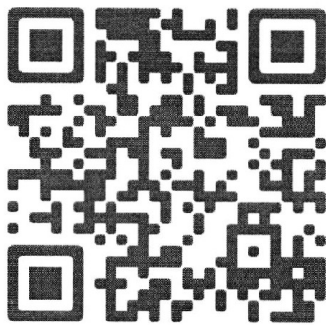




МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

11 КЛАСС. Вариант 12



1. [3 балла] Дан приведённый квадратный трёхчлен $f(x)$ такой, что уравнение $f(x) = -2x^2$ имеет единственное решение, а также уравнение $f(x) = -6$ имеет единственное решение. Найдите сумму корней уравнения $f(x) = 0$.
2. [3 балла] Сколькими способами можно представить число $n = 5^{151} \cdot 7^{600}$ в виде произведения двух натуральных чисел x и y , где y делится на x ?
3. [5 баллов] Найдите количество пар целых чисел $(x; y)$, удовлетворяющих системе

$$\begin{cases} 3 \log_x 27 + \log_y 3 + 8 \log_{xy} \frac{1}{9} = 0, \\ \frac{3y+3}{y-1} < \frac{7x+7}{x-1}, \\ y \leq 24. \end{cases}$$

4. [5 баллов] Найдите все пары натуральных чисел $(a; b)$ такие, что

$$\begin{cases} 4 \cdot \min(a; b) = 5(a - b)^2, \\ 5 \cdot \max(a; b) = \text{НОК}(a; b). \end{cases}$$

5. [5 баллов] На сторонах BA и BC треугольника ABC с тупым углом B как на диаметрах построены окружности ω_1 и ω_2 соответственно, пересекающиеся в точках B и D . Хорда BE окружности ω_1 перпендикулярна BC , а хорда BF окружности ω_2 перпендикулярна CE и касается ω_1 . Найдите отношение $BF : BD$, если $\cos \angle BCE = \frac{3}{4}$.
6. [5 баллов] При каких значениях параметра a система

$$\begin{cases} (y + x^2 - 4x + 1)(x^2 - 2xy + 3y^2)(y - 2x + 1) = 0, \\ y = (-2a + 4)x + a^2 - 1 \end{cases}$$

имеет ровно 2 решения?

7. [6 баллов] В прямую четырёхугольную призму $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ вписана сфера ω . Луч с началом в точке A пересекает ω в точках P и Q , а луч с началом в точке C пересекает ω в точках M и N . Пусть O — точка пересечения диагоналей четырёхугольника $ABCD$. Найдите объём призмы $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ и расстояние ρ от центра ω до плоскости PAC , если известно, что $AO = 1$, $BO = 2$, $CO = 11$, $AP = \frac{2}{\sqrt{5}}$, $AQ = 2\sqrt{5}$, $CM = 4\sqrt{5}$, $CN = 5\sqrt{5}$.



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.



СТРАНИЦА
1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

N1.

$f(x) = x^2 + bx + c$; известно, что $f(x) = -2x^2$ имеет решение
и $f(x) = -6$ имеет решение.

$$x^2 + bx + c = -2x^2$$

$$3x^2 + bx + c = 0, \text{ так как корни, то } D = 0.$$

$$D = 0; b^2 - 12c = 0.$$

$$x^2 + bx + c = -6$$

$$x^2 + bx + c + 6 = 0, \text{ т.к. корни, то } D = 0$$

$$D = 0; b^2 - 4c - 24 = 0.$$

тогда перейдем к системе:

$$\begin{cases} b^2 - 4c - 24 = 0 \\ b^2 - 12c = 0 \end{cases};$$

$$\begin{cases} b^2 = 12c \\ 12c - 4c - 24 = 0 \end{cases}; \begin{cases} b^2 = 12c \\ c = 3 \end{cases}; \begin{cases} b^2 = 36 \\ c = 3 \end{cases}$$

$$\begin{cases} b = 6 \\ c = 3 \end{cases} \text{ или } \begin{cases} b = -6 \\ c = 3 \end{cases}. \quad f(x) = x^2 + 6x + 3 = 0$$

$$\text{или} \quad f(x) = x^2 - 6x + 3 = 0$$

По теореме Виета $x_1 + x_2 = -b$, тогда $\begin{cases} x_1 + x_2 = -6 \\ b = 6 \end{cases}$ или $\begin{cases} x_1 + x_2 = 6 \\ b = -6 \end{cases}$.

Ответ: $x_1 + x_2 = \pm 6$.



