-1; -\frac{1}{2}) \cup (\frac{1}{2}; 1) \cup (2; +\infty)$

Второе неравенство выполняется.

Т.к. из $0.0 < x > 0 \rightarrow x \in (\frac{1}{2}; 1) \cup (2; +\infty)$

Т.к. $x = y^3$, а $y \leq 24 \Rightarrow x \leq 24^3$

Заметим, что на отрезке $x \in (\frac{1}{2}; 1)$ нет целочисленных точек а, следовательно и решений целочисленных равенств нашей системы. $\Rightarrow$

Кол-во пар (x, y) где $x, y \in \mathbb{Z} =$ кол-во целых точек

в на отрезке $x \in (2; 24^3)$, а это кол-во =

$$= 24^3 - 2 - 1 = 13821$$

Ответ: 13821.



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☒	☐	☐	☐

СТРАНИЦА

2 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$\sqrt{b_1}$ может быть 1 или 2.

1) $\sqrt{b_1} = 1 \Rightarrow b_1 = 1 \Rightarrow b = 5 \quad a = 7. \Rightarrow (a, b) = (7, 5)$

2) $\sqrt{b_1} = 2 \Rightarrow b_1 = 4 \Rightarrow b = 20 \quad a = 24. \Rightarrow (24, 20)$

Раз мы в начале отметили что a и b в принципе равнозначны, то мы можем поменять их местами $\Rightarrow$

Ответ: $(a, b) : (7, 5); (5, 7); (24, 20); (20, 24)$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.



СТРАНИЦА
1 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Не учитывая общности скажем, что $a \geq b$. Мы можем так сделать, т.к. $(a-b)$ в квадрате, а следовательно знак их разности нам не важен. Тогда система будет выглядеть так:

$$\begin{cases} 4 \cdot b = 5(a-b)^2 \\ 5 \cdot a = \text{НОК}(a, b) \end{cases}$$

Из первого заметим, что $b \div 5$, т.к. $4 \nmid 5$. Тогда представим $b = 5b_1 \Rightarrow$

$$4 \cdot 5b_1 = 5(a - 5b_1)^2$$

$$4b_1 = a^2 - 10ab_1 + 25b_1^2$$

$$a^2 - 10ab_1 + 25b_1^2 - 4b_1 = 0$$

$$D = 100b_1^2 - 100b_1^2 + 16b_1 = 16b_1$$

$$a = \frac{10b_1 \pm 4\sqrt{b_1}}{2} = 5b_1 \pm 2\sqrt{b_1}$$

$$\text{т.к. } a \geq b, \text{ то } 5b_1 \pm 2\sqrt{b_1} \geq 5b_1$$

$\pm 2\sqrt{b_1} \geq 0 \Rightarrow$ допустим только
знак плюса. $b_1 \neq 0$, т.к.
в противном случае $b=0$,
а это недопустимо в силу
натуральности чисел a и b .

$$b = 5b_1 \quad a = 5b_1 + 2\sqrt{b_1}$$

$$\text{Рассмотрим } \text{НОК}(a, b) = \text{НОК}(\sqrt{b_1}(5b_1 + 2), 5b_1 \cdot \sqrt{b_1})$$

Очевидно, что b_1 квадрат, т.к. в ином случае a — иррациональное, а следовательно не натуральное. Поэтому $\sqrt{b_1}$ это какое-то натуральное число. $\sqrt{b_1}$ общий делитель этих двух чисел $\Rightarrow$ или $5b_1 + 2 \div \sqrt{b_1}$ или $5b_1 + 2 = 5b_1$

Второе невозможно, т.к. $2 \neq 0 \Rightarrow 5b_1 + 2 \div \sqrt{b_1} \Rightarrow 2 \div \sqrt{b_1} \Rightarrow$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☒	☐	☐

СТРАНИЦА

3 ИЗ 3

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$\Rightarrow$ диаметры делят друг друга в отношении $1:1$.

