

МОСКОВСКИЙ  
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ  
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"  
ПО МАТЕМАТИКЕ

11 КЛАСС. Вариант 12



- [3 балла] Дан приведённый квадратный трёхчлен  $f(x)$  такой, что уравнение  $f(x) = -2x^2$  имеет единственное решение, а также уравнение  $f(x) = -6$  имеет единственное решение. Найдите сумму корней уравнения  $f(x) = 0$ .
- [3 балла] Сколькими способами можно представить число  $n = 5^{151} \cdot 7^{600}$  в виде произведения двух натуральных чисел  $x$  и  $y$ , где  $y$  делится на  $x$ ?
- [5 баллов] Найдите количество пар целых чисел  $(x; y)$ , удовлетворяющих системе

$$\begin{cases} 3 \log_x 27 + \log_y 3 + 8 \log_{xy} \frac{1}{9} = 0, \\ \frac{3y+3}{y-1} < \frac{7x+7}{x-1}, \\ y \leq 24. \end{cases}$$

- [5 баллов] Найдите все пары натуральных чисел  $(a; b)$  такие, что

$$\begin{cases} 4 \cdot \min(a; b) = 5(a - b)^2, \\ 5 \cdot \max(a; b) = \text{НОК}(a; b). \end{cases}$$

- [5 баллов] На сторонах  $BA$  и  $BC$  треугольника  $ABC$  с тупым углом  $B$  как на диаметрах построены окружности  $\omega_1$  и  $\omega_2$  соответственно, пересекающиеся в точках  $B$  и  $D$ . Хорда  $BE$  окружности  $\omega_1$  перпендикулярна  $BC$ , а хорда  $BF$  окружности  $\omega_2$  перпендикулярна  $CE$  и касается  $\omega_1$ . Найдите отношение  $BF : BD$ , если  $\cos \angle BCE = \frac{3}{4}$ .

- [5 баллов] При каких значениях параметра  $a$  система

$$\begin{cases} (y + x^2 - 4x + 1)(x^2 - 2xy + 3y^2)(y - 2x + 1) = 0, \\ y = (-2a + 4)x + a^2 - 1 \end{cases}$$

имеет ровно 2 решения?

- [6 баллов] В прямую четырёхугольную призму  $ABCDA_1B_1C_1D_1$  вписана сфера  $\omega$ . Луч с началом в точке  $A$  пересекает  $\omega$  в точках  $P$  и  $Q$ , а луч с началом в точке  $C$  пересекает  $\omega$  в точках  $M$  и  $N$ . Пусть  $O$  — точка пересечения диагоналей четырёхугольника  $ABCD$ . Найдите объём призмы  $ABCDA_1B_1C_1D_1$  и расстояние  $\rho$  от центра  $\omega$  до плоскости  $PAC$ , если известно, что  $AO = 1$ ,  $BO = 2$ ,  $CO = 11$ ,  $AP = \frac{2}{\sqrt{5}}$ ,  $AQ = 2\sqrt{5}$ ,  $CM = 4\sqrt{5}$ ,  $CN = 5\sqrt{5}$ .

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.



1

2

3

4

5

6

7

СТРАНИЦА  
1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по **каждой из задач** **нумеруются отдельно**. Порча QR-кода недопустима!

Пусть  $f(x) = x^2 + ux + b$ . Тогда по условию  $x^2 + ux + b = -2x^2$

$$\Leftrightarrow 3x^2 + ux + b = 0 \quad \text{или же} \quad \text{решение} \Leftrightarrow D = 0 = u^2 - 4b \cdot 3$$

$$\Leftrightarrow u^2 - 12b = 0 \Rightarrow u^2 = 12b \quad (1) \quad \text{Также по условию } x^2 + ux + b = -6$$

$$\Leftrightarrow x^2 + ux + b + 6 = 0 \quad \text{или же} \quad \text{решение} \Leftrightarrow D = 0 = u^2 - 4 \cdot 1 \cdot (b+6) = 0$$

$$\Rightarrow u^2 = 4(b+6) \quad (2) \quad \text{Тогда с учётом (1) и (2)} \Rightarrow u^2 = 12b = 4b + 24$$

$$\Rightarrow b = 3 \Rightarrow u^2 = 36 \Rightarrow u = \pm 6 \quad (\text{причём оба варианта подходит})$$

1)  $b = 3, u = 6 \quad x^2 + 6x + 3 = -2x^2 \Leftrightarrow 3x^2 + 6x + 3 = 3(x+1)^2; \text{ корни } -1$   
 $x^2 + 6x + 3 = -6 \Leftrightarrow x^2 + 6x + 9 = (x+3)^2; \text{ корни } -3$

2)  $b = 3, u = -6 \quad x^2 - 6x - 3 = -2x^2 \Leftrightarrow 3x^2 - 6x + 3 = 3(x-1)^2; \text{ корни } 1$   
 $x^2 - 6x + 3 = -6 \Leftrightarrow x^2 - 6x + 9 = (x-3)^2; \text{ корни } 3$

$f(x) = 0 = x^2 + ux + b \quad D = u^2 - 4b = 36 - 4 \cdot 3 = 24 > 0 \Rightarrow \text{корни есть}$   
 при  $u^2 = 36$ , т.е. по р. Всего  $x_1 + x_2 = -u$ . Значит сумма  
 корней либо  $6$ , либо  $-6$  ( $\neq u$ )