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

1	2	3	4	5	6	7
☐	☒	☐	☐	☐	☐	☐

СТРАНИЦА
1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

№2.

$$n = 5^{151} \cdot 7^{600}, \text{ т.к. } 5 \text{ и } 7 \text{ простые числа, то } n = x \cdot y,$$

где x и y это произведение 5 и 7 в некотором степенях $\alpha; \beta; \gamma; \delta$, где $\alpha, \beta, \gamma, \delta \in \mathbb{Z}$, но $\alpha, \beta, \gamma, \delta \geq 0$.

т.к. $y \mid x$, то пусть $y = 5^{\alpha} \cdot 7^{\beta}$, а $x = 5^{\gamma} \cdot 7^{\delta}$ причем $\alpha \geq \gamma$ и $\beta \geq \delta$.

$$x \cdot y = 5^{151} \cdot 7^{600}; \quad 5^{\alpha+\gamma} \cdot 7^{\beta+\delta} = 5^{151} \cdot 7^{600}.$$

$\begin{cases} \alpha + \gamma = 151 \\ \beta + \delta = 600 \end{cases}$ количество способов набрать сумму указываемых. причем α, γ = 46, т.к. можно разбить на пары вида:

γ	α
0	151
1	150
...	...
44	47
45	46

аналогично и для $\beta + \delta = 600$

пары:

δ	β
0	600
1	599
...	...
300	300

кол. способов 301.

тогда представит число $n = 5^{151} \cdot 7^{600}$, можно $301 \cdot 46$ различными способами.

Ответ: 22876.



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

1 2 3 4 5 6 7
☐ ☐ ☒ ☐ ☐ ☐ ☐

СТРАНИЦА

1 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\begin{cases} 3 \log_x 27 + \log_y 3 + 8 \log_{xy} \frac{1}{9} = 0 & (1) \\ \frac{3y+3}{y-1} < \frac{7x+7}{x-1} & (2) \\ y \leq 24 & (3) \end{cases}$$

$$\text{OD3: } \begin{cases} x > 0 \\ y > 0 \\ xy > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 0 \\ y > 0 \\ x \neq 1 \\ y \neq 1 \\ xy \neq 1 \end{cases}$$

$$(1): \frac{1}{\log_3 x} + \frac{1}{\log_3 y} + \frac{1}{\log_3 xy} = 0$$

$$\frac{9}{\log_3 x} + \frac{1}{\log_3 y} = \frac{16}{\log_3 x + \log_3 y} \quad ; \quad \text{пусть } \log_3 x = a, \log_3 y = b.$$

$$\frac{9b+a}{ab} = \frac{16}{a+b} \quad ; \quad \begin{aligned} 9ab + ab^2 + a^2 + ab &= 16ab \\ a^2 - 6ab + ab^2 &= 0 \\ (a-3b)^2 &= 0 \\ a &= 3b. \end{aligned}$$

$$\log_3 x = 3 \cdot \log_3 y$$

$$\log_3 x = \log_3 y^3$$

$$x = y^3$$

$$(2): \frac{3y+3}{y-1} < \frac{7y^3+7}{y^3-1} \quad ; \quad \frac{3y+3}{y-1} - \frac{7y^3+7}{y^3-1} < 0$$

$$\frac{(3y+3)(y^2+y+1) - (7y^3+7)}{(y^3-1)} < 0$$

$$\frac{3(y+1)(y^2+y+1) - 7(y+1)(y^2-y+1)}{(y^3-1)} < 0$$

$$\frac{(y+1)(3y^2+3y+3 - 7y^2+7y-7)}{(y^3-1)} < 0$$

$$\frac{-2(y+1)(y-2)(y-\frac{1}{2})}{(y^3-1)} < 0$$

заменяем на выражение того же знака

$$\frac{(y+1)(y-2)(y-\frac{1}{2})}{y-1} > 0$$

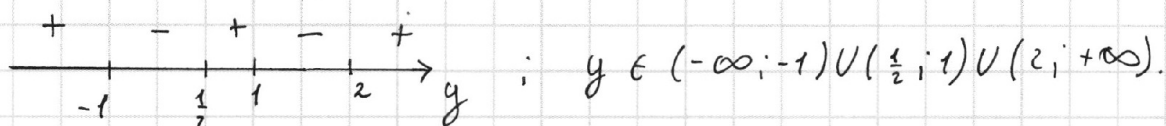


На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☒	☐	☐	☐	☐

СТРАНИЦА
2 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



возвращаясь к (3) неравенству и пересекая с ОДЗ, получаем, что

$$y \in (0; -1) \cup (\frac{1}{2}; 1) \cup (2; 24].$$

к каждому y принадлежит только одно значение x ,
тогда сколько целых y , то столько и решений.

на промежутке $(0; -1)$ нет целых y

на промежутке $(\frac{1}{2}; 1)$ нет целых y

на промежутке $(2; 24)$ y имеет 22 целых значения

Ответ: 22 пары, в которых $x, y \in \mathbb{Z}$.