Обозначим (1) $X: AC \cap BE$ (т.о.ч. пересечения диаметров). $BE = \frac{4\sqrt{7}}{3} \Rightarrow BX = XE = \frac{2\sqrt{7}}{3}$

В $\triangle AEX$: $\angle AEX = 90^\circ$, $AE = 4$, $EX = \frac{2\sqrt{7}}{3} \Rightarrow$ по Теореме Пифагора:

$$AX = \sqrt{4^2 + \left(\frac{2\sqrt{7}}{3}\right)^2} = \frac{2}{3} \sqrt{43}.$$

$\triangle AEX \sim \triangle BDX$, т.к. $\begin{cases} \angle AEX = \angle BDX \\ \angle EAX = \angle DBX \end{cases}$ (т.к. $\square ABDE$ — вписанн.)

$$\frac{AX}{BX} = \frac{AE}{BD} \Rightarrow \frac{\frac{2}{3} \sqrt{43}}{\frac{2\sqrt{7}}{3}} = \frac{4}{BD} \Rightarrow \frac{\sqrt{43}}{\sqrt{7}} = \frac{BD}{4} \Rightarrow$$

$$BD = \frac{4\sqrt{7}}{\sqrt{43}}$$

$$BF = \sqrt{7}$$

$$\left. \begin{array}{l} BD = \frac{4\sqrt{7}}{\sqrt{43}} \\ BF = \sqrt{7} \end{array} \right\} \Rightarrow \frac{BF}{BD} = \frac{\sqrt{7}}{\frac{4\sqrt{7}}{\sqrt{43}}} = \frac{\sqrt{43}}{4}.$$

Ответ: $\frac{\sqrt{43}}{4}$.



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

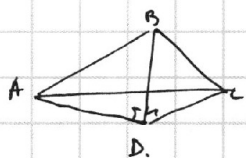


СТРАНИЦА

1 из 3

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

1) Докажем, что (1) $D \in AB$.



Док-во: Допустим что нет. (т.е. (1) $D \notin AB$)

Тогда в ω_1 из-за того, что $\angle ADB = 90^\circ$

опирается на диаметр AB $\angle ADB = 90^\circ$.

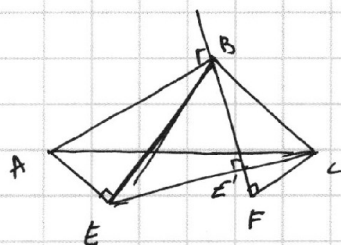
в ω_2 аналогично: BC — диаметр $\Rightarrow \angle BDC = 90^\circ$.

Тогда угол $\angle ADC = \angle ADB + \angle BDC = 90^\circ + 90^\circ = 180^\circ \Rightarrow$

(1) D лежит на AC .

2) Докажем, что (1) $F \in CE$

Док-во: Допустим, что нет (т.е. (1) $F \notin CE$)



Вспомог. т.к. (1) $F \in \omega_2$, и $\angle BFC$ опирается на диаметр $\Rightarrow \angle BFC = 90^\circ$.

(1) $E' = E \cap BF$. Т.к. $BF \perp EC \Rightarrow$

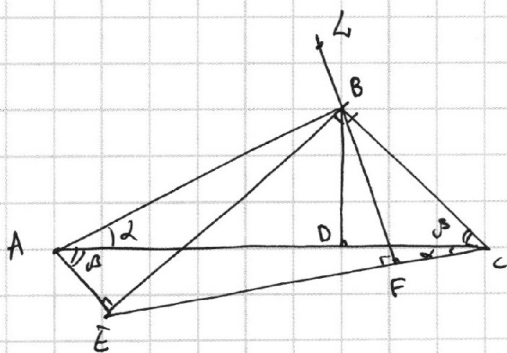
$\angle BE'C = 90^\circ = \angle EE'B$

Т.к. $\angle BE'C$ внешний к $\triangle E'CF$, то

$90^\circ = \angle BE'C = \angle E'CF + \angle CFE' = \angle E'CF + 90^\circ$

$\Rightarrow$

$\angle E'CF = 0 \Rightarrow$ (1) F лежит на EC .



Докажем сразу все вышесказанные четырехугольники:

$\triangle DBCF$ — т.к. $\angle BDC = \angle BFC = 90^\circ$.

$\triangle ABDE$ — т.к. $\angle AEB = \angle ADB = 90^\circ$

$BC \parallel AE$ — т.к. $\angle AEB = \angle ECB = 90^\circ$.

($\angle ECB = 90^\circ$ т.к. $BE \perp BC$ из условия).

Обозначим $\angle BCD = \beta$,

$\angle DCF = \alpha$.

Т.к. $AE \parallel BC \Rightarrow \angle ACB = \angle CAE = \beta$

~~т.к. $\angle AEB = \angle ADB = 90^\circ$~~

BF — касательная к $\omega_1 \Rightarrow \angle ABF = \angle CAB$, $\angle ABL = \angle AEB = 90^\circ$,

(угол $\angle ABL$ и ω_1 в одной полуплоскости относительно BF).