Отв:  $\pm 6$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

- |                            |                                       |                            |                            |                            |                            |                            |
|----------------------------|---------------------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|
| <input type="checkbox"/> 1 | <input checked="" type="checkbox"/> 2 | <input type="checkbox"/> 3 | <input type="checkbox"/> 4 | <input type="checkbox"/> 5 | <input type="checkbox"/> 6 | <input type="checkbox"/> 7 |
|----------------------------|---------------------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|

СТРАНИЦА  
1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по **каждой из задач** **нумеруются отдельно**. Порча QR-кода недопустима!

$$\text{Решение} \quad 5^{151} \cdot 7^{600} = xy; \quad y/x \Leftrightarrow y = kx \quad (y, k, x \in \mathbb{N})$$

(\*)  $5^{151} \cdot 7^{600} = kx^2$ , т.е. необходимо найти все такие  $x$ , что

$$5^{151} \cdot 7^{600} \vdots x^2 \quad (x \in \mathbb{N}). \quad \text{Означает, что } x = 5^\alpha \cdot 7^\beta; \quad \alpha, \beta \in \mathbb{Z} \geq 0$$

$$\text{Тогда} \quad 5^{151} \cdot 7^{600} \vdots 5^{2\alpha} \cdot 7^{2\beta} \Rightarrow \begin{cases} 151 \geq 2\alpha \\ 600 \geq 2\beta \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 75 \geq \alpha \geq 0 \\ 300 \geq \beta \geq 0 \end{cases}$$

т.е. возможных значений  $\alpha$  равно  $75 + 1 = 76$

и возможных значений  $\beta$  равно  $300 + 1 = 301$

и т.к.  $\alpha$  и  $\beta$  могут быть выбраны независимо, то всего возможных пар  $\alpha, \beta$  будет равно  $76 \cdot 301 = 22876$

$$\text{Ответ: } 76 \cdot 301 = 22876$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

1

2

3

4

5

6

7

СТРАНИЦА  
1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по **каждой из задач** **нумеруются отдельно**. Порча QR-кода недопустима!

$$\left\{ \begin{array}{l} 3 \log_x 27 + \log_y 3 + 8 \log_{xy} \frac{1}{9} = 0 \quad (1) \\ \frac{3y+3}{y-1} < \frac{7x+7}{x-1} \quad (2) \\ y \leq 24 \quad (3) \end{array} \right.$$

т.к.  $x, y \in \mathbb{Z}$  и решая в основании логарифмов, то  $x > 1$ ;  $y > 1$

п-м (1):  $3 \log_x 3^3 + \log_y 3 + 8 \cdot \log_{xy} 3^{-2} = 0 \Leftrightarrow$

$$9 \log_x 3 + \log_y 3 = \frac{16}{\log_3 xy} = \frac{16}{\log_3 x + \log_3 y} \Leftrightarrow$$

$$(9 \log_x 3 + \log_y 3)(\log_3 x + \log_3 y) = 16 \Leftrightarrow 9 \log_3 x \log_x 3 + 9 \log_x 3 \log_3 y + 9 \log_y 3 \log_3 x + \log_y 3 \log_3 y = 9 + 9 \log_x y + \log_y x + 1 = 16$$

$$\Leftrightarrow \log_y x + \frac{9}{\log_y x} = 6 \Leftrightarrow \log_y^2 x - 6 \log_y x + 9 = 0 \Leftrightarrow$$

$$(\log_y x - 3)^2 = 0 \Leftrightarrow \log_y x = 3 \Leftrightarrow y^3 = x$$

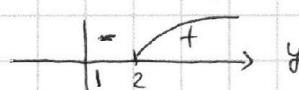
п-м (2):  $\frac{3y+3}{y-1} < \frac{7(y^3+1)}{y^3-1} \Leftrightarrow \frac{7(y+1)}{y-1} \cdot \frac{(y^2-y+1)}{(y^2+y+1)} < 1$

т.к.  $y > 1$ , т.о.  $\frac{y+1}{y-1} > 0 \Rightarrow$  на него можно сократить, не меняя неравенства  
и не меняя знаков  $\Rightarrow 3 < 7 \cdot \frac{y^2-y+1}{y^2+y+1} \Leftrightarrow 3(y^2+y+1) < 7(y^2-y+1)$

$$(\text{делим на } y^2-y+1, \text{ т.к. } y^2+y+1 > 0, \text{ при } y > 1) \Leftrightarrow 4y^2-10y+4 > 0$$

$$\Leftrightarrow 2y^2-5y+2 = (2y-1)(y-2) > 0$$

$$\Rightarrow \log_{10} y \text{ либо } y > 2$$



и т.к.  $y \leq 24$ , то возможны  $y \in [3, 24]$  — 22 варианта.

$x = y^3$  возможна (и однозначно т.к.  $y > 1$ )

Ответ: 22 напр.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.



