



МОСКОВСКИЙ  
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ  
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"  
ПО МАТЕМАТИКЕ

## 11 КЛАСС. Вариант 2



- [3 балла] Найдите все тройки натуральных чисел  $(A; B; C)$  такие, что:
  - $A$  — четырёхзначное число, составленное из одинаковых цифр,
  - $B$  — трёхзначное число, хотя бы одна из цифр которого равна 1,
  - $C$  — двузначное число, хотя бы одна из цифр которого равна 5,
  - произведение  $A \cdot B \cdot C$  является квадратом некоторого натурального числа.
- [3 балла] Положительные числа  $x$  и  $y$  таковы, что значение выражения  $K = \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{xy}$  не изменяется, если  $x$  уменьшить на 3, а  $y$  — увеличить на 3. Найдите все возможные значения выражения  $M = x^3 - y^3 - 9xy$ .
- [5 баллов] а) Найдите все пары действительных чисел  $(x; y)$  такие, что  $(\sin \pi x - \sin \pi y) \sin \pi x = -(\cos \pi x + \cos \pi y) \cos \pi x$ .  
б) Сколько пар целых чисел  $(x, y)$  удовлетворяют одновременно этому уравнению и неравенству

$$\arccos \frac{x}{4} + \arccos \frac{y}{9} < 2\pi?$$

- [4 балла] В начале месяца было выделено 4 билета на праздничный концерт, которые планировалось случайным образом распределить между одиннадцатиклассниками. В конце месяца выяснилось, что будет выделено больше 4 билетов. Одиннадцатиклассники Петя и Вася вычислили, что вероятность им обоим вместе попасть на концерт в начале месяца была в 3,5 раза меньше, чем оказалась в конце месяца. Сколько всего было выделено билетов на концерт в конце месяца, если количество одиннадцатиклассников не изменилось?
- [5 баллов] Точка  $O$  — центр окружности  $\omega_1$ , описанной около остроугольного треугольника  $ABC$ . Окружность  $\omega_2$ , описанная около треугольника  $BOC$ , пересекает отрезок  $AB$  в точке  $P$ . Найдите площадь треугольника  $ABC$ , если  $AP = \frac{16}{5}$ ,  $BP = 2$ ,  $AC = 4$ .
- [6 баллов] На координатной плоскости изображена фигура  $\Phi(\alpha)$ , состоящая из всех точек, координаты  $(x; y)$  которых удовлетворяют системе неравенств

$$\begin{cases} (x - 2 \cos \alpha)(y - 2 \sin \alpha) \geq 0, \\ x^2 + y^2 \leq 9. \end{cases}$$

Найдите максимальное значение  $M$  периметра (длины границы) фигуры  $\Phi(\alpha)$  и укажите все значения  $\alpha$ , при которых оно достигается.

- [6 баллов] Шар  $\Omega$  касается всех рёбер правильной усечённой пирамиды, а шар  $\omega$  касается всех её граней. Найдите угол наклона бокового ребра пирамиды к плоскости её основания.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

- |                                     |                          |                          |                          |                          |                          |                          |
|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1                                   | 2                        | 3                        | 4                        | 5                        | 6                        | 7                        |
| <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

СТРАНИЦА  
1 из 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по **каждой из задач** нумеруются **отдельно**. Порча QR-кода недопустима!

Пускай,  $A = \overline{aaaa}$ . Тогда  $A = 1111 \cdot a = 11 \cdot 101 \cdot a$

$a$ -ненулевое число  $\Rightarrow 1 \leq a \leq 9 \Rightarrow A \equiv 11, : 101, : 11^2, : 101^2$  |  $\Rightarrow$

$\Rightarrow ABC \equiv 11, : 101$  |  $\Rightarrow ABC \equiv 11^2, : 101^2$  |  $\Rightarrow$

$ABC$ - трехзначный квадрат

$\Rightarrow$  В числе  $C$  делится на 11 и В числе  $C$  делится на 101

$C$ -двухзначное  $\Rightarrow C \leq 99 \Rightarrow C \equiv 101 \Rightarrow B \equiv 101$  |  $\Rightarrow$

$B$ -трехзначное

$\Rightarrow B = \overline{60B}$ , где  $b$ -ненулевое число. |  $\Rightarrow b = 1 \Rightarrow$

По условию  $b$  не может быть единицей, так как одна из цифр  $B$  равна 1 |  $\Rightarrow b = 1$

$\Rightarrow B = 101$

$B \equiv 11 \Rightarrow C \equiv 11$  |  $\Rightarrow C = \overline{cc}$ , где  $c$ -ненулевое число |  $\Rightarrow$

По условию одна из цифр  $C$  равна 5 |  $\Rightarrow$

$\Rightarrow C = 55$

$ABC = 11 \cdot 101 \cdot a \cdot 101 \cdot 5 \cdot 11 = 11^2 \cdot 101^2 \cdot 5a \Rightarrow 5a - \text{кв.} \Rightarrow a \equiv 5$  |  $\Rightarrow$

$ABC$ -кв.