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

1 2 3 4 5 6 7

☐ ☐ ☐ ☒ ☐ ☐ ☐

СТРАНИЦА
1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

N4

$$\begin{cases} 4 \cdot \min(a; b) = 5(a-b)^2 \\ 5 \cdot \max(a; b) = \text{НОК}(a; b) \end{cases}$$

Пусть не угадали обиходности $a > b$, тогда

$$\begin{cases} 4 \cdot b = 5a^2 - 10ab + 5b^2 & (1) \\ 5a = \text{НОК}(a; b) & (2) \end{cases}$$

(1): $5a^2 - 10ab + 5b^2 - 4b = 0$, рассмотрим как кв. ур. относительно "a".
 $D = 100b^2 - 160b^2 + 80b = 80b$.

$$a = \frac{10b \pm \sqrt{80b}}{10}; \quad b \pm \frac{2\sqrt{5b}}{5}; \quad \text{т.к. } a > b, \text{ то}$$

$$a = b + \frac{2\sqrt{5b}}{5}; \quad \text{т.к. } b, a \in \mathbb{N}, \text{ то } \frac{2\sqrt{5b}}{5} \in \mathbb{N}.$$

тогда $b = 5k^2$, где $k \in \mathbb{N}$.

$$a = 5k^2 + 2k; \quad b = 5k^2.$$

(2): $5k(5k+2) = \text{НОК}(k(5k+2); 5k^2)$.

$\text{НОК}(k(5k+2); 5k^2) = 5 \cdot k \cdot C$, т.к. в ~~обиходности~~ переменных есть общий множитель 5 и k , тогда в НОК можно будет множитель $5k$.
 при этом ~~составим~~ $C = \text{НОК}(5k+2; k)$.

тогда $5k(5k+2) = 5k \cdot C \quad | : 5k; \quad k \neq 0.$

$$5k+2 = C$$

$$5k+2 = \text{НОК}(5k+2; k). \Rightarrow 5k+2 : k. \quad ; \quad ?$$

$$5k+2 \equiv 0 \pmod{k}; \quad 5k \equiv 0 \pmod{k}, \text{ тогда } 2 \equiv 0 \pmod{k}; \quad k=1 \text{ или } 2 \nmid k$$

$$k=2.$$

$$\begin{cases} a = 5 \cdot 4 + 4 = 24 \\ b = 5 \cdot 4 = 20 \end{cases} \quad ; \quad k=2$$

$$\text{или } \begin{cases} a = 5 + 2 = 7 \\ b = 5 \cdot 1 = 5 \end{cases}, \quad k=1.$$

Аналогичное решение при $a < b$, мы рассмотрим кв. ур. относительно b , на b будут такие же ограничения, как на a в случае $a > b$.

~~Если же $a = b$, то $(a-b)^2 = 0$, тогда $\min(a; b) = 0$.~~

Если же $a = b$, то $(a-b)^2 = 0$, тогда $\min(a; b) = 0$, значит $a = b = 0$ тогда $a, b \notin \mathbb{N}$.

Ответ: $(24; 20)$; $(7; 5)$; $(20; 24)$; $(5; 7)$.



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☒	☐

СТРАНИЦА
1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

N6

$$\begin{cases} (y+x^2-4x+1)(x^2-2xy+3y^2)(y-2x+1)=0 & (1) \\ y=(-2a+4)x+a^2-1 & (2) \end{cases}$$

(2): зависимость линейная, тогда ^{только в д.} линейные ур.

(1):
$$\begin{cases} y+x^2-4x+1=0 & (3) \\ x^2-2xy+3y^2=0 & (4) \\ y-2x+1=0 & (5) \end{cases}$$

(4): $x^2-2xy+3y^2=0$; $(x^2-2xy+y^2)+2y^2=0$; $(x-y)^2+2y^2 \geq 0$

равенство достигается только при $y=0$ и $x=y$.

значит $x=y=0$. подставим эти значения

в систему: ~~тогда~~ (3) ~~тогда~~ $\neq 0$; ~~тогда~~ (2): $a^2=1$
(5) $\neq 0$ $a=\pm 1$.

~~тогда~~ $y=a^2-1=0$ ~~тогда~~ $x=2$ ~~тогда~~ $x=1$.

при ~~тогда~~ $x=0$ и $y \geq 0$, равно 0 ~~тогда~~ $x=0$ ~~тогда~~ $y=0$. при ~~тогда~~ $x=0$ ~~тогда~~ $y=0$.

в (3) подставим (2): $-2ax+4x+a^2-1+x^2-4x+1=0$

$x^2-2ax+a^2=0$

$(x-a)^2 \geq 0$, равенство возможно только $x=a$; $y=-a^2+4a-1$.