Тогда $AB \parallel EC$, т.к. $\angle ABL = \angle EFB = 90^\circ$.

т.к. $AB \parallel EC \Rightarrow \alpha = \angle FCA = \angle CAB \Rightarrow \angle CAB = \alpha$.





На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи** отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

☐ ☐ ☐ ☐ ☒ ☐ ☐

СТРАНИЦА

2 ИЗ 3

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

т.к. BF касательная к ω_2 , то $\angle EBF = \angle EAB$ (ω_1 и $\angle EBF$ в одной дуге относительно касательной)

~~$\angle EBF = \angle EAB$~~

$$\angle EBF = \angle EAB + \angle CAB = \beta + \alpha$$

Все ~~к~~ фигуры такого рода будут подобны, так что ~~обозначим~~ при изменении внешнего угла отношения сторон не ~~у~~ изменятся. Тогда обозначим сторону $BC = 4$.

$$\cos \beta CE = \cos(\alpha + \beta) = \frac{3}{4}$$

$$\sin(\alpha + \beta) = \sqrt{1 - \cos^2(\alpha + \beta)} = \sqrt{1 - \frac{9}{16}} = \frac{\sqrt{7}}{4}$$

$\triangle BFC$ $\angle BFC = 90^\circ$:

$$\cos(\alpha + \beta) = \frac{FC}{BC} = \frac{3}{4} \Rightarrow FC = 3$$

$$\sin(\alpha + \beta) = \frac{BF}{BC} = \frac{\sqrt{7}}{4} \Rightarrow BF = \sqrt{7}$$

~~$\triangle BFC \sim \triangle EBF$~~ ~~$\triangle BFC \sim \triangle EBF$~~ $\Rightarrow$

$$\frac{BF}{BC} = \frac{EF}{BF} \Rightarrow \frac{\sqrt{7}}{4} = \frac{EF}{\sqrt{7}} \Rightarrow EF = \frac{7}{3}$$

$$\triangle EBF: \angle EFB = 90^\circ, \angle EBF = \alpha + \beta \Rightarrow \frac{EF}{BF} = \frac{EF}{\sqrt{7}} = \frac{\sqrt{7}}{3} \Rightarrow EF = \frac{7}{3}$$

$$\Rightarrow EF = \frac{7}{3}. \text{ Из теоремы Пифагора: } BE = \sqrt{\frac{49}{9} + 7} = \frac{4\sqrt{7}}{3}$$

$$EC = EF + FC = \frac{7}{3} + 3 = \frac{7+9}{3} = \frac{16}{3}$$

~~$\triangle AEB \sim \triangle EBF$~~ $\triangle AEB: \angle AEB = 90^\circ, \angle EAB = \alpha + \beta \Rightarrow BE = \frac{4\sqrt{7}}{3}$

$$\frac{BE}{AE} = \frac{BF}{EF} = \frac{\sqrt{7}}{3} \Rightarrow AE = 4. \text{ Из теоремы Пифагора:}$$

$$AB = \sqrt{4^2 + \frac{16 \cdot 7}{9}} = \frac{16}{3}$$

$$AB = EC = \frac{16}{3}$$

$AE = BC = 4 \Rightarrow \triangle ABCE$ - ~~параллелограмм~~ $\Rightarrow$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1
☐

2
☐

3
☐

4
☐

5
☐

6
☒

7
☐

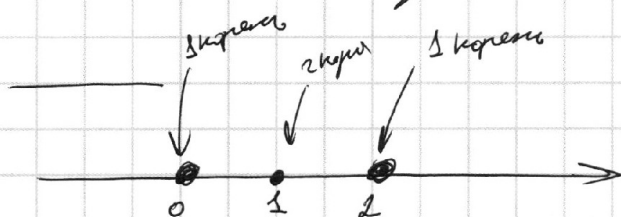
СТРАНИЦА
2 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Заметим, что решение в 1 и 3 скобки не должны совпадать. Найдем точку пересечения:

$$a = \frac{a^2}{2a-2} \Rightarrow 2a^2 - 2a = a^2 \Rightarrow a(a-2) = 0$$

Получается что в точках $a=0$ и $a=2$ 1 корень.
Отметим все корни отсчитывая их a на числовой прямой



или
 $a \in (-\infty; 0) \cup (0; 2) \cup (2; +\infty)$
будет равно 2 корня.