$a$ -ненулевое число |  $\Rightarrow$

$\Rightarrow a = 5$

Получили:  $A = 5555, B = 101, C = 55. ABC = 5555 \cdot 101 \cdot 55 =$   
 $= 5555 \cdot 5555 = (5555)^2$  (⊕)  $= 101 \cdot 55 \cdot 101 \cdot 55 =$

Ответ:  $(5555; 101; 55)$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

- |                            |                                       |                            |                            |                            |                            |                            |
|----------------------------|---------------------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|
| <input type="checkbox"/> 1 | <input checked="" type="checkbox"/> 2 | <input type="checkbox"/> 3 | <input type="checkbox"/> 4 | <input type="checkbox"/> 5 | <input type="checkbox"/> 6 | <input type="checkbox"/> 7 |
|----------------------------|---------------------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|

СТРАНИЦА  
1 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по **каждой** из задач **нумеруются отдельно**. Порча QR-кода недопустима!

$$k = \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{xy} = \frac{x+y+1}{xy}$$

По усл., если  $x$  заменить на  $x-3$ , а  $y$  — на  $y+3$ , то зн.  
не изменится. Тогда:

$$k = \frac{(x-3)+(y+3)+1}{(x-3)(y+3)} = \frac{x+y+1}{(x-3)(y+3)}$$

$$\left| \begin{array}{l} \frac{x+y+1}{(x-3)(y+3)} = \frac{x+y+1}{xy} \\ x, y > 0 \end{array} \right. \quad \left| \begin{array}{l} x+y+1 > 0 \\ x+y+1 = 0 \\ x \neq 0 \\ y \neq 0 \\ x \neq -1 \\ x \neq 3 \\ y \neq -3 \end{array} \right. \quad \left| \begin{array}{l} x, y > 0 \Leftrightarrow x > 0, y \\ x+y+1 > 0 \\ x+y+1 = 0 \\ x \neq 0 \\ y \neq 0 \\ x \neq -1 \\ x \neq 3 \\ y \neq -3 \end{array} \right. \quad \left| \begin{array}{l} y = x-1 \\ x \neq 0 \\ x \neq -1 \\ x \neq 3 \\ x \neq 2 \end{array} \right. \quad \left| \begin{array}{l} 3x-3y-9=0 \\ x \neq 0 \\ y \neq 0 \end{array} \right.$$

$$\left| \begin{array}{l} y = -x-1 \\ x \neq 0 \\ x \neq -1 \\ x \neq 2 \\ x \neq 3 \\ x \neq -3 \end{array} \right. \quad \left| \begin{array}{l} y = -x-1 \\ x \neq 0 \\ x \neq 2 \\ x \neq 3 \\ x \neq -1 \end{array} \right. \quad \left| \begin{array}{l} y = x-3 \\ x \neq 0 \\ x \neq 3 \end{array} \right. \quad \left| \begin{array}{l} (x-3)(y+3) = xy \\ x \neq 0 \\ y \neq 0 \\ x, y > 0 \end{array} \right. \quad \left| \begin{array}{l} 3x-3y-9=0 \\ x \neq 0 \\ y \neq 0 \end{array} \right.$$

$$(1) \quad x^3 - y^3 - 9xy - x^3 + (x+1)^3 + 9x(x+1) = x^3 + x^3 + 3x^2 + 3x + 1 + 9x^2 + 9x = \\ = 2x^3 + 12x^2 + 12x + 1$$

$$(2x^3 + 12x^2 + 12x + 1)'' = 6x^2 + 24x + 12 = 6(x^2 + 4x + 2)$$

Если  $x_1, x_2$  — экстремумы, то  $x_1 = -2 - \sqrt{2}$ ,  $x_2 = -2 + \sqrt{2}$

$$y = f(x_1) = 2(-2 - \sqrt{2})^3 + 12(-2 - \sqrt{2})^2 + 12(-2 - \sqrt{2})$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

 1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА

2 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по **каждой из задач** нумеруются **отдельно**. Порча QR-кода недопустима!

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (x-3)(y+3) = xy \\ x, y > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} xy + 3x - 3y - 9 = xy \\ x, y > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x - y - 3 = 0 \\ x, y > 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\frac{x-y-3=0}{y>0} \Rightarrow x>3$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y = x-3 \\ x > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = x-3 \\ x > 3 \end{cases}$$

$$x^3 - y^3 - 9xy = (x-y)(x^2 + y^2 + xy) - 9xy = \\ = 3x^2 + 3y^2 + 3xy - 9xy = 3(x^2 + y^2 - 2xy) = 3(x-y)^2 = 3 \cdot 3^2 = 27$$

Ответ: 27.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.