в (5) подставим (2): $-2ax+4x+a^2-1-2x+1=0$

$2x(1-a)+a^2=0$

$x=\frac{-a^2}{2(1-a)}$

$y=\frac{2a^3-4a^2}{2(1-a)}+a^2-1=\frac{a^2-a+1}{a-1}$.

при $a=0$, решения (3) и (5) совпадают.

при $a=1$ (5) не имеет решений

при $a=\pm 1$ у (4) есть решения.

$a=-1$, у нас 3 решения

$a=0$; 1 решение

$a=2$; 1 решение

$a=\pm 1$, 2 решения.

Ответ: ~~тогда~~ $a \in (-\infty; -1) \cup (-1; 0) \cup (0; 2) \cup (2; +\infty)$.



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

☐ 1

☐ 2

☐ 3

☐ 4

☐ 5

☐ 6

☐ 7

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Пусть $a > b$, тогда
$$\begin{cases} 4b = 5a^2 - 10ab + 16b^2 & (1) \\ 5a = \text{НОК}(a; b) & (2) \end{cases}$$

(1). $5a^2 - 10ab + 16b^2 - 4b = 0$. относительно a .

$D = 100b^2 - 100b^2 + 80b = 80b$.

$a = \frac{10b \pm \sqrt{80b}}{10} = b \pm \frac{2\sqrt{5b}}{5}$; если $a = b - \frac{2\sqrt{5b}}{5}$, то $a < b$. что не пог.

$a = \frac{b + 2\sqrt{5b}}{5}$, но $a \in \mathbb{N}$,

тогда $\frac{2\sqrt{5b}}{5} \in \mathbb{N}$.

$b = k^2 \cdot 5$, где $k \in \mathbb{N}$.

$a = 5k^2 + 2k = k(5k+2)$.

$b = k^2 \cdot 5$.

(2). $5k(5k+2) = \text{НОК}(k(5k+2); k^3 \cdot 5)$

$25k^2 + 10k = \text{НОК}(5k^2 + 2k; 5k^2)$.

$k=1$. $\text{НОК}(7; 5) = 35$; $25+10=35$.

$k=2$; $\text{НОК}(24; 20) = \frac{8 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 20}{4} = 120$. $25 \cdot 4 + 20 = 120$.

$4 \cdot 6 \cdot 5$
 $8 \cdot 3$

$k=3$; $\text{НОК}(k(5k+2); 5k \cdot k) =$

$\text{НОК}(1(5+2); 1 \cdot 5) = 5$

$5k$

$\text{НОК}(2(10+2); 2 \cdot 2 \cdot 5) = 2 \cdot 2 \cdot 5 \cdot 3 = 60$.

k ; $5k+2$

$5 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 14$.

2; 12 ; $2^2 \cdot 3$.

$5k+2 = \text{НОК}(5k+2; k)$;

3; $15+2=17$.

$5k+2 \div k$.

$5k+2 \equiv 0 \pmod{k}$

$5k+2 \equiv 0 \pmod{k}$

$k=1$;
 $k=2$.