Ответ: $a \in (-\infty; 0) \cup (0; 2) \cup (2; +\infty)$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☒	☐

СТРАНИЦА

1 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Заметим, что в первом уравнении в системе согласно второму уравнению в системе. Для удобства рассмотрим каждую скобку отдельно.

$$1) \quad y + x^2 - 4x + 1 = (-2a + 4)x + a^2 - 1 + x^2 - 4x + 1 = x^2 - 2ax + a^2 = (x - a)^2$$

$$2) \quad x^2 - 2xy + 3y^2 = (x - y)^2 + 2y^2. \text{ Не будем пока что менять эту скобку.}$$

$$3) \quad y - 2x + 1 = (-2a + 4)x + a^2 - 1 - 2x + 1 = (-2a + 2)x + a^2$$

Тогда нужно, чтобы у уравнения было решение:

$$(x - a)^2 ((x - y)^2 + 2y^2) (x(2 - 2a) + a^2) = 0.$$

Заметим, что скобки $(x - a)$ гарантировано дает нам решение $x = a$, $\Rightarrow$ мы ищем a при котором в других скобках равно одно решение.

1) Допустим, что решение во второй скобке $\Rightarrow$

$$(x - y)^2 + 2y^2 = 0 \Rightarrow x - y = 0 \quad y = 0 \Rightarrow x = y = 0 \Rightarrow$$

$$(-2a + 4)x + a^2 - 1 = 0.$$

$$x = \frac{a^2 - 1}{4 - 2a} \neq 0 \Rightarrow a \neq 1.$$

2) Допустим, что решение в третьей скобке.

$$x(2 - 2a) + a^2 = 0 \Rightarrow x = \frac{a^2}{2a - 2} \Rightarrow a \neq 1$$

~~Итак, мы получили, что решение в третьей скобке равно нулю. Если решение в третьей скобке совпадает.~~

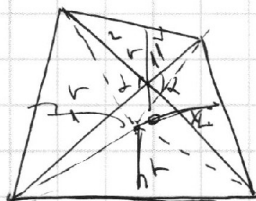
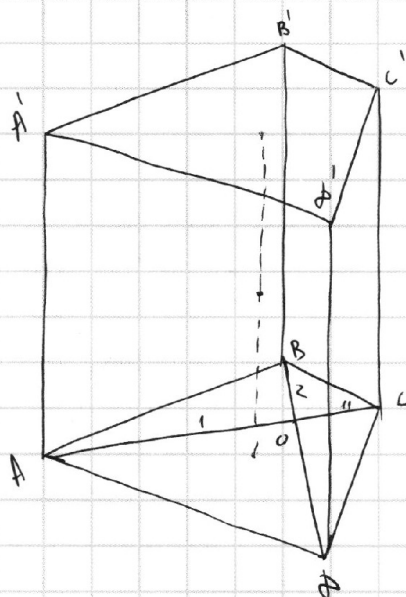


На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

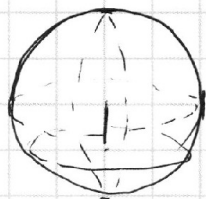
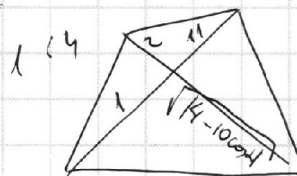
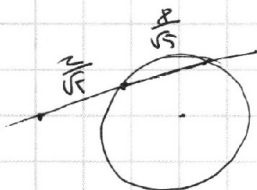
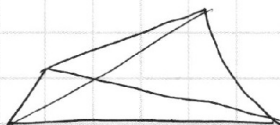
Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



$$\begin{cases} 2^2 + 1 - 2 \cdot 2 \cdot \cos 2 \\ 2^2 + 1^2 - 2 \cdot 1 \cdot \cos(180^\circ - \alpha) \\ 2^2 + 1^2 + 2 \cdot 1 \cdot \cos 2 \end{cases}$$

$$2\sqrt{5} - \frac{2}{\sqrt{5}} = \frac{10 - 2}{\sqrt{5}} = \frac{8}{\sqrt{5}} \quad PO$$

$$\sqrt{5} = MN$$



$$2^2 + 1 - 4 \cos 2 + 2^2 + 1^2 + 12 \cos 2 = x^2 + 1^2 - 2 \cdot 1 \cdot x \cos \alpha + 1 + x^2 - 2 \cdot 1 \cdot x \cos(180^\circ - \alpha)$$