- |                          |                          |                                     |                          |                          |                          |                          |
|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |
|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|

СТРАНИЦА  
1 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач **нумеруются отдельно**. Порча QR-кода недопустима!

$$a) (\sin \pi x - \sin \pi y) \sin \pi x = (\cos \pi x + \cos \pi y) \cos \pi x$$

$$a = \pi x, \quad b = \pi y$$

$$(\sin a - \sin b) \sin a = (\cos a + \cos b) \cos a \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (\cos^2 a - \sin^2 a) + (\cos a \cdot \cos b + \sin a \cdot \sin b) = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \cos 2a + \cos(a-b) = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2 \cos\left(\frac{3a-b}{2}\right) \cdot \cos\left(\frac{a+b}{2}\right) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \cos\left(\frac{3a-b}{2}\right) = 0 \\ \cos\left(\frac{a+b}{2}\right) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \frac{3a-b}{2} = \frac{\pi}{2} + \pi k, k \in \mathbb{Z} \\ \frac{a+b}{2} = \frac{\pi}{2} + \pi k, k \in \mathbb{Z} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3a-b = \pi + 2\pi k, k \in \mathbb{Z} \\ a+b = \pi + 2\pi k, k \in \mathbb{Z} \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 3\pi x - \pi y = \pi + 2\pi k, k \in \mathbb{Z} \\ \pi x + \pi y = \pi + 2\pi k, k \in \mathbb{Z} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x - y = 2k+1, k \in \mathbb{Z} \\ x + y = 2k+1, k \in \mathbb{Z} \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} y = 3x + 2k+1, k \in \mathbb{Z} \\ y = 2k+1-x, k \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

Ответ:  $(x; 3x+2k+1)$ ,  $x \in \mathbb{R}, k \in \mathbb{Z}$ ;  $(x; 2k+1-x)$ ,  $x \in \mathbb{R}, k \in \mathbb{Z}$

$$b) \arccos \frac{x}{4} + \arccos \frac{y}{3} < 2\pi$$

$$0 \leq \arccos \frac{x}{4} \leq \pi$$

$$\text{p-б о при } \frac{x}{4} = -1$$

$$\Rightarrow \arccos \frac{x}{4} + \arccos \frac{y}{3} < 2\pi$$

$$0 \leq \arccos \frac{y}{3} \leq \pi$$

$$\text{p-б о при } \frac{y}{3} = -1$$

$$\text{p-б о при } x = -4 \text{ и } y = -9$$

$$\text{Значит: } \arccos \frac{x}{4} + \arccos \frac{y}{3} < 2\pi \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} x \neq -4 \\ y \neq -9 \\ -1 \leq \frac{x}{4} \leq 1 \\ -1 \leq \frac{y}{3} \leq 1 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} x \neq -4 \\ y \neq -9 \\ -4 \leq x \leq 4 \\ -9 \leq y \leq 9 \end{cases}$$

Уравнение равносильно

$$\begin{cases} 3x - y = 2k+1, k \in \mathbb{Z} \\ x + y = 2k+1, k \in \mathbb{Z} \end{cases} \leftarrow \text{означает, что } 3x \text{ и } y \text{ разной четности} \Leftrightarrow x \text{ и } y \text{ разной четности}$$

$\Leftrightarrow x \text{ и } y \text{ разной четности}$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

- |                            |                            |                                       |                            |                            |                            |                            |
|----------------------------|----------------------------|---------------------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|
| <input type="checkbox"/> 1 | <input type="checkbox"/> 2 | <input checked="" type="checkbox"/> 3 | <input type="checkbox"/> 4 | <input type="checkbox"/> 5 | <input type="checkbox"/> 6 | <input type="checkbox"/> 7 |
|----------------------------|----------------------------|---------------------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|

СТРАНИЦА  
2 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач **нумеруются отдельно**. Порча QR-кода недопустима!

1)  $x = -2$ ,  $y = -2$ .

Пар. уравн.  $\begin{cases} -4 \leq x \leq 4 \\ -9 \leq y \leq 9 \end{cases}$  - ровно  $5 \cdot 10 = 50$

возможных  $x$  возможных  $y$

$-4, -3, 0, 2, 4$        $-9, -7, -5, -3, -1, 1, 3, 5, 7, 9$

Но среди них есть ровно 1 пара  $(-4, -9)$ , не уравн.  $\begin{cases} x \neq -4 \\ y \neq -9 \end{cases}$

$\rightarrow$  остается  $50 - 1 = 49$  пар

2)  $x = -2$ ,  $y = -2$

$\begin{cases} x \neq -4 \\ y \neq -9 \end{cases}$  - Верно

А пар. уравн.  $\begin{cases} -4 \leq x \leq 4 \\ -9 \leq y \leq 9 \end{cases}$  - ровно  $4 \cdot 9 = 36$

возможных  $x$  возможных  $y$

$-3, -1, 1, 3$        $-8, -6, -4, -2, 0, 2, 4, 6, 8$

Так, всего пар  $- 49 + 36 = 85$

Ответ: 85

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи **отдельно**.



- |                          |                          |                          |                                     |                          |                          |                          |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|

СТРАНИЦА  
1 из 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач **нумеруются отдельно**. Порча QR-кода недопустима!

Пусть  $n$  - одиннадцатиклассников,  $m$  - кол-во выданных бинетов в конце месяца.