- |                          |                          |                          |                                     |                          |                          |                          |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|

СТРАНИЦА  
1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по **каждой из задач нумеруются отдельно**. Порча QR-кода недопустима!

$$\begin{cases} 4 \min(a; b) = 5(a-b)^2 \\ 5 \max(a; b) = \text{HOK}(a; b) \end{cases}$$

значит,  $\exists a$  если первое  $(a; b)$  - кратные,  
 $\exists b$  если второе  $(a; b)$  - тоже, т.е.  $(a-b)^2 = (b-a)^2$ ;  
 $\min(a; b) = \min(b; a)$ ;  $\max(a; b) = \max(b; a)$ ;

$\text{HOK}(a; b) = \text{HOK}(b; a)$ . Поэтому, не теряя общности, можно предположить  
 $a > b$ , т.е. первое кратное  $(a; b)$ , а остальные делители  
делючими (делючими  $a$  и  $b$  и  $a$ )

$$a > b : \Leftrightarrow \begin{cases} 4b = 5(a-b)^2 \quad (1) \\ 5a = \text{HOK}(a; b) \quad (2) \end{cases}$$

т.е.  $a; b \in \mathbb{N}$ , т.е. из (1) следует  $4b \equiv 5$ , т.е.  $b \equiv 5$ , т.е.  
 $b = 5b'$   $\Leftrightarrow 4 \cdot 5b' = 5(a-5b')^2 \Leftrightarrow 4b' = (a-5b')^2$  - из этого  
получаем следующее  $b' \equiv 1$  - кратное  $p$ . Рассмотрим  $b = 5x^2$  (1)  $\Rightarrow$   
 $4 \cdot 5x^2 = 5(a-5x^2)^2 \Leftrightarrow 4x^2 = (a-5x^2)^2 \Rightarrow \pm 2x = a-5x^2$

т.е.  $a$  имеет вид  $a = 5x^2 + 2x$ , т.е.  $a = 5x^2 - 2x$

$$1) \quad b = 5x^2; \quad a = 5x^2 + 2x \quad (x \in \mathbb{N})$$

$$5 \cdot (5x^2 + 2x) = \text{HOK}(5x^2 + 2x; 5x^2) = \text{HOK}(5x+2; 5x) \cdot x$$

$$\Leftrightarrow 5(5x+2) = \text{HOK}(5x+2; 5x)$$

$$1.1) \quad x = 2x', \quad x' \in \mathbb{N} \Leftrightarrow 5(10x'+2) = \text{HOK}(10x'+2; 10x') =$$

$$\Rightarrow 2 \cdot \text{HOK}(5x'+1; 5x') = 2(5x'+1) \cdot 5x' \quad (\text{т.к. 2 наименьшее делительное})$$

$$\Rightarrow 10(5x'+1) = 10x'(5x'+1) \Leftrightarrow x' = 1 \Rightarrow x = 2$$

$$1.2) \quad x = 2x'+1, \quad \text{тогда есть } 5x+2 \equiv p \quad \text{и} \quad 5x \equiv p \Rightarrow 5x+2 \equiv 0 \equiv 5x \pmod{p}$$

$$\Rightarrow 2 \equiv 0 \pmod{p} \Rightarrow p \neq 2 \quad \text{но} \quad 5x+2 \equiv 5x \pmod{p}$$

значимости  $\Rightarrow$  либо нет делителя.

$$\Rightarrow 5(5x+2) = \text{HOK}(5x+2; 5x) = 5x(5x+2) \Rightarrow x=1$$

т.е. либо либо  $(5; 7); (7; 5); (20; 24); (24; 20)$   
( $\text{а значит опровергнуто}$ )

$$2) \quad b = 5x^2; \quad a = 5x^2 - 2x \quad (x \in \mathbb{N}), \quad \text{но тогда } a < b \Rightarrow \emptyset$$

~~$$\Rightarrow 5(5x-2) =$$~~ 
$$\text{Одес}: (a; b) \leq (5; 7); (7; 5); (20; 24); (24; 20)$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.







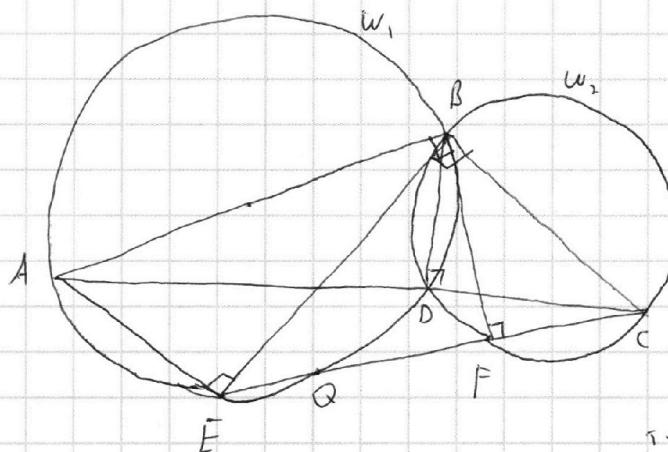



СТРАНИЦА

1 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач **нумеруются отдельно**. Порча QR-кода недопустима!

Во-первых, пусть  $EC$  пересекает  $\omega_2$  в точке  $F'$ , тогда  $\angle B F' C = 90^\circ$ , т.е. отрезок  $BF'$  — диаметр  $\omega_2$ , т.е.  $B F' \perp EC$ ,  $F' \in \omega_2$ , но тогда  $F' \equiv F$  (противолежащие углы при пересечении симметричны). Поэтому четырьмя  $\omega_2$  точка  $O_2$ , а четырьмя  $\omega_1$  — точка  $O$ , тогда  $BF \perp O_2 B$  (или аналогично)  $\Rightarrow AB \perp BF$ ,  $BE \perp BC$  (по аналогии)  $\Rightarrow BE \perp BO_2$ ,  $\angle BDC = 90^\circ$  (т.е. отрезок  $BC$ )  $\angle BDA = 90^\circ$  (т.е. отрезок  $AB$ )  $\Rightarrow \angle BDC + \angle BDA = 180^\circ \Rightarrow A, D, C — вершины и огрызки прямой.$



$$\angle BCF = \alpha$$

$$\cos \alpha = \frac{3}{4}$$

$$AB \perp BF : EC \perp BF$$

$$\Rightarrow AB \parallel EC$$

поскольку  $EC$  пересекает  
вторую  $\omega_1$  в точке  $Q$ .