$$2^2 + 1 - 2 \cdot 2 \cdot 1 \cdot \cos 2$$

$$2^2 + 1^2 + 2 \cdot 2 \cdot 1 \cdot \cos 2$$

$$x^2 + x^2 + 2 \cdot 1 \cdot x \cdot \cos 2$$

$$x^2 + x^2 = 2 \cdot 1 \cdot x \cdot \cos 2$$

$$2(2 - 5 \cos 2) = x^2$$

$$8 - 10 \cos 2 = x^2 - 10 \cos 2$$

$$8 - 10 \cos 2 = x^2$$

$$8 - 10 \cos 2 = x^2$$

$$x = \sqrt{8 - 10 \cos 2}$$

$$x = \sqrt{8 - 10 \cos 2}$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

~~отсюда по 0.0 получим $x \in (1; \frac{1}{2}) \cup (2; +\infty)$~~

Т.к. ~~$x = y^3$, а $y \in 24 \Rightarrow x \leq 24^3$~~

~~Заметим, что на отрезке $(1; \frac{1}{2})$ нет zeros~~

$$\begin{array}{r} 24^3 = \\ + 24 \quad 1 \\ \hline 96 \\ + 48 \\ \hline 576 \\ + 24 \quad 2 \quad 3 \\ \hline 2404 \\ + 1 \quad 5 \quad 2 \quad 4 \\ \hline 13824 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} -13824 \\ 2 \\ \hline 13822 \end{array}$$

$$\begin{array}{l} -1 = 13821 \\ (x-a)(x+5) \geq 0. \\ x \neq a-2 \Rightarrow a^2 \\ x = a-2. \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 3a^3 - 3a^2 - a + 1 \mid a-1 \\ \underline{3a^3 - 3a^2} \\ -a + 1 \end{array}$$

$$x=a \quad x = \frac{a^2-1}{4-2a}$$

$$1) \quad a = \frac{a^2-1}{4-2a} \Rightarrow 4a-2a^2 = a^2-1$$

$$\Leftrightarrow 3a^2 - 4a - 1 = 0$$

$$\Delta = 16 + 12 = 28$$

$$3a^2(a-1) - (a-1)$$

$$(a-1)(3a^2-1) = 0$$

$$a = \frac{4 \pm \sqrt{28}}{6} = \frac{2 \pm \sqrt{7}}{3}$$

$$a = \frac{a^2}{2a-2}$$

$$a \neq 1 \\ a \neq \sqrt{\frac{1}{3}}$$

$$3a^3 - 3a^2 - a + 1 = 0$$

$$a=1$$

$$3-3-1+1=0$$

$$2a^2 - 2a = a^2$$

$$a^2 - 2a = 0$$

$$a \neq 0 \quad a \neq 2$$

$$\frac{a^2-1}{4-2a} = \frac{a^2}{2a-2}$$

$$(a^2-1)(2a-2) = a^2(4-2a)$$

$$2a^3 - 2a^2 - 2a + 2 = 4a^2 - 2a^3$$

$$6a^3 - 6a^2 - 2a + 2 = 0$$

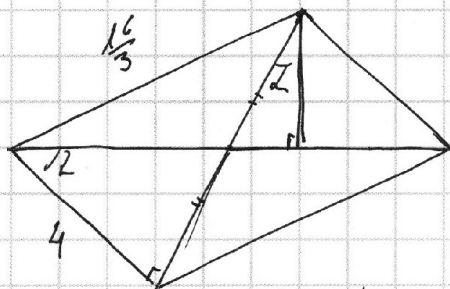


На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



$$7\left(\frac{x+1}{x-1}\right) - 3\left(\frac{y+1}{y-1}\right) > 0$$

$$7\left(\frac{x+1}{x-1}\right) \geq 3\left(\frac{24+1}{24-1}\right) = 3 \cdot \frac{25}{23}$$

$$\boxed{\frac{x+1}{x-1} \geq \frac{3 \cdot 25}{7 \cdot 23}}$$

$$(x-y)^2 + 2y^2 = 0$$

$$(x-a)^2 ((x-y)^2 + 2y^2)$$

$$\frac{16x + 236}{x-1} \geq 0$$

$$-\frac{236}{16} \quad 1$$

$$3\log_x 3 + \log_y 3 - 16\log_{xy} 3 = 0$$

$$\frac{9}{\log_3 x} + \frac{1}{\log_3 y} - \frac{16}{\log_3 xy}$$

$$\frac{9ab + 9b^2 + a^2 + ab - 16ab}{ab(a+b)} = 0$$

$$a = 3b, \log_3 x = 3\log_3 y, x = y^3$$

$$3\log_x 3 + \log_y 3 - 16\log_{xy} 3$$

$$x^2 - 4x + 1 + (-2a+4)x + a^2 - x^2 =$$

$$x^2 + x(-2a+4-4) + a^2 =$$

$$x^2 + 2ax + a^2 = (x+a)^2 \quad (1)$$

$$(-2a+2)x + a^2$$

$$x(2-2a) + a^2$$

$$(x(2-2a) + a^2) \quad (2)$$

$$\frac{(x+1) \cdot 7 \cdot 23 - (x-1) \cdot 3 \cdot 25}{(x-1) \cdot 7 \cdot 23} \geq 0$$