• В-сю в начале месяца:

Способов раздать бинеты -  $C_n^4$  - выбираешь 4-ех 11-ков.

Способов, когда Петя и Вася идут, -  $C_{n-2}^2$  - выбираешь оставшихся двоих.

$\Rightarrow$  Вероятность -

$$\frac{C_{n-2}^2}{C_n^4}$$

(\*)

• В-сю в конце месяца

Способ раздать бинеты -  $C_n^m$  - выбираешь  $m$  11-ков

Способов, когда Петя и Вася идут, -  $C_{n-2}^{m-2}$  - выбираешь оставшихся

$\Rightarrow$  Вероятность -  $\frac{C_{n-2}^{m-2}}{C_n^m}$  (\*)

$m-2$  11-ков

~~Tогда: 3.5.  $\frac{C_{n-2}^2}{C_n^4} = \frac{C_{n-2}^{m-2}}{C_n^m} \Leftrightarrow \frac{7}{2} \cdot \frac{(n-4) \cdot (n-5) \cdot 4!}{(n-2)(n-3)(n-4)(n-5) \cdot 2} = \frac{(n-2)!}{(m-2)!(n-m)!} \cdot \frac{m!(n-m)}{n!}$~~

~~$\Leftrightarrow \frac{7 \cdot 3!}{(n-2)(n-3)} = \frac{m(m-1)}{n}$~~

~~Tогда: 3.5.  $\frac{C_{n-2}^2}{C_n^4} = \frac{C_{n-2}^{m-2}}{C_n^m} \Leftrightarrow 3.5 \cdot \frac{(n-2)!}{(n-4)! \cdot 2!} \cdot \frac{4!(n-4)!}{n!} = \frac{(n-2)!}{(m-2)!(n-m)!} \cdot \frac{m!(n-m)}{n!}$~~

~~$\Leftrightarrow 3.5 \cdot \frac{4 \cdot 3}{n(n-1)} = \frac{m(m-1)}{n(n-1)} \Leftrightarrow \frac{7}{2} \cdot 4 \cdot 3 = m(m-1) \Leftrightarrow m^2 - m - 42 = 0 \Leftrightarrow$~~

~~$\Leftrightarrow (m-7)(m+6) = 42 \Leftrightarrow m=7.$~~

Ответ: 7. \* (если в условии имеется в виду, что бинеты разд., то кол-во способов нужно умножить на  $4!$  в том ш. и на  $m!$  во 2-ом,

но вероятности от этого не изменяются)

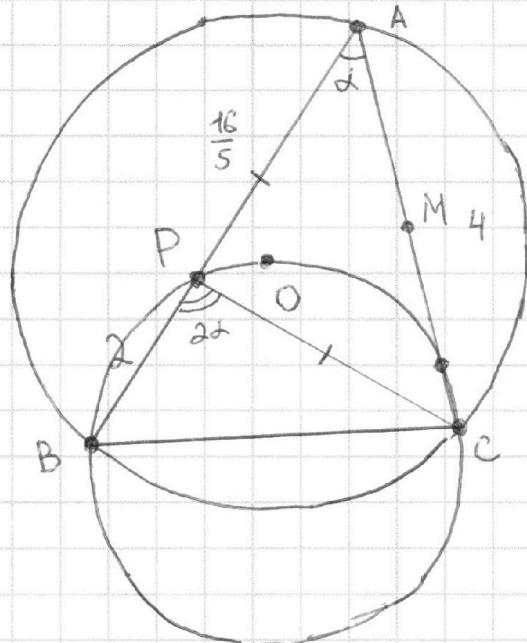


На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

- 1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по **каждой из задач** нумеруются **отдельно**. Порча QR-кода недопустима!



$\triangle ABC$  - остроугольный  $\Rightarrow O$  лежит  
внутри  $\triangle ABC$

Пусть  $\angle BAC = \alpha \Rightarrow \angle BOC = 2\alpha \Rightarrow$   
 $\Rightarrow \angle BPC = \angle BOC = 2\alpha$   
BPOC - вис.

$\angle PCA = \angle BPC - \angle PAC = 2\alpha - \alpha = \alpha \Rightarrow$   
 $\Rightarrow \angle PCA = \angle PAC \Rightarrow \triangle PAC - p/\delta \Rightarrow$   
 $\Rightarrow AP = CP$

Пусть M - середина AC  $\Rightarrow$   
 $\Rightarrow PM$  - высота в  $\triangle PAC$   $\triangle PAC$  - р/б

