



МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

11 КЛАСС. Вариант 2



1. [3 балла] Найдите все тройки натуральных чисел $(A; B; C)$ такие, что:
- A — четырёхзначное число, составленное из одинаковых цифр,
 - B — трёхзначное число, хотя бы одна из цифр которого равна 1,
 - C — двузначное число, хотя бы одна из цифр которого равна 5,
 - произведение $A \cdot B \cdot C$ является квадратом некоторого натурального числа.
2. [3 балла] Положительные числа x и y таковы, что значение выражения $K = \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{xy}$ не изменяется, если x уменьшить на 3, а y — увеличить на 3. Найдите все возможные значения выражения $M = x^3 - y^3 - 9xy$.
3. [5 баллов] а) Найдите все пары действительных чисел $(x; y)$ такие, что $(\sin \pi x - \sin \pi y) \sin \pi x = (\cos \pi x + \cos \pi y) \cos \pi x$.
- б) Сколько пар целых чисел (x, y) удовлетворяют одновременно этому уравнению и неравенству

$$\arccos \frac{x}{4} + \arccos \frac{y}{9} < 2\pi?$$

4. [4 балла] В начале месяца было выделено 4 билета на праздничный концерт, которые планировалось случайным образом распределить между одиннадцатиклассниками. В конце месяца выяснилось, что будет выделено больше 4 билетов. Одиннадцатиклассники Петя и Вася вычислили, что вероятность им обоим вместе попасть на концерт в начале месяца была в 3,5 раза меньше, чем оказалась в конце месяца. Сколько всего было выделено билетов на концерт в конце месяца, если количество одиннадцатиклассников не изменилось?
5. [5 баллов] Точка O — центр окружности ω_1 , описанной около остроугольного треугольника ABC . Окружность ω_2 , описанная около треугольника BOC , пересекает отрезок AB в точке P . Найдите площадь треугольника ABC , если $AP = \frac{16}{5}$, $BP = 2$, $AC = 4$.
6. [6 баллов] На координатной плоскости изображена фигура $\Phi(\alpha)$, состоящая из всех точек, координаты $(x; y)$ которых удовлетворяют системе неравенств

$$\begin{cases} (x - 2 \cos \alpha)(y - 2 \sin \alpha) \geq 0, \\ x^2 + y^2 \leq 9. \end{cases}$$

Найдите максимальное значение M периметра (длины границы) фигуры $\Phi(\alpha)$ и укажите все значения α , при которых оно достигается.

7. [6 баллов] Шар Ω касается всех рёбер правильной усечённой пирамиды, а шар ω касается всех её граней. Найдите угол наклона бокового ребра пирамиды к плоскости её основания.



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☒ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА

1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Пусть, $A = \overline{aaaa}$ Тогда $A = 1111 \cdot a = 11 \cdot 101 \cdot a$
 a - ненулевая цифра $\Rightarrow 1 \leq a \leq 9 \Rightarrow A : 11, : 101, : 11^2, : 101^2$
 $\Rightarrow ABC : 11, : 101$
 ABC - точный квадрат $\Rightarrow ABC : 11^2, : 101^2$

$\Rightarrow$ В или С делится на 11 и В или С делится на 101

C - двузначное $\Rightarrow C \leq 99 \Rightarrow C \times 101 \Rightarrow B : 101$
 B - трехзначное $\Rightarrow$

$\Rightarrow B = \overline{vvv}$, где v - ненулевая цифра.
 По условию хотя бы одна из цифр v равно 1 $\Rightarrow v = 1 \Rightarrow$
 $\Rightarrow B = 101$

$B \times 11 \Rightarrow C : 11$
 C - двузначное $\Rightarrow C = \overline{cc}$, где c - ненулевая цифра
 По усл. одна из цифр C равно 5
 $\Rightarrow C = 55$

$ABC = 11 \cdot 101 \cdot a \cdot 101 \cdot 5 \cdot 11 = 11^2 \cdot 101^2 \cdot 5a$
 ABC - кв. $\Rightarrow 5a$ - кв. $\Rightarrow a : 5$
 a - ненулевая цифра $\Rightarrow$