$$\frac{(x+1) \cdot 7 \cdot 23 - (x-1) \cdot 3 \cdot 25}{(x-1)} \geq 0$$

$$\frac{(7 \cdot 23 - 3 \cdot 25)x + 7 \cdot 23 + 3 \cdot 25}{x-1} \geq 0$$

$$\begin{cases} x \in (0; 1) \cup (1; +\infty) \\ y \in (0; 1) \cup (1; 24] \end{cases} \quad (3)$$

$$\frac{9}{a} + \frac{1}{b} - \frac{16}{a+b} = 0$$

$$\frac{(9b+a)(a+b) - 16ab}{ab(a+b)} = 0$$

$$\frac{9b+a}{ab} - \frac{16}{a+b} = 0$$

$$\frac{9b^2 + a^2 - 16ab}{ab(a+b)} = 0$$

$$\frac{(a-3b)^2}{ab(a+b)} = 0$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$f(x) = x^2 + bx + c$$

$$1) x^2 + bx + c = -2x^2$$

$$3x^2 + bx + c = 0$$

$$\Delta: b^2 - 4 \cdot 3 \cdot c = 0$$

$$x^2 + bx + c = -6$$

$$x^2 + bx + c + 6 = 0$$

$$\Delta = b^2 - 4 \cdot (c + 6) = 0$$

$$b^2 - 12c = 0$$

$$b^2 - 4c - 24 = 0$$

$$-8c + 24 = 0$$

$$c = \frac{24}{8} = 3$$

$$\frac{76}{75} \cdot \frac{151}{2} < \frac{152}{2} =$$

$$\frac{151}{2} < \frac{152}{2} =$$

$$\frac{76}{75} \cdot \frac{152}{2} =$$

$$b^2 = 12 \cdot 3$$

$$b = 2 \cdot 3 = 6$$

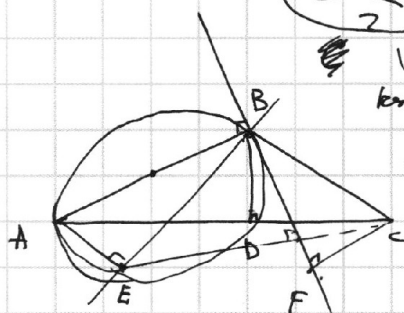
$$b = 6$$

$$\frac{152 \cdot 60}{2} = 4560$$

$$y: x \quad 152 \cdot 60 \text{ всего пар}$$

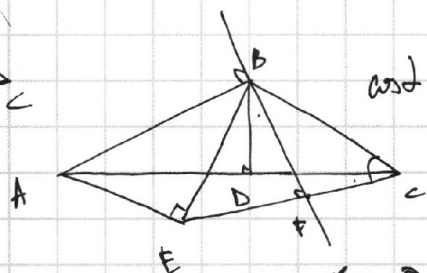
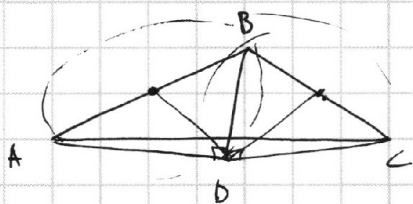
$$y > x \quad 5^n \cdot 7^k \quad ; \quad 5^{151-n} \cdot 7^{600-k}$$

$$3 \log_x 3 + \log_y 3 + 8 \log_{xy} 3 = 0$$



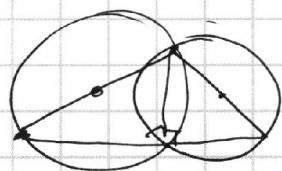
km - km

$$y > x - 1$$



$$\cos \alpha = \frac{3}{4}$$

$$\begin{array}{r} 76 \\ + 300 \\ \hline 22800 \\ - 22800 \\ \hline 76 \end{array}$$



$$3 \log_x 3 + \log_y 3 + 8 \log_{xy} 3 = 0$$

$$9 \log_x 3 + \log_y 3 + 16 \log_{xy} 3 = 0$$

$$9 \log_3 x + \log_3 y + 16 \log_3 xy = 0$$

$$\frac{9 \log_3 y + \log_3 x}{\log_3 x \cdot \log_3 y} = \log_3 x \cdot \log_3 y$$