$\Rightarrow AM = AP \cdot \cos \alpha$

$$AC = 2AM = 2AP \cdot \cos \alpha \Rightarrow \cos \alpha = \frac{AC}{2AP} = \frac{4}{2 \cdot \frac{16}{5}} = \frac{1}{8} = \frac{5}{8}$$

$$\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1 \Rightarrow \sin \alpha = \sqrt{1 - \cos^2 \alpha} = \sqrt{1 - \frac{25}{64}} = \sqrt{\frac{39}{64}} =$$

$$= \frac{\sqrt{39}}{8}$$

$$S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} \cdot \sin \alpha \cdot AB \cdot AC = \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{39}}{8} \cdot (AP + BP) \cdot AC = \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{39}}{8} \cdot (\frac{16}{5} + 2) \cdot 4 =$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{39}}{8} \cdot \frac{26}{5} \cdot 4 = \frac{\sqrt{39} \cdot 13}{10} = \frac{13\sqrt{39}}{10}$$

$$\text{Ответ: } \frac{13\sqrt{39}}{10}.$$

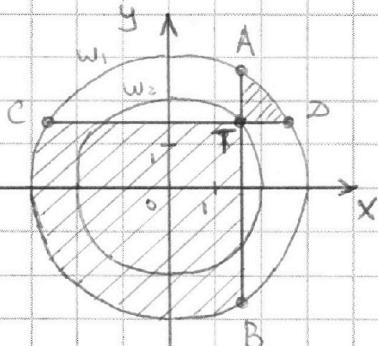
На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.



- 1      2      3      4      5      6      7

СТРАНИЦА  
1 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



$x^2 + y^2 \leq 9$  - круг радиуса 3 с центром  
 $B(0,0)$  -  $w_1$ ,  
 $(2\cos\alpha, 2\sin\alpha)$  - некоторая точка  $T$   
на окружности радиуса 2 с центром  
 $B(0,0)$  -  $w_2$ .

Пусть вертикальная прямая ( $\parallel Oy$ ) через  
T пересекает  $w_2$  в точках A и B (A выше B),  
а горизонтальная прямая через T ( $\parallel Ox$ ) пересекает  $w_1$  в точках  
C и D (C левее D).

Тогда  $(x - 2\cos\alpha)(y - 2\sin\alpha) \geq 0$  - угол  $\angle DTA +$  угол  $\angle BTC$

Значит, фигура  $\Phi(\alpha)$  - одноветвленная кривошпиндельных треугр.  
ATD и BTC как показано на рис.

$M(\alpha) = S + AB + CD$ , где S - сумма длин дуг BC и AD

$$\angle CTB = \frac{BC + AD}{2} \Rightarrow BC + AD = JT \Rightarrow S = JT \cdot 3$$

радиус  $w_2$ .

$$P((0,0), AB) = 2\cos\alpha - \text{расстояние от } (0,0) \text{ до } AB \Rightarrow$$

$$\Rightarrow AB = \sqrt{3^2 - (2\cos\alpha)^2} \Rightarrow AB = 2\sqrt{9 - 4\cos^2\alpha}$$

$$\text{Аналогично: } CD = 2\sqrt{9 - 4\sin^2\alpha}$$

$\sqrt{\frac{(Ja)^2 + (Jb)^2}{2}} \geq \frac{\sqrt{a^2 + b^2}}{2}$  - нер-во о средних между  
p-во при  $a=b$  средним арифмет. и квадрат.

$$\Rightarrow M(\alpha) = S + AB + CD = 3JT + 2\sqrt{9 - 4\cos^2\alpha} + 2\sqrt{9 - 4\sin^2\alpha} = 3JT + 4 \cdot \frac{\sqrt{9 - 4\cos^2\alpha} + \sqrt{9 - 4\sin^2\alpha}}{2} \leq$$

$$\leq 3JT + 4 \cdot \sqrt{\frac{9 - 4\cos^2\alpha + 9 - 4\sin^2\alpha}{2}} = 3JT + 4 \cdot \sqrt{\frac{18 - 14}{2}} = 3JT + 4 \cdot \sqrt{7} = 3JT + 4\sqrt{7}$$

p-во при  $\sqrt{9 - 4\cos^2\alpha} = \sqrt{9 - 4\sin^2\alpha}$  (\*)



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

- |                          |                          |                          |                          |                          |                                     |                          |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|
| 1                        | 2                        | 3                        | 4                        | 5                        | 6                                   | 7                        |
| <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

СТРАНИЦА  
2 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$(*) \quad 9 - 4 \sin^2 \alpha = 9 - 4 \cos^2 \alpha \Leftrightarrow \sin^2 \alpha = \cos^2 \alpha \quad | : \cos^2 \alpha \quad (\cos \alpha \neq 0 - \text{иначе } \sin^2 \alpha = 1, 1 \neq 0)$$
$$\Leftrightarrow \tan^2 \alpha = 1 \Leftrightarrow \alpha = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi k}{2}, k \in \mathbb{Z}$$

Ответ:  $3\pi + 4\sqrt{7}$  при  $\alpha = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi k}{2}, k \in \mathbb{Z}$

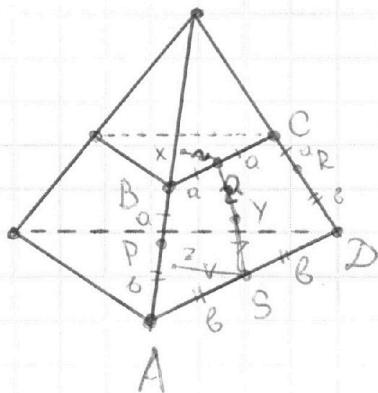


На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

- |                            |                            |                            |                            |                            |                            |                                       |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|---------------------------------------|
| <input type="checkbox"/> 1 | <input type="checkbox"/> 2 | <input type="checkbox"/> 3 | <input type="checkbox"/> 4 | <input type="checkbox"/> 5 | <input type="checkbox"/> 6 | <input checked="" type="checkbox"/> 7 |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|---------------------------------------|

СТРАНИЦА  
1 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



Пусть это  $n$ -угольная пирамида.