$$\text{т.к. } \angle BEC = \angle BEQ = 90^\circ - \alpha$$

т.к.  $EQ \parallel AB$ , т.о.  $\overline{AE} = \overline{BQ}$  (изолированы), т.е. их  
равные мерки равны, т.е.  $\angle ABE = \angle BEQ = 90^\circ - \alpha$ ,  $\triangle ABE$  — прямой.

$$\Rightarrow \angle A = \alpha = \angle C \quad \text{т.к. } AB \parallel EC, \text{ т.о. } \angle ABC = 180^\circ - \angle BCE =$$

$$= 180^\circ - \alpha$$

$\angle AEC = 360^\circ - (\alpha + \alpha + 180^\circ - \alpha) = 180^\circ - \alpha$ . т.е.  $AEC$  — прямые углы.

При этом  $EB \perp AE$ . тогда  $AE = BC$

поскольку  $E$  — диаметр  $\omega_2$ ;  $D$  — диаметр  $\omega_1$ ; тогда  $\cos \angle A = \cos \alpha = \frac{AE}{AB}$

$$= \frac{\alpha}{\beta} = \frac{3}{4}$$

По т.к. искомый угол  $\triangle ABC$  и стороны  $AC$ :

$$AC^2 = AB^2 + BC^2 - 2AB \cdot BC \cdot \cos(180^\circ - \alpha) = D^2 + f^2 + 2Df \cos \alpha$$

$$= D^2 \left( 1 + \frac{9}{16} + 2 \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{3}{4} \right) = D^2 \cdot \frac{43}{16}$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

- |                            |                            |                            |                            |                                       |                            |                            |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|---------------------------------------|----------------------------|----------------------------|
| <input type="checkbox"/> 1 | <input type="checkbox"/> 2 | <input type="checkbox"/> 3 | <input type="checkbox"/> 4 | <input checked="" type="checkbox"/> 5 | <input type="checkbox"/> 6 | <input type="checkbox"/> 7 |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|---------------------------------------|----------------------------|----------------------------|

СТРАНИЦА  
2 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. **Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно.** Порча QR-кода недопустима!

№ 7. Используя формулу  $\Delta ABC$  и  $\angle BCA$ :

$$BC^2 + AC^2 - 2BC \cdot AC \cdot \cos \angle BCA = AB^2$$

$$\Rightarrow \cos \angle BCA = \frac{BC^2 + AC^2 - AB^2}{2BC \cdot AC} = \frac{j^2 + D^2 - \frac{43}{16}}{2j \cdot \frac{\sqrt{43}}{4} \cdot D} = \\ = \frac{\left(\frac{j}{D}\right)^2 + \frac{27}{16}}{\frac{9}{16} + \frac{27}{16}} = \frac{\frac{6}{4}}{\frac{2 \cdot 3}{4} \cdot \frac{\sqrt{43}}{4}} = \frac{6}{\sqrt{43}} = \cos \angle BCD$$

$$\Rightarrow \sin \angle BCD = \sqrt{\frac{1}{43}}, \quad ; \quad \sin \angle BCF = \sin \angle BCE = \frac{\sqrt{7}}{4}$$

Тогда

$$\frac{BF}{BD} = \frac{\frac{BC}{(\sin \angle BCF)^{-1}}}{\frac{BC}{(\sin \angle BCE)^{-1}}} = \frac{(\sin \angle BCD)^{-1}}{(\sin \angle BCE)^{-1}} = \frac{\sin \angle BCE}{\sin \angle BCD}$$

$$(т.н. BF = BC \cdot \sin(\angle BCF) = \frac{BC}{(\sin \angle BCF)^{-1}}). \quad \text{Изображено в } \beta\beta$$

$$\Rightarrow \frac{BF}{BD} = \frac{\frac{\sqrt{7}}{4}}{\frac{\sqrt{7}}{\sqrt{43}}} = \frac{\sqrt{43}}{4}$$

Ответ:

$$\frac{\sqrt{43}}{4}$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

1

2

3

4

5

6

7

СТРАНИЦА  
2 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по **каждой из задач** нумеруются **отдельно**. Порча QR-кода недопустима!

В тонкую существо  $\alpha$  для которого  $\sqrt{\alpha} = 1$ ,  $\alpha \in (-\infty; -1) \cup (-1; 0) \cup (0; 2) \cup (2; +\infty)$

Ответ:  $\alpha \in (-\infty; -1) \cup (-1; 0) \cup (0; 2) \cup (2; +\infty)$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.



- |                          |                          |                          |                          |                          |                                     |                          |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|
| <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|

СТРАНИЦА  
1 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач **нумеруются отдельно**. Порча QR-кода недопустима!