$$D.O: \begin{cases} x > 0 & x \neq 1 \\ y > 0 & y \neq 1 \\ xy > 0 & xy \neq 1 \end{cases}$$

$$4 \cdot \min(a, b) = 5(a - b)^2$$

$$5 \cdot \max(a, b) = \max(a, b)$$

$$a > b$$

$$4 \cdot b = 5(a - b)^2$$

$$5 \cdot a = \max(a, b)$$

$$a = 6, b = 5$$

$$(a - b)^2 = 1 \quad a - b = 2$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

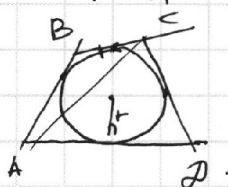
$$x-a=0$$

$$(x-y)^2+3y^2=0$$

$$x=a$$

$$x=y=0. \quad (-2a+4)x+aa^2-1=0$$

$$x = \frac{1-a^2}{4-2a}$$



$$PQ = \left| \frac{2}{\sqrt{5}} - 2\sqrt{5} \right| = \left| \frac{2-10}{\sqrt{5}} \right| = \frac{8}{\sqrt{5}} = \frac{8\sqrt{5}}{5}$$

$$MN = \sqrt{5}$$

$$\cos(\alpha+\beta) = \frac{3}{4}$$

$$\frac{BF}{BC} = \sin(\alpha+\beta)$$

$$\frac{BD}{BC} = \sin(\beta)$$

$$\frac{BF}{BD} = \frac{\sin(\alpha+\beta)}{\sin\beta}$$

$$\cos(\alpha+\beta) = \frac{3}{4}$$

$$\sin(\alpha+\beta) = \frac{\sqrt{7}}{4}$$

$$\frac{3}{4} = \frac{\sqrt{2}}{EB}$$

$$EB = \frac{4\sqrt{2}}{3}$$

$$\frac{\sqrt{16-9}}{4} = \frac{36}{4 \cdot 3}$$

$$\frac{4\sqrt{2}}{3} = \sin(\alpha+\beta) = \frac{\sqrt{2}}{4}$$

$$\frac{4\sqrt{2}}{3} \cdot \frac{4}{\sqrt{2}} = AB$$

$$AB = \frac{16}{3}$$

$$7 \cdot 7 + 7 \cdot 9 =$$

$$\sqrt{\frac{7 \cdot 16}{9}} =$$

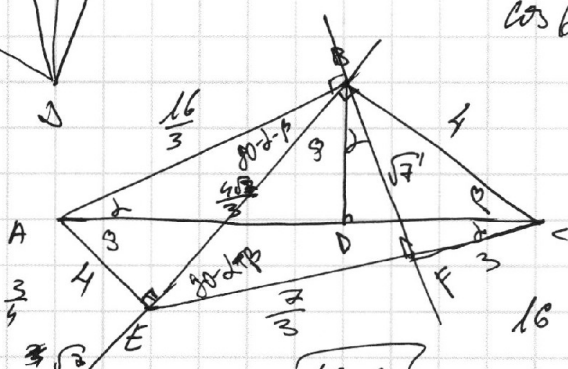
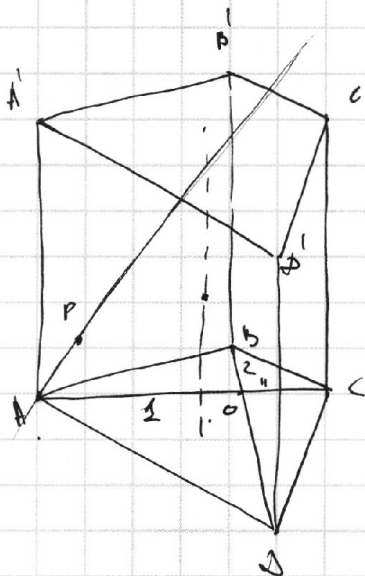
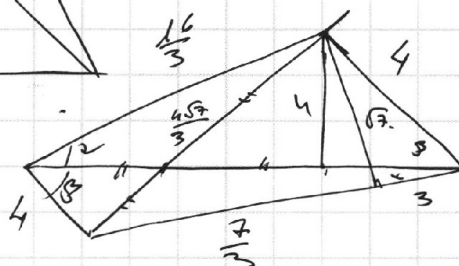
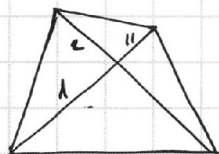
$$\frac{16 \cdot 7}{9} - 7 = \frac{16 \cdot 7 - 7 \cdot 9}{9} = \frac{7 \cdot 7}{9} =$$