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

1
☐

2
☐

3
☐

4
☐

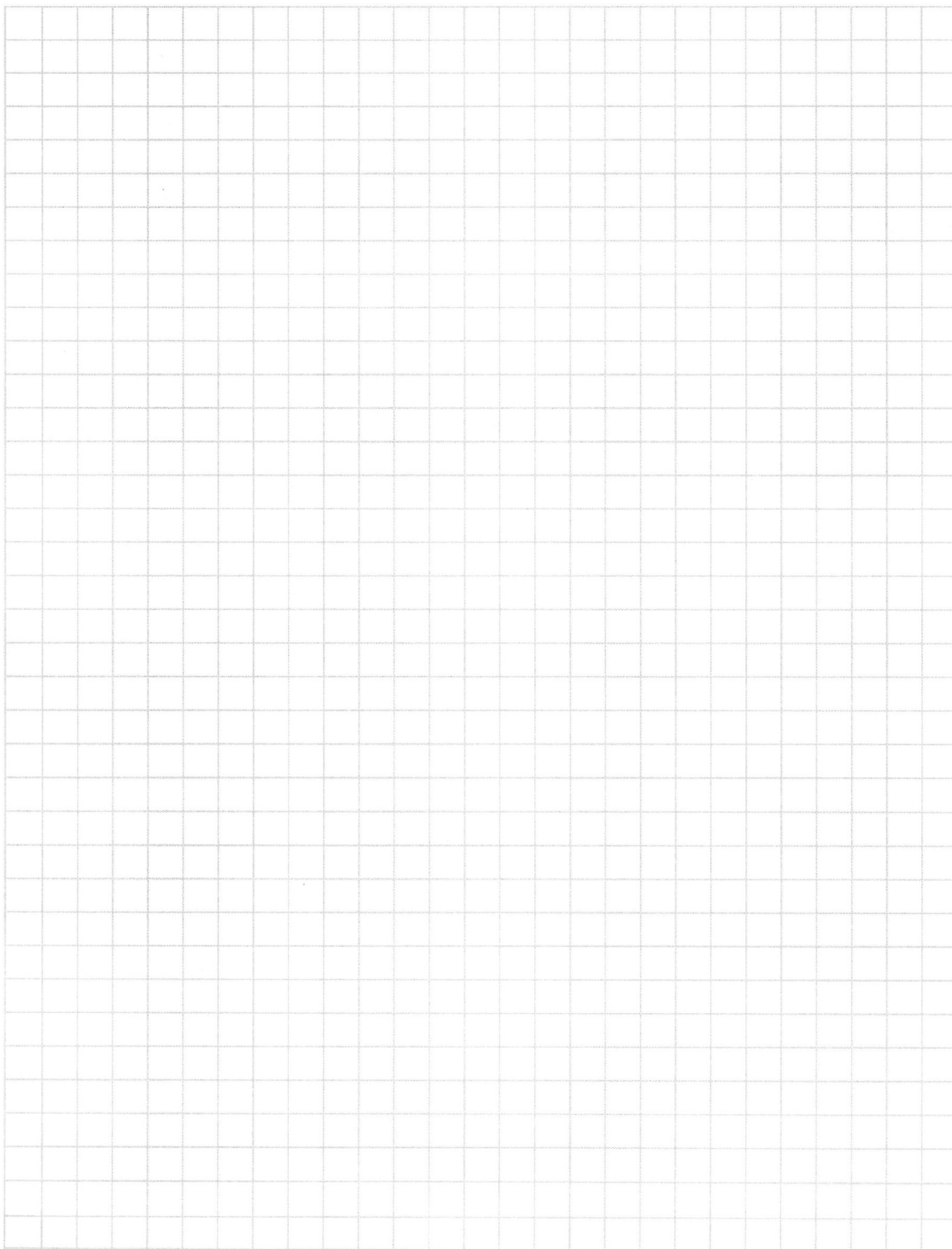
5
☐

6
☐

7
☐

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. **Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно.** Порча QR-кода недопустима!



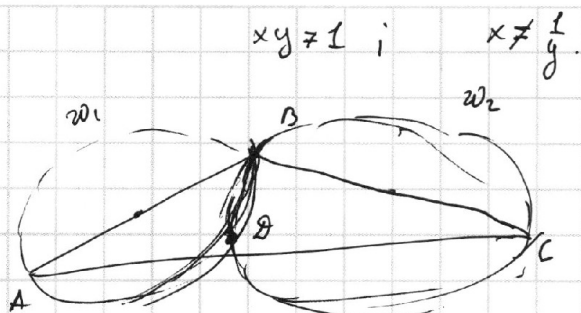


На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи** отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
___ ИЗ ___

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



$$x = y^3$$

$$\begin{aligned} 2a^3 - 4a^2 + 2a^2 - 2a^3 - 2 + 2a \\ - 2a^2 + 2a - 2 \\ 2a^2 - 2a + \cdot \\ \frac{a^2 - a + 1}{a - 1} \end{aligned}$$

$$x = 0 ; a = 0$$

$$a = 1 ;$$

$$y + y + 1 > 0 \quad a = 1$$

$$y = 1$$

$$-4y^2 + 10y - 4 = 0$$

$$-(2 \cdot 2y^2 - 5y + 2)$$

$$D = 25 - 16 = 9 \quad -1 + 4 - 1$$

$$y = \frac{5 \pm 3}{4} = 2 \text{ и } \frac{1}{2}$$

BE касает w_1 в точке B.

$$\cos \alpha = \frac{3}{4}$$

$a = 1$ решение (5) нет.

$a = 0$ или $a \geq 2$ решение

(3), (5) совпадают

$$a = 1 ;$$

$$y = 2x ; \text{ одно решение.}$$

$$y = 6x \text{ одно решение.}$$

$$x^2 - 4x^2 + 4x^2 + 4x^2 = 0$$

$$(3) ; (5) \quad \vee$$

$$1 \quad 1$$

$$a = \pm 1 \quad (3)$$

$$a = 1 ;$$

$$x^2 - 6x + 3 = -2x$$

$$3x^2 - 6x + 3 = 0$$

$$x^2 + 2x + 1 = 0$$

$$(y^3 - 1) = (y - 1)(y^2 + y + 1)$$

$$-7(y^3 + 1) = 7(y + 1)(y^2 - y + 1)$$

$$x^2 - 6x + 3 = 0$$

$$x^2 + 6x + 9 = 0$$

$$\begin{array}{r} 301 \\ \times 46 \\ \hline 1806 \\ 1204 \\ \hline 13846 \end{array}$$