$\Rightarrow a = 5$

Получили: $A = 5555, B = 101, C = 55. ABC = 5555 \cdot 101 \cdot 55 =$
 $= 5555 \cdot 5555 = (5555)^2 (+)$
 $= 101 \cdot 55 \cdot 101 \cdot 55 =$

Ответ: $(5555; 101; 55)$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

1	2	3	4	5	6	7
☐	☒	☐	☐	☐	☐	☐

СТРАНИЦА
1 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$K = \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{xy} = \frac{x+y+1}{xy}$$

По усл., если x заменить на $x-3$, а y — на $y+3$, то зн. не изменится. Тогда:

$$K = \frac{(x-3)+(y+3)+1}{(x-3)(y+3)} = \frac{x+y+1}{(x-3)(y+3)}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{x+y+1}{(x-3)(y+3)} = \frac{x+y+1}{xy} \\ x, y > 0 \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} x+y+1=0 \\ x \neq 0 \\ y \neq 0 \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} x+y+1=0 \\ x \neq -1 \\ x \neq 3 \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} y = -x-1 \\ x \neq 0 \\ x \neq -1 \\ x \neq 3 \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} y = -x-1 \\ x \neq 0 \\ x \neq -1 \\ x \neq 3 \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} y = -x-1 \\ x \neq 0 \\ x \neq -1 \\ x \neq 2 \\ x \neq 3 \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} x-y-3=0 \\ x \neq 0 \\ y \neq 0 \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} y = x-3 \\ x \neq 0 \\ x \neq 3 \end{array} \right. \quad (2)$$

$$(1) \quad x^3 - y^3 - 9xy = x^3 - (x+1)^3 + 9x(x+1) = x^3 - x^3 - 3x^2 - 3x - 1 + 9x^2 + 9x = 6x^2 + 6x - 1$$

$$(2x^3 + 12x^2 + 12x + 1) = 6x^2 + 24x + 12 = 6(x^2 + 4x + 2)$$

Если x_1, x_2 — экстремумы, то $x_1 = -2 - \sqrt{2}$, $x_2 = -2 + \sqrt{2}$

$$y = f(x_1) = 2(-2 - \sqrt{2})^3 + 12(-2 - \sqrt{2})^2 + 12(-2 - \sqrt{2})$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

1
☐

2
☒

3
☐

4
☐

5
☐

6
☐

7
☐

СТРАНИЦА

2 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (x-3)(y+3)=xy \\ x, y > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} xy+3x-3y-9=xy \\ x, y > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x-y-3=0 \\ x, y > 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{matrix} x-y=3 \Rightarrow \\ y>0 \Rightarrow x>3 \end{matrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y=x-3 \\ x>0 \\ x>3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=x-3 \\ x>3 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} x^3 - y^3 - 9xy &= (x-y)(x^2 + y^2 + xy) - 9xy = \\ &= 3x^2 + 3y^2 + 3xy - 9xy = 3(x^2 + y^2 - 2xy) = 3(x-y)^2 = 3 \cdot 3^2 = 27 \end{aligned}$$

Ответ: 27.



1 ☐ 2 ☐ 3 ☒ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА
1 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$a) (\sin \pi x - \sin \pi y) \sin \pi x = (\cos \pi x + \cos \pi y) \cos \pi x$$

$$a = \pi x, b = \pi y$$

$$(\sin a - \sin b) \sin a = (\cos a + \cos b) \cos a \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (\cos^2 a - \sin^2 a) + (\cos a \cdot \cos b + \sin a \cdot \sin b) = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \cos 2a + \cos(a-b) = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2 \cos\left(\frac{3a-b}{2}\right) \cdot \cos\left(\frac{a+b}{2}\right) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \cos\left(\frac{3a-b}{2}\right) = 0 \\ \cos\left(\frac{a+b}{2}\right) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \frac{3a-b}{2} = \frac{\pi}{2} + \pi k, k \in \mathbb{Z} \\ \frac{a+b}{2} = \frac{\pi}{2} + \pi k, k \in \mathbb{Z} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3a-b = \pi + 2\pi k, k \in \mathbb{Z} \\ a+b = \pi + 2\pi k, k \in \mathbb{Z} \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 3\pi x - \pi y = \pi + 2\pi k, k \in \mathbb{Z} \\ \pi x + \pi y = \pi + 2\pi k, k \in \mathbb{Z} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x - y = 2k + 1, k \in \mathbb{Z} \\ x + y = 2k + 1, k \in \mathbb{Z} \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} y = 3x + 2k + 1, k \in \mathbb{Z} \\ y = 2k + 1 - x, k \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