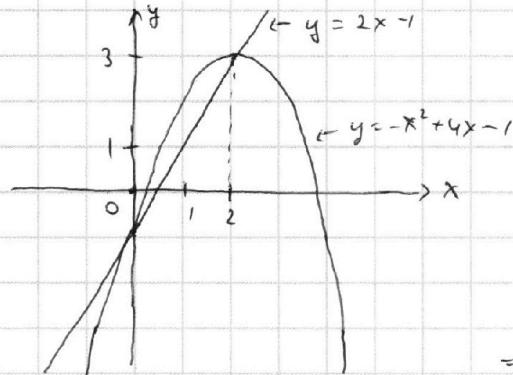
$$\begin{cases} (y+x^2-4x+1)(x^2-2xy+y^2)(y-2x+1)=0 & (1) \\ y = (-2u+4)x + u^2 - 1 & (2) \end{cases}$$

$$(1) \Leftrightarrow (y - (x^2 + 4x - 1))((x-y)^2 + 2y^2)(y - (2x-1)) = 0$$

решение алгебраическое т.к. находим  $y = -x^2 + 4x - 1$ ;

тогда где  $(x-y)^2 + 2y^2 = 0$ , т.е. точки  $(0,0)$  и прямая  $y = 2x - 1$

прямая  $2x-1$  пересекает параболу  $-x^2 + 4x - 1 \Rightarrow 2x-1 = -x^2 + 4x - 1$   
 $\Leftrightarrow 2x = -x^2 + 4x \Rightarrow$  & тогда  $(0,-1)$  и  $(2,3)$ .



+) когда прямая из уравнения (2)  
пересекает параболу?

$$(-2u+4)x + u^2 - 1 = -x^2 + 4x - 1$$

$$\Leftrightarrow -2ux + u^2 = -x^2$$

$$\Leftrightarrow x^2 - 2ux + u^2 = (x-u)^2 = 0$$

$$\Rightarrow x=u \text{ - } 2 \text{ г. решения. т.е. } (2)$$

$\rightarrow$  то уравнение исчезает и находим  $-x^2 + 4x - 1$  & т.к. с

здесь  $x$ .

1) Когда прямая (2) проходит через  $(0,0)$ ?  $0 = 0 + u^2 - 1 \Rightarrow$   
 $u = \pm 1$ . При  $u=1$  (2) имеет вид  $y = 2x \Rightarrow$  1) прямой  $2x-1$ .

т.е. эта прямая проходит через  $(0,0)$  и совпадет с параболой  
- 2 решения,  $(u=1)$  возможен. Если  $u=-1$ , т.о.  $y = 6x$ , и  
на параболе  $2x-1 \Rightarrow$  нет. Тому пересечения  $(x = -\frac{1}{4}; y = -\frac{3}{2})$   
тогда 2 решения находятся три точки, не подходит.

2) Если  $u \neq \pm 1$ , т.о. (2) не параллельна  $2x-1$  (т.к.  $-2u+4 \neq 2$ )  
 $\Rightarrow x=u$ , где  $x$  неизвестно. Если т.к. пересекают линии на параболе  
(т.к. Точки  $(2,3); (0,-1)$ ). То есть т.к. это решения, и т.к.  
(2) - исходящий параболы в точке  $(u; -u^2 + 4u - 1)$ , т.о.  $u=0, u=2$   
- не возможны. В остальных случаях, когда  $u \neq -1, u \neq 1, u \neq 0, u \neq 2$   
(2) - исходящий с параболой, пересекает  $2x-1$  не на параболе, и  
не проходит через  $(0,0)$ , т.к. есть только 2 решения.



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

 1 2 3 4 5 6 7СТРАНИЦА  
2 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. **Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно.** Порча QR-кода недопустима!

Торус

$$\frac{O_2 L}{B_0} = \frac{R}{2} \approx \frac{CO_2}{BC} = \frac{10}{\sqrt{121-4}} = \frac{10}{5\sqrt{5}} = \frac{2}{\sqrt{5}} \quad (\delta \text{ и } \mu \text{ неравн} \\ \Delta CO_2 \approx \Delta CO_2)$$

$$\Rightarrow R = \frac{2}{\sqrt{5}} \Rightarrow AA_1 = \frac{8}{\sqrt{5}} = 2\sqrt{2}$$

$$S_{ABCD} = \underbrace{11 \cdot 2 \cdot \frac{1}{2}}_{S_{CDB}} + \underbrace{11 \cdot 2 \cdot \frac{1}{2}}_{S_{CDA}} + \underbrace{2 \cdot 1 \cdot \frac{1}{2}}_{S_{BOA}} + \underbrace{2 \cdot 1 \cdot \frac{1}{2}}_{S_{DOA}} = 24$$

$$\Rightarrow V_{ACDAB_1} = 24 \cdot \frac{8}{\sqrt{5}} = S_{ABCD} \cdot AA_1 = \frac{192}{\sqrt{5}}$$

$$\text{Отвесь: } V = \frac{192}{\sqrt{5}}$$

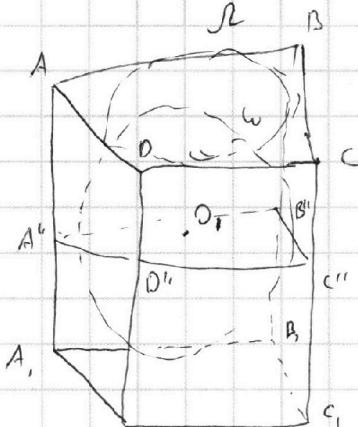
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.



- |                          |                          |                          |                          |                          |                          |                                     |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|
| <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|

СТРАНИЦА  
1 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач **нумеруются отдельно**. Порча QR-кода недопустима!