Р-ш некоторую боковую грани  $ABCD$ .

Пусть  $\Omega$  касается её ребер в точках  $P, Q, R, S$ .  
Т.к. пирамида правильная, то  $Q$  и  $S$  - середины  
 $BC$  и  $AD$ .

Пусть  $BC = 2a$ ,  $AD = 2b$ ,  $O_1$  - центр  $\Omega$ .

Тогда  $\triangle O_1 BQ = \triangle O_1 BP \Rightarrow BP = BQ = a$   
( $O_1 B$ -одн.,  $O_1 P = O_1 Q$ )  
(п-примоз.)

Аналогично:  $CR = Q, AP = DR = b$ .

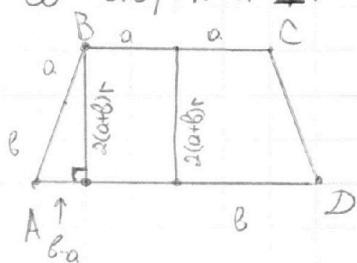
Пусть  $w$  касается верхней грани в точке  $X$ ,  $ABCD$  - в  $Y$ ,  
нижней - в  $Z$ . Т.к. пирамида правильная,  $X$  и  $Z$  - центры  
соответствующих граний, а  $Y$  лежит на  $SQ$ .

Пусть  $O_2$  - центр  $w$ . Тогда  $\triangle O_2 XQ = \triangle O_2 YQ \Rightarrow XQ = YA$ .

( $O_2 Q$ -одн.,  $O_2 X = O_2 Y$ )  
(п-примоз.)

Аналогично  $YS = ZS$ .

Пусть  $r$  - радиус вписанной окр. правильного  $n$ -угольника  
с со стороной  $a$ . Тогда из подобия  $XQ = 2a, ZS = 2b \Rightarrow QS = 2(a+b)r$ .



$$\text{по т. Пифагора } 2(a+b)r = \sqrt{(a+b)^2 - (b-a)^2} = \sqrt{4ab} = 2\sqrt{ab} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow r = \frac{\sqrt{ab}}{a+b} < \frac{\sqrt{ab}}{2\sqrt{ab}} = \frac{1}{2}.$$

Нер-во о ор. ( $\angle$ , т.к.  $a \neq b$ , иначе это  
не пирамида)

пр.  $n$ -угольник

$$2B = 180^\circ \cdot \frac{n-2}{n} \Rightarrow B = 90^\circ \cdot \frac{n-2}{n}$$

$$\sin B \approx r < \frac{1}{2} \Rightarrow B < 45^\circ \Rightarrow 90^\circ \cdot \frac{n-2}{n} < 45^\circ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2n-4 < n \Rightarrow n < 4 \Rightarrow n=3$$

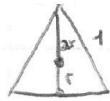
На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.



- |                          |                          |                          |                          |                          |                          |                                     |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|
| <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|

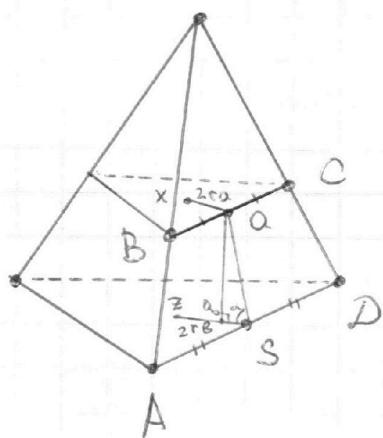
СТРАНИЦА  
2 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



← правильный  
треугольник

$$b \text{ для шестиугольника} - 1 \cos \frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow \\ \Rightarrow r = \frac{1}{3} \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{3}}{6}$$



Пусть  $Q_0$ - проекция  $Q$  на нижнюю  
грань  $\Rightarrow SQ_0 = \cancel{r}$   $SQ_0 = \frac{1}{2} \sqrt{b} - r$

$$\Rightarrow \alpha - \text{ угол между боковой грани и осн.} = \\ = \arccos \left( \frac{r(b-a)}{r(a+b)} \right) = \arccos \left( \frac{b-a}{a+b} \right)$$

Не учитывая общности, можно считать, что  $a=1$ .