$$1806$$

$$1204$$

$$13846$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА

из

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$4a = 5a^2 - 10ab + 5b^2$$

$$5a^2 - a(10b + 4) + 5b^2 = 0$$

$$\Delta = 100b^2 + 80b + 16 - 60b^2 = 40b^2 + 80b + 16$$

$$40b^2 + 80b + 16 = 4(10b^2 + 20b + 4)$$

$$4b = 5a^2 - 10ab + 5b^2$$

$$5a^2 - 10ab + 5b^2 - 4b = 0$$

$$\Delta = 100b^2 - 100b^2 + 80b = 80b$$

$$a = \frac{10b \pm \sqrt{80b}}{10}$$

$$(1): 4a = 5a^2 - 10ab + 5b^2$$

$$a = \text{НОК}(a; b)$$

$$a : b$$

$$(1; 5)$$

$$b = 5; a = 4.$$

$$5 \cdot a = \text{НОК}(a; b)$$

$$5 \cdot 4 = \text{НОК}(4; 5); 4 \cdot 5;$$

$$b = 20; a = 28.$$

$$2 \cdot 5 \cdot 28 = \text{НОК}(20; 28)$$

$$5 \cdot 2^2 \cdot 7$$

$$5 \cdot 7 \cdot 4$$

$$\text{НОК}(a; b) = 5a$$

$$b = 5 \cdot k, k = a$$

$$b = k^2 \cdot 5, \text{ где } k \in \mathbb{N};$$

$$\text{НОК}(5k^2; a) = 5a; \quad a = b + \frac{2\sqrt{5b}}{5} = k^2 \cdot 5 + 2k$$

$$\text{НОК}(5k^2; 5k+2) = 5(5k+2); \quad a = k(5k+2)$$

$$\text{НОК}(5k^2; 5k+2) = 25k+10; \quad 5k^2 < 5k+2;$$

$$b < a.$$

$$\text{НОК}(3; 2)$$

$$\text{НОК}(6; 18)$$

$$6; 18; \text{НОК}(3; 6)$$

$$6 \cdot \text{НОК}(1; 5) \cdot 3 \cdot 5$$

$$6 \cdot 3 = 18 \quad (\text{НОК}(3; 5))$$

$$\text{НОК}(6; 21)$$

$$3 \cdot \text{НОК}(2; 7)$$

$$3 \cdot 14;$$

$$\sqrt{80b} \in \mathbb{N};$$

$$\sqrt{80b} = 4\sqrt{5b}$$

$$\frac{10b \pm 4\sqrt{5b}}{10}; \quad b \pm \frac{2\sqrt{5b}}{5};$$

$$\frac{\sqrt{5b}}{5} \in \mathbb{N}.$$

$$b = 5; \quad b = 4 \cdot 5;$$

$$a = 5 \pm 2 = 4; \quad b = 16 \cdot 5$$

$$24 - 3 + 1 = 22$$

$$a = 16 \cdot 5 +$$

$$a = 4 \cdot 5 + 4 = 24; \quad b = 20$$

$$5 \cdot 24 = \text{НОК}(20; 24)$$

$$5 \cdot 2^2 \cdot 3 \cdot 2^2$$

$$5 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 4$$

$$b = 80; \quad a = 80 + 8 = 88.$$

$$2 \cdot 5 \cdot 2^2 \cdot 11$$

$$2^4 \cdot 5 \cdot 11 = 2^4 \cdot 55$$

$$5 \cdot 88$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

☐ 1

☐ 2

☐ 3

☐ 4

☐ 5

☐ 6

☐ 7

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$4 \cdot \min(a, b) = 5(a - b)^2$$

$$a, b \in \mathbb{N}$$

$$5 \cdot \max(a, b) \geq \text{НОК}(a, b)$$

$$\text{НОК}(5, 4) = 5 \cdot 4$$

$$\text{НОК}(6, 3) = 2 \cdot 3, \quad 3$$

$$5 \cdot \max(a, b). \quad \text{Пусть } a > b.$$

$$\begin{cases} 5 \cdot a = \text{НОК}(a, b) \\ 4 \cdot b = 5 \cdot (a - b)^2 \end{cases}$$