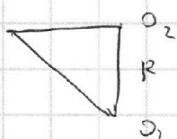
Следим трем А описанным окружностям  
и это  $\sqrt{AP \cdot A2} = \sqrt{4^2} = 2$ . Аналогично  
следим трем с описанной им окружностью  
 $\sqrt{CM \cdot CN} = \sqrt{5\sqrt{5} \cdot 4\sqrt{5}} = 10$ . Но это  $O_1$ ,  
— значит окружность  $w_1$ ,  $R = 2$  — ее радиус.  
Тогда  $AO_1^2 - R^2 = AP \cdot A2 = 4$   
(следим трем А), и  $CO_1^2 - R^2 = CM \cdot CN = 100$

Продолжим через  $O_1$  и  $O_2$  линии  $d \parallel ABCD$ .

значит, что  $b$  и  $d$  огибают описанную окружность с радиусом  $R$  и  
центр  $b$  и  $O_1$ . Так как следующее пресечение  $O_1$  на  $ABA_1B_1$  (также  $a$ )  
то  $O_1Q \perp ABA_1B_1 \Rightarrow O_1Q \parallel A_1B_1C_1D_1 \Rightarrow Q \in d$ . С другой  
стороны  $d$  параллельна из условия четвертого угла  $A''B''C''D''$   
который является пресечением  $ABCD$ , и т.к. параллельны огибающим  
окружностям конечных точек двойных граний, они касаются и стороны  
 $A''B''$ ,  $B''C''$ ,  $C''D''$ ,  $D''A''$  (т.к. точки касания  $\in d$ ).

Это означает что  $ABCD = \cancel{ABC}$  четвертый угол  $ABCD$  в итоге  
может видеть описанную окружность  $R$ . Назовем ее  $R$ .  
Она же огибает пресечение  $w$  на  $ABCD$ . Нужно ее увидеть  $O_2$

Рассмотрим  $\triangle ADO_1O_2$



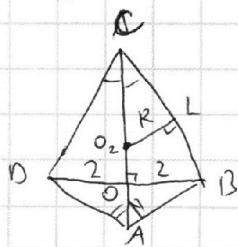
$$AO_2^2 = AO_1^2 - O_1O_2^2 = AO_1^2 - R^2 = 4$$

$$\Rightarrow AO_2 = 2$$

Аналогично  $CO_2 = 10$ . ( $O_1O_2 = R$ , т.к.  $S(ABCD; O_1) = S(A_1B_1C_1D_1; O_2)$ )

$= R$ ,  $\angle O_2$  — пресечение  $O_1$ ). Но тогда  $CO_2 + AO_2 = 12 = AD + CD$

$\Rightarrow O_2$  лежит на  $AC$ . Но если  $O_2$  — значит описанной окр.



то  $AC$  — генератрица и диссектриса  $ABCD$

$\Rightarrow ABCD$  — ромб.  $\Rightarrow DB \perp AC$

$$BO = DO = 2$$

$L$  — трансверсаль  $R$  и  $BC$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.










СТРАНИЦА  
\_ ИЗ \_

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по **каждой из задач** **нумеруются отдельно**. Порча QR-кода недопустима!

$$f(x) = x^2 + ax + b = -2x^2$$

$$a^2 = 12b \quad b = 1$$

$$x^2 + ax + b = -6 \Rightarrow x^2 + ax + b + 6 = 0$$

$$2a^2 = 3 \cdot 4 \cdot b^3$$

$$x^2 + ax + b = 0$$

$$-a = tC$$

$$\rightarrow D = 0 = a^2 - 4(b+6) = 0 \Rightarrow a^2 = 4(b+6)$$

$$x^2 + 6x + 3 = -2x^2$$

$$x^2 + 6x + 3 = -6$$

$$y = 5^{151} \cdot 7^{600}$$

$$= xy = (u \cdot v)^2$$

$$5^{2k} \cdot 7^{2m}$$

$$76 \cdot 301$$

$$x^2 + 6x + 3 = 0$$

$$36 - 12 = 24$$

$$\left\{ \begin{array}{l} 3 \log_{10} x + \log_{10} y + 3 \log_{10} xy = 0 \\ \frac{3y+3}{y-1} < \frac{7x+3}{x-1} \\ y \leq 24 \end{array} \right.$$

$$\frac{1}{\log_{10} x + \log_{10} y}$$

$$x \neq 24$$

$$y \leq 24$$

$$\log_{10} x + \log_{10} y = 4$$

$$9 \log_{10} x + \log_{10} y = 16 \log_{10} xy$$

$$\log_{10} x + \log_{10} y = 4$$

$$9 \log_{10} x + \log_{10} y = \frac{16}{\log_{10} x + \log_{10} y}$$

$$9 + \log_{10} y = \log_{10} x$$

$$+ 9 \log_{10} x \cdot \log_{10} y + 1 = 16$$

$$t + \frac{9}{t} = 6$$

$$t^2 - 6t + 9 = 0$$

$$t^2 - 6t + 9 = 0$$

$$36 - 4$$

$$(t-3)^2 = 0 \Rightarrow t = 3$$

$$\log_{10} x = 3 \Leftrightarrow y^3 = x$$

$$\frac{3y+3}{y-1} > 7$$

$$\frac{3(y+1)}{y-1} < 7 \frac{(y^3+1)}{y^3-1} = \frac{7(y+1)(y^2-y+1)}{(y-1)(y^2+y+1)}$$

$$3(y^2+y+1) < 7(y^2-y+1)$$

$$\begin{array}{c|cc} & - & + \\ \hline 1 & | & 2 \end{array}$$

$$0 < 4y^2 - 10y + 4$$

$$2y^2 - 5y + 2 > 0$$

$$25 = 16$$

$$(2y-1)(y-2) > 0$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.