$$\text{Тогда: } \cancel{(b+1)} \cdot (b+1) \cdot \frac{\sqrt{3}}{6} = \sqrt{b} \Rightarrow \frac{(b+1)^2 \cdot 3}{36} = b \Rightarrow b^2 + 2b + 1 = 12b \Rightarrow \\ \Rightarrow b^2 - 10b + 1 \Rightarrow \cancel{b=1} \quad b = 5 \pm 2\sqrt{6} \quad b > a, 5 - 2\sqrt{6} \cancel{< 1} \\ \Rightarrow b = 5 + 2\sqrt{6}$$

~~$$\alpha = \arccos \left( \frac{\frac{\sqrt{3}}{6} \cdot (4+2\sqrt{6})}{5+2\sqrt{6}} \right) = \arccos \left( \frac{\frac{\sqrt{3}}{6} \cdot (2+\sqrt{6})}{(3+\sqrt{6})} \right) = \arccos \left( \frac{\sqrt{3}}{6} \cdot \frac{2+\sqrt{6}}{(3-\sqrt{6})} \right) = \\ = \arccos \left( \frac{\sqrt{3}}{6} \cdot \frac{\sqrt{6}}{3} \right) = \arccos \left( \frac{3\sqrt{2}}{6 \cdot 3} \right) = \arccos \left( \frac{\sqrt{2}}{6} \right)$$~~

Ответ:  $\arccos \left( \frac{\sqrt{2}}{6} \right)$ .

~~$$\alpha = \arccos \left( \frac{4+2\sqrt{6}}{5+2\sqrt{6}} \right) = \arccos \left( \frac{2+\sqrt{6}}{3+\sqrt{6}} \right) = \arccos \left( \frac{(2+\sqrt{6})(3-\sqrt{6})}{9-6} \right) = \\ = \arccos \left( \frac{\sqrt{6}}{3} \right)$$~~

Ответ:  $\arccos \left( \frac{\sqrt{6}}{3} \right)$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

- |                          |                          |                          |                          |                          |                          |                          |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1                        | 2                        | 3                        | 4                        | 5                        | 6                        | 7                        |
| <input type="checkbox"/> |

СТРАНИЦА  
\_ ИЗ \_

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

- |                            |                            |                            |                            |                            |                            |                            |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|
| <input type="checkbox"/> 1 | <input type="checkbox"/> 2 | <input type="checkbox"/> 3 | <input type="checkbox"/> 4 | <input type="checkbox"/> 5 | <input type="checkbox"/> 6 | <input type="checkbox"/> 7 |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|

СТРАНИЦА  
\_ ИЗ \_

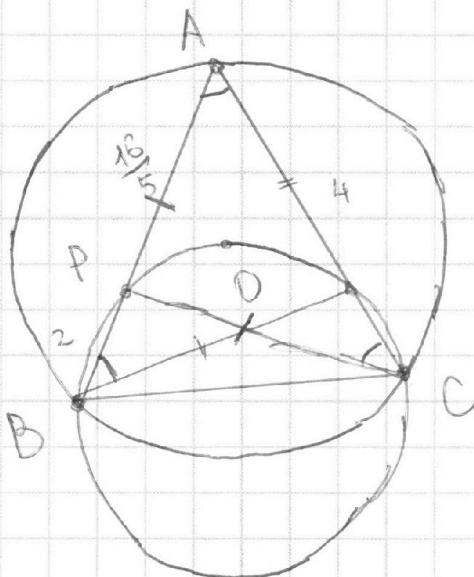
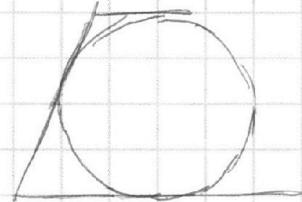
Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$(\sin \alpha - \sin \beta) \sin \alpha = (\cos \alpha - \cos \beta) \cos \alpha$$

~~sinα~~ ~~cosβ~~

$$\cos \alpha \cdot \cos \beta - \sin \alpha \cdot \sin \beta = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha$$

$$\cos(\alpha + \beta) = \cos 2\alpha$$

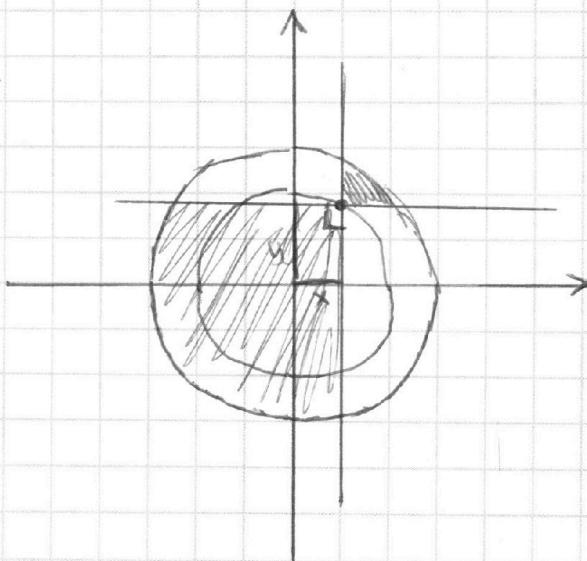


$$\frac{16}{5} + 2 = \frac{26}{5}$$

$$\frac{\frac{16}{5} \cdot \frac{26}{5}}{4} = \frac{4}{5} \cdot \frac{26}{5} = \frac{104}{25} > 4$$

$$(x - 2 \cos \alpha)(y - 2 \sin \alpha) \geq 0$$

- 1 +
- 2 +
- 3 +
- 9 +
- 5 +
- 0
- 7



$$x^2 + y^2 = 4$$

$$\sqrt{9-x^2} + \sqrt{9-y^2}$$

~~10/5~~

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{39}}{5} \cdot \frac{26}{5} \cdot X = \frac{13\sqrt{39}}{10}$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.