$$\text{если } \text{НОК}(a, b) = 5 \cdot a.$$

~~$$b \cdot 5$$~~

$$b \cdot 5$$

$$b = 5k.$$

$$4 \cdot 5k = 5(a - b)^2$$

$$4 \cdot k = (a - b)^2$$

$$f(x) = x^2 + bx + c. \quad \text{N1 V}$$

$$f(x) = -2x^2 - \text{сг. решение.}$$

$$f(x) = -6 - \text{сг. решение.}$$

$$f(x) = 0?$$

$$x^2 + bx + c = -2x^2$$

$$3x^2 + bx + c = 0$$

$$D = b^2 - 12c = 0, \quad \text{т.к. сг. решение.}$$

$$x^2 + bx + c = -6$$

$$x^2 + bx + c + 6 = 0$$

$$D = 0; \quad b^2 - 4c - 24 = 0.$$

$$\begin{cases} b^2 - 12c = 0 & ; \quad 36 - 36 = 0 \\ b^2 - 4c - 24 = 0 & \quad 36 - 12 - 24 = 0. \end{cases}$$

$$b^2 = 12c; \quad 12c - 4c - 24 = 0$$

$$8c = 24$$

$$c = 3$$

$$b^2 = 12 \cdot 3 = 36; \quad b = \pm 6.$$

$$\begin{cases} c = 3 \\ b = 6 \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} c = 3 \\ b = -6. \end{cases}$$

$$x_1 + x_2 = \pm 6.$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

1 2 3 4 5 6 7

☐ ☐ ☐ ☐ ☐ ☐ ☐

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

N3

$$\begin{cases} 3\log_x 27 + \log_y 3 + 8\log_{xy} \frac{1}{9} = 0 \\ \frac{3y+3}{y-1} < \frac{4x+4}{x-1} \\ y \leq 24 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x, y \in \mathbb{Z} \\ 0 < 3 - \frac{7}{x} \\ \begin{cases} x > 0 \\ y > 0 \\ xy > 0 \\ y-1 \neq 0 \\ x-1 \neq 0 \end{cases} \end{cases}$$

$$\begin{aligned} k+p &= 1 \\ y+z &= 2 \\ k &= 0, 1 \\ \begin{array}{r} 1 & 0 \\ 0 & 2 \\ 1 & 1 \\ 2 & 0 \end{array} \end{aligned}$$

N2 ✓

$$n = 5^{151} \cdot 7^{600}, \quad n = xy, \text{ найдем } y \div x.$$

$$n = 5^{151} \cdot 7^{600}, \text{ а } 5, 7 \text{ простые числа, то}$$

$$\text{и } x, y \text{ должны быть } x = 5^k \cdot 7^p \text{ и } y = 5^q \cdot 7^r$$

$$\begin{cases} k+p = 151 \\ p+q = 600 \end{cases} \quad y \div x, \quad y \geq x.$$

$$\text{когда } q \geq k \text{ и } r \geq p.$$

тогда найдем способ представить

$$600 = p+q, \text{ где } q \geq p.$$

$$0+600 \quad \text{а, найдем } k+p=151$$

$$1+599$$

$$2+598$$

$$\dots$$

$$299+301$$

$$300+300$$

$$\text{найдем: } 300-0+1=301$$

$$0+151$$

$$1+150$$

$$2+149$$

$$\dots$$

$$150+1$$

$$\text{найдем: } 151-0+1=152$$

$$\begin{aligned} \text{найдем } k, p, q, r \in \mathbb{Z}, \\ k, p, q, r \geq 0, \end{aligned}$$

$$0, 1, 2, 3, 4,$$

$$4-0, +1.$$

$$5.$$

$$y$$

$$y$$

$$\text{найдем } 301-76=225$$

N6 ✓

$$\begin{cases} (y+x^2-4x+1)(x^2-2xy+3y^2)(y-2x+1)=0 & (1) \\ y = (-2a+q)x + a^2 - 1 & (2) \end{cases}$$

2 решения?

решения (1) и (2)

$$\begin{cases} y+x^2-4x+1=0 \\ x^2-2xy+3y^2=0 \\ y-2x+1=0 \end{cases}$$

(2).

$$\begin{array}{r} \times 301 \\ \times 76 \\ \hline 1806 \\ 2104 \\ \hline 22876 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 1 \\ \times 76 \\ \times 301 \\ \hline 46 \\ 228 \\ \hline 22876 \end{array}$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Пусть x и y — общие делители a и b .

$$4 \cdot b = 5(a-b)^2$$

$$5 \cdot a = \text{НОК}(a, b); \quad b = 5 \cdot k.$$

~~тогда~~

$$4k = 5(a-b)^2$$

$$k : 5;$$

$$20ak = \text{НОК}(a, b) \cdot 5(a-b)^2$$

$$4ab = \text{НОК}(a, b) \cdot (a-b)^2$$

$$\text{НОК}(a, b) \cdot (a^2 - 2ab + b^2)$$

$$\frac{1}{9} = 3^{-2}$$

$$\begin{cases} 3 \log_x 27 + \log_y 3 + 8 \log_{xy} \frac{1}{9} = 0 \\ \frac{3y+3}{y-1} < \frac{2x+7}{x-1} \\ y \leq 24 \end{cases}$$