СТРАНИЦА  
ИЗ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$y \cdot m_1 h(u, b) = \bar{s} / (s - b)^2$$

$$\text{sum}(a, b) = a + b$$

$$a \geq b$$

$$y_8 = 5(v-8)^2$$

$$S_u = [u; \ell]$$

27.8: J  
8-11

*Opuntia*, *rapax*

L-3H

$$f = 5x^2$$

$$y f' = (x - b)^2$$

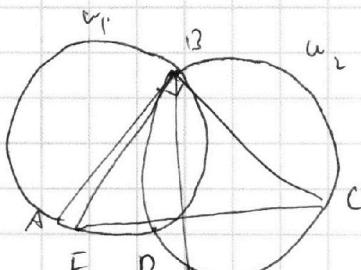
$$2x = |a - 5x^2|$$

$$2x = u - 5x^2 \Rightarrow u = 5x^2 + 2x$$

25

$$5x(5x+2) = [5x^2; 5x+2x] = x[5x; 5x+2]$$

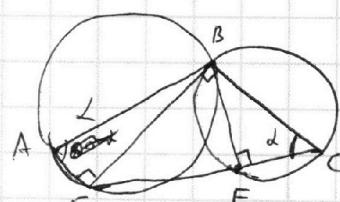
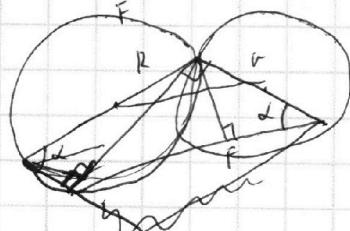
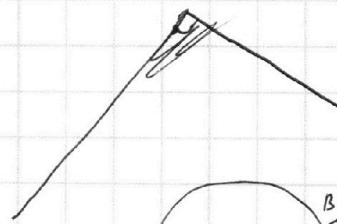
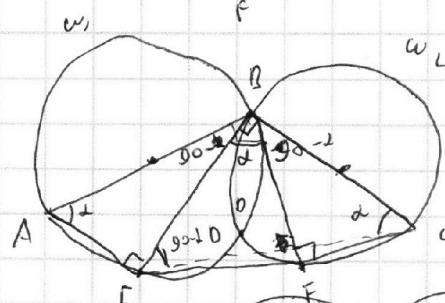
$$S(5x+2) = \{5x; 5(x+2)\} = \{5x; 5x+10\} \quad S_{(1x)} ; S_{(2x+1)}$$



$$Sx^1_j \circ Sx^1_{\ell+1}$$

$$S(Sx^1_{j+1} + \dots) = 2Sx^1_j \cdot (Sx^1_{\ell+1})$$

$$(Sx^1_{\ell+1}) = 1$$



$$13F = \Gamma_{S, n, 2}$$

$$\frac{R \cdot r \cdot \sin \alpha}{r^2} = h \cdot \sqrt{p^2 - r^2 + 2Rr \cos \alpha}$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

- |                            |                            |                            |                            |                            |                            |                            |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|
| <input type="checkbox"/> 1 | <input type="checkbox"/> 2 | <input type="checkbox"/> 3 | <input type="checkbox"/> 4 | <input type="checkbox"/> 5 | <input type="checkbox"/> 6 | <input type="checkbox"/> 7 |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|

СТРАНИЦА  
ИЗ

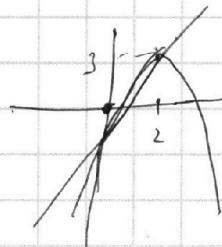
Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. **Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно.** Порча QR-кода недопустима!

$$y = x^2$$

$$y = 0 \quad x \geq 0$$

$$(y + (x-2)^2 - 3) \cdot ((x-4)^2 + 2y^2) \cdot (y - 2x+1) = 0$$

$$\begin{cases} y = 2x-1 \\ y + 3 = (x-2)^2 + 3 \\ y = (-2x+4)x + x^2 - 1 \end{cases}$$



$$x \neq 1$$

$$2x-1 = -(x-2)^2 + 3$$

$$16x$$

$$2x-1 = -x^2 + 4x - 4$$

$$x^2 - 2x - 3 = 0$$

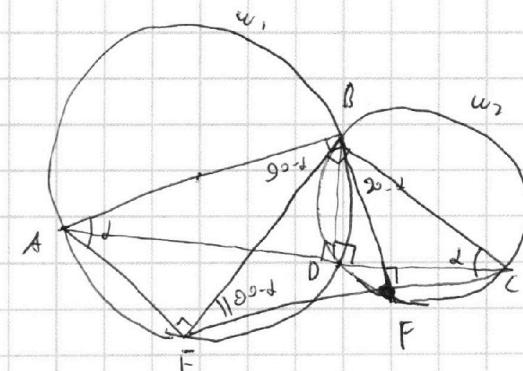
$$27 + 16 = 43$$

$$-x^2 + 4x - 1 = (-2x+4)x + x^2 - 1$$

$$x^2 - 2x - 2 = 0$$

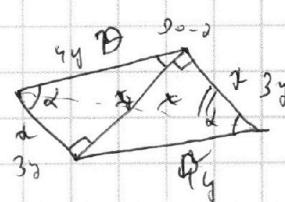
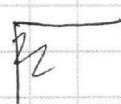
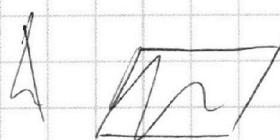
$$x = 2$$