- |                          |                          |                          |                          |                          |                          |                          |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| <input type="checkbox"/> |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|

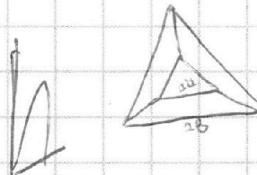
СТРАНИЦА  
\_ ИЗ \_

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по **каждой из задач** нумеруются **отдельно**. Порча QR-кода недопустима!

1.  $A = \overline{aaaa} = 1111 \cdot a = 11 \cdot 101 \cdot a$

$B = 101 \quad C = 55$

Мн.

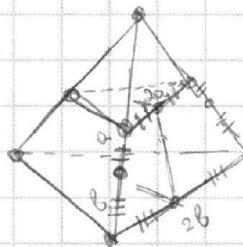


$$2b - 20 = 2(b-a)$$

2.  $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{xy} = \frac{1}{x-3} + \frac{1}{y+3} + \frac{1}{(x-3)(y+3)}$

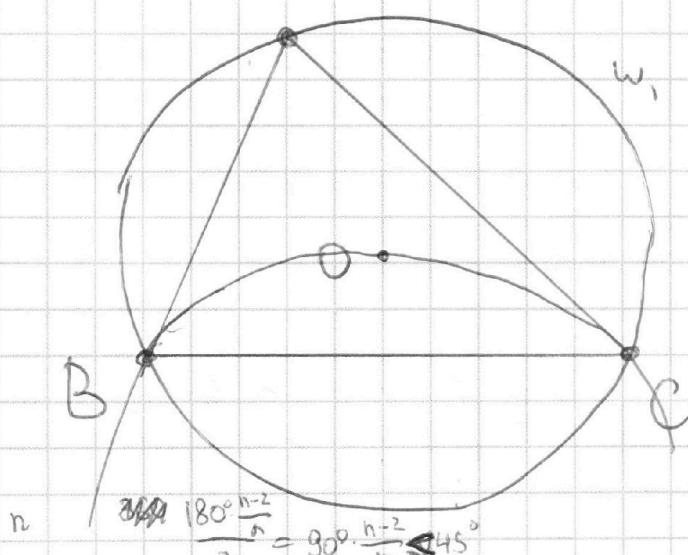
$$\frac{x+y+1}{xy} = \frac{x+y+1}{(x-3)(y-3)}$$

$$\begin{cases} x+y+1=0 \\ xy=(x-3)(y-3) \end{cases} \quad \begin{cases} x+y=-1 \\ x+y=3 \end{cases}$$

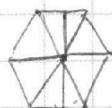


5.

A



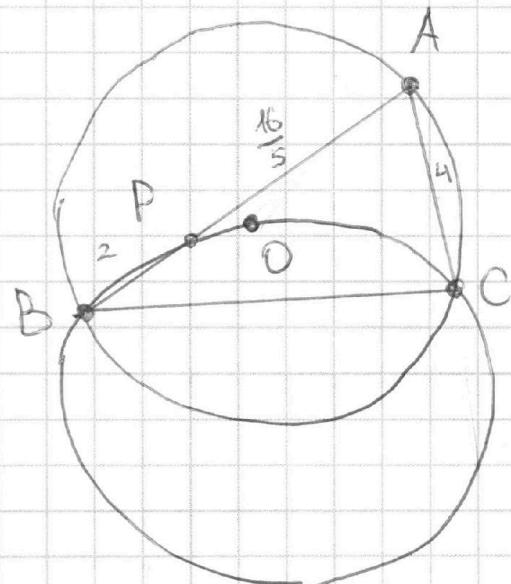
$$n \quad \text{знач} \quad \frac{180^\circ \frac{n-2}{n}}{2} = 90^\circ \cdot \frac{n-2}{n} \quad 45^\circ$$



$$2 \cdot \frac{n-2}{n} \leq 1$$

$$2 \cdot \frac{4-2}{4} \leq 1 \quad n=4$$

$$a+b \geq 2\sqrt{ab}$$



$$2a \cdot r + 2b \cdot r = \sqrt{(a+b)^2 - (a-b)^2} = \sqrt{4ab} = 2\sqrt{ab}$$

$$r = \frac{\sqrt{ab}}{a+b} \leq \frac{1}{2}$$