$$\text{ОДЗ: } \begin{cases} x > 0 \\ y > 0 \\ xy > 0 \\ y \neq 1 \\ x \neq 1 \end{cases}$$

$$\frac{1}{\log_{27} x} + \frac{1}{\log_3 y} + \frac{1}{\log_{\frac{1}{9}} xy} = 0$$

$$\rightarrow \frac{1}{3 \log_3 x} + \frac{1}{\log_3 y} - \frac{18}{\log_3 xy} = 0$$

$$\frac{9}{\log_3 x} + \frac{1}{\log_3 y} = \frac{18}{\log_3 xy}; \quad \frac{9 \log_3 y + \log_3 x}{\log_3 x + \log_3 y} = \frac{18}{\log_3 xy}$$

$$\cancel{\log_3 y} + \cancel{\log_3 x}$$

$$\log_3 x + \log_3 y = \frac{10}{a} + \frac{11}{b}$$

$$\frac{9b+a}{ab} = \frac{18}{a+b}$$

$$9ab + 9b^2 + a^2 + ab = 18ab$$

$$a^2 - 8ab + 9b^2 = 0; \quad a^2$$

$$\Delta = 64b^2 - 36b^2 - 18b^2;$$

$$1 - 8\left(\frac{b}{a}\right) + 9\left(\frac{b^2}{a^2}\right) = 0; \quad \frac{b}{a} = t$$

$$9t^2 - 8t + 1 = 0$$

$$\Delta = 64 - 36 = 28$$

$$t = \frac{8 \pm \sqrt{28}}{18}$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи** отдельно.

1
☐2
☐3
☐4
☐5
☐6
☐7
☐

СТРАНИЦА

___ ИЗ ___

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$(a): \begin{cases} y^2 x^2 - 4x + 1 = 0 \\ (-2a+4)x + a^2 - 1 = 0 \end{cases}$$

5 а.

$$\frac{25+5-1}{1-5}$$

$$(x^2 - 2xy + y^2) + 2y^2 > 0.$$

$$\frac{4+2-1}{1} ; -4+2-1 = \frac{-29}{-4} ; = \frac{29}{4}$$

$$(x-y)^2 + 2y^2 \geq 0. \text{ только тогда, когда } y=0=x.$$

$$x=0, y=0; (2): 0 = a^2 - 1; a = \pm 1.$$

и таким образом только одно решение $\Rightarrow$ ~~и~~ $x \neq 0, y \neq 0.$

$$\text{тогда } x^2 - 2xy + 3y^2 > 0.$$

$$a) -2ax + 4x + a^2 - 1 + x^2 - 4x + 1 = 0$$

$$-2a^2 + 2a - 2$$

$$x^2 - 2ax + a^2 = 0$$

$$-(a^2 + a - 1) / (1-a) = 0$$

решение $D > 0$

$$4a^2 - 4a^2 = 0. \text{ всегда}$$

при любых a . $D = 0$

и решение.

$$-a^2 + 4a - 1 = \frac{a^2 + a - 1}{a-1}$$

$$x = a$$

$$y = -2a^2 + 4a + a^2 - 1$$

$$y = -a^2 + 4a - 1$$

$$D = 1 + 4 = 5$$

$$b) -2ax + 4x + a^2 - 1 - 2x + 1 = 0$$

$$2x - 2ax + a^2 = 0$$

$$2x(1-a) + a^2 = 0$$

$$x = \frac{-a^2}{2(1-a)}$$

$$y = -\frac{(-2a+4) \cdot a^2}{2(1-a)} + a^2 - 1$$

$$x = \frac{-a^2}{2(1-a)}$$

$$y = \frac{a^3 - 2a^2}{(1-a)} + a^2 - 1$$

$$1-a \neq 0$$

$$a \neq 1.$$

если $a = -1$, то

$$4-1=3.$$

3 решения.

$$a \neq 0$$

$$a^3 - 2a^2 + a^2 - a^3 - 1 + a \neq 0$$

$$-a^2 + a - 1 \neq 0$$

$$a^2 - a + 1 \neq 0 \text{ не равна нулю}$$

$$\Delta = 1 - 4 = -3 < 0$$

$$a \in (-\infty; -1) \cup (1; 0) \cup (0; 1) \cup (1; +\infty).$$

$$a = 0$$

решения (3) и (5) совпадают.

$$a \neq 0 \text{ и } a = 5$$

$$(4, 5)$$

$$a = \frac{-a^2}{2(1-a)}$$

$$a \neq 1.$$

$$2a - 2a^2 = -a^2$$

$$2a - a^2 = 0$$

$$a(2-a) = 0$$

$$a = 0$$

$$a = 2$$

$$y = -1$$

$$y = -1$$