$$\begin{array}{r} 301 \\ \times 76 \\ \hline 1806 \\ 2107 \\ \hline 22876 \end{array}$$



$$\begin{array}{l} 2D^2 + 2d^2 \\ D^2 + d^2 = AC^2 \end{array}$$

$$50y^2 = 25y^2$$



$$x^2 + d^2 - 2x \sqrt{\cos \beta} = D^2$$

$$d^2 + D^2 + 2Dd \cdot \frac{3}{4} = x^2$$

$$(2\sqrt{3} + \frac{3}{2}Dd)^2$$

$$\cos \beta = \frac{x^2 + d^2 - D^2}{2xd}$$

$$d^2 + D^2 + \frac{3}{2}Dd = x^2$$

$$2((d^2 + D^2 + \frac{3}{2}Dd)^2)$$

$$= \frac{2 \cdot \frac{9}{16} + \frac{3}{2} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{9}{4}}{2(\frac{9}{16} + 1 + \frac{3}{8})}$$

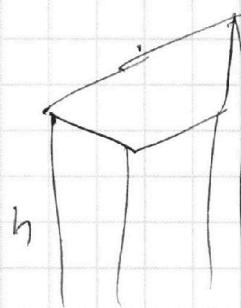
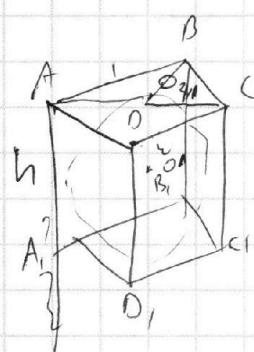
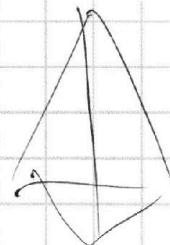


На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

- |                            |                            |                            |                            |                            |                            |                            |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|
| <input type="checkbox"/> 1 | <input type="checkbox"/> 2 | <input type="checkbox"/> 3 | <input type="checkbox"/> 4 | <input type="checkbox"/> 5 | <input type="checkbox"/> 6 | <input type="checkbox"/> 7 |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|

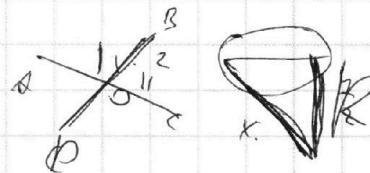
СТРАНИЦА  
ИЗ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по **каждой из задач** нумеруются **отдельно**. Порча QR-кода недопустима!

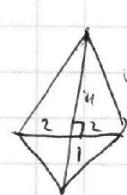
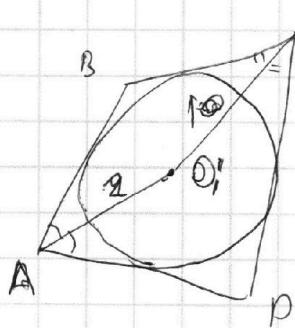
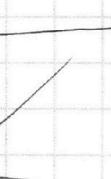
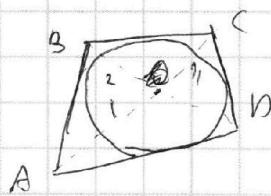
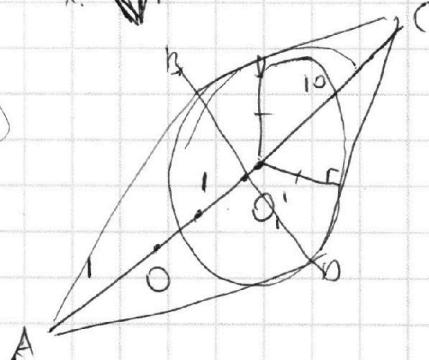


$$AP - A_1P \approx 9$$

$$CM - CN = 100$$

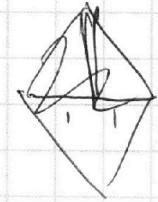


$$(X^2 - 2r^2)$$



A

C



B

D

P

X

Y

Z

W

V

U

T

S

R

Q

P

O

N

M

L

K

J

I

H

G

F

E

D

C

B

A

Z

Y

X

W

V

U

T

S

R

Q

P

O

N

M

L

K

J

I

H

G

F

E

D

C

B

A

Z

Y

X

W

V

U

T

S

R

Q

P

O

N

M

L

K

J

I

H

G

F

E

D

C

B

A

Z

Y

X

W

V

U

T

S

R

Q

P

O

N

M

L

K

J

I

H

G

F

E

D

C

B

A

Z

Y

X

W

V

U

T

S

R

Q

P

O

N

M

L

K

J

I

H

G

F

E

D

C

B

A

Z

Y

X

W

V

U

T

S

R

Q

P

O

N

M

L

K

J

I

H

G

F

E

D

C

B

A

Z

Y

X

W

V

U

T

S

R

Q

P

O

N

M

L

K

J

I

H

G

F

E

D

C

B

A

Z

Y

X

W

V

U

T

S

R

Q

P

O

N

M

L

K

J

I

H

G

F

E

D

C

B

A

Z

Y

X

W

V

U

T

S

R

Q

P

O

N

M

L

K

J

I

H

G

F

E

D

C

B

A

Z

Y

X

W

V

U

T

S

R

Q

P

O

N

M

L

K

J

I

H

G

F

E

D

C

B

A

Z

Y

X

W

V

U

T

S

R

Q

P

O

N

M

L

K

J

I

H

G

F

E

D

C

B

A

Z

Y

X

W

V