$$\left(\frac{16}{3}\right)^2 - \frac{16 \cdot 7}{9} = \frac{16 \cdot 9}{3^2} = \frac{4 \cdot 3}{3} = 4$$

$$4 \left(4 + \frac{7}{3}\right) = 4 \left(\frac{36+7}{9}\right) = \frac{4}{9} \cdot 43$$

$$16 \left(1 + \frac{7}{9}\right)$$

$$\frac{16 \cdot 16}{9}$$



$$(x-1)^2 + (x+2)^2 + (x^2-1)^2 = 0$$

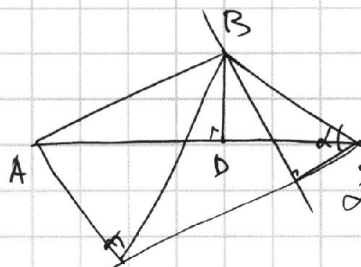


На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7
☐ ☐ ☐ ☐ ☐ ☐ ☐

СТРАНИЦА
 _ ИЗ _

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



~~1) $y = 2x - 1$~~

$$1) y = 2x - 1 = (-2a + 4)x + a^2 - 1$$

$$\frac{5 \pm 3}{4} \rightarrow \frac{2}{2}$$

$$y^2 - 5y + 2$$

$$d = -2a + 4$$

$$9 \log_x 3 + \log_y 3 - 10 \log_{xy} 3 = 0$$

$$S = 25 - 4 \cdot 2 \cdot 2$$

$$-1 = a^2 - 1$$

$$a = 0$$

$$\frac{3y+3}{y-1} < \frac{7x+7}{x-1}$$

$$\begin{array}{r} + 23 \\ - 7 \\ \hline 16 \end{array}$$

$$(-2a + 4)x + a^2 - 1 - 2x + 1$$

$$\Rightarrow (x(-2a + 4 - 2) + a^2) = 0$$

$$\begin{array}{r} 161 \\ + 75 \\ \hline 236 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 25 \\ + 3 \\ \hline 28 \end{array}$$

$$(x(-2a + 2) + a^2) = 0$$

$$a^2 = x(2a - 2)$$

$$x = \frac{a^2}{2a - 2} = \frac{a^2}{2(a - 1)}$$

$$y = 2x - 1$$

$$y = \frac{a^2}{a - 1} - 1 = \frac{a^2 - a + 1}{a - 1}$$

$$2 = 1 - 4 = 0$$

$$\frac{a^2 - a + 1}{a - 1}$$

$$3 \left(\frac{y+1}{y-1} \right) < 7 \left(\frac{y^3+1}{y^3-1} \right)$$

$$3 \left(\frac{y+1}{y-1} \right) < 7 \frac{(y+1)(y^2+y+1)}{(y-1)(y^2+y+1)}$$

$$2(x - 2)(x - \frac{1}{2})$$

$$2(x^2 - \frac{5}{2}x + 1)$$

$$(x - y)^2 + 2y^2 = 0$$

$$\left(\frac{y+1}{y-1} \right) \left(\frac{7(y^2 - y + 1)}{y^2 + y + 1} - 3 \right)$$

$$x - y = 0 \quad y = 0 \quad x = 0$$

$$x^2 - 4x + 1 + (-2a + 4)x + a^2 - 1$$

$$x^2 + x(-2a + 4 - 4) + a^2$$

$$x^2 + x \cdot 2a + a^2$$

$$(x - a)^2 (x(-2a + 2) + a^2) = 0 \quad \Delta = 1 - 4$$

$$7 \left(\frac{x+1}{x-1} \right) - 3 \left(\frac{y+1}{y-1} \right) > 0$$

2 решение.

$$(x - a)^2 (x(2 - 2a) + a^2) ((x - y)^2 + 3y^2) = 0$$

$$1) x - a = 0 \quad x = a$$

$$x(2 - 2a) + a^2 = 0$$

$$2a - 2a^2 + a^2 = 0$$

$$2a = a^2 \quad a(a - 2) = 0$$



при $a = 0$
 $a = 2$

при $a = 0$
 1 решение?

$$\left(\frac{y+1}{y-1} \right) \left(\frac{4y^2 - 10y + 4}{y^2 + y + 1} \right) > 0$$