$$\text{Ответ: } (x, 3x + 2k + 1), x \in \mathbb{R}, k \in \mathbb{Z}; (x, 2k + 1 - x), x \in \mathbb{R}, k \in \mathbb{Z}$$

$$b) \arccos \frac{x}{4} + \arccos \frac{y}{9} < 2\pi$$

$$0 \leq \arccos \frac{x}{4} \leq \pi$$

↑
р-во при $\frac{x}{4} = -1$

$$0 \leq \arccos \frac{y}{9} \leq \pi$$

↑
р-во при $\frac{y}{9} = -1$

$$\Rightarrow \arccos \frac{x}{4} + \arccos \frac{y}{9} \leq 2\pi$$

↑
р-во при $x = -4$ и $y = -9$

$$\text{Значит: } \arccos \frac{x}{4} + \arccos \frac{y}{9} < 2\pi \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq -4 \\ y \neq -9 \\ -1 \leq \frac{x}{4} \leq 1 \\ -1 \leq \frac{y}{9} \leq 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq -4 \\ y \neq -9 \\ -4 \leq x \leq 4 \\ -9 \leq y \leq 9 \end{cases}$$

$$\text{Уравнение равносильно } \begin{cases} 3x - y = 2k + 1, k \in \mathbb{Z} \\ x + y = 2k + 1, k \in \mathbb{Z} \end{cases} \leftarrow \begin{matrix} \text{означает, что } 3x \text{ и } y \text{ разной четности} \\ \Leftrightarrow x \text{ и } y \text{ разной четн.} \end{matrix} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x \text{ и } y \text{ разной четности}$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☒	☐	☐	☐	☐

СТРАНИЦА

2 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

1) x - чет, y - нечет.

Пар, удовл. $\begin{cases} -4 \leq x \leq 4 \\ -9 \leq y \leq 9 \end{cases}$ - ровно $5 \cdot 10 = 50$

возможных x возможных y
 $-4, -2, 0, 2, 4$ $-9, -7, -5, -3, -1, 1, 3, 5, 7, 9$

Но среди них есть ровно 1 пара $(-4, -9)$, не удовл. $\begin{cases} x \neq -4 \\ y \neq -9 \end{cases}$

$\rightarrow$ остается $50 - 1 = 49$ пар

2) x - нечет, y - чет

$\begin{cases} x \neq -4 \\ y \neq -9 \end{cases}$ - верно

А пар, удовл. $\begin{cases} -4 \leq x \leq 4 \\ -9 \leq y \leq 9 \end{cases}$ - ровно $4 \cdot 9 = 36$

возможных x возможных y
 $-3, -1, 1, 3$ $-8, -6, -4, -2, 0, 2, 4, 6, 8$

Так, всего пар - $49 + 36 = 85$

Ответ: 85



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении **каждой задачи отдельно**.

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☒	☐	☐	☐

СТРАНИЦА
1 из 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Пусть n - одиннадцатиклассников, m - кол-во выданных билетов в конце месяца.

• В-сть в начале месяца:

Способов раздать билеты - C_n^4 - выбираем 4-ех 11-ков.

Способов, когда Петя и Вася идут, - C_{n-2}^2 - выбираем оставшихся двоих.

$$\Rightarrow \text{Вероятность} = \frac{C_{n-2}^2}{C_n^4} \quad (*)$$

• В-сть в конце месяца

Способов раздать билеты - C_n^m - выбираем m 11-ков

Способов, когда Петя и Вася идут, - C_{n-2}^{m-2} - выбираем оставшихся $m-2$ 11-ков

$$\Rightarrow \text{Вероятность} = \frac{C_{n-2}^{m-2}}{C_n^m} \quad (*)$$

$$\text{Тогда } 3,5 \cdot \frac{C_{n-2}^2}{C_n^4} = \frac{C_{n-2}^{m-2}}{C_n^m} \Leftrightarrow \frac{7}{2} \cdot \frac{(n-4) \cdot (n-5) \cdot 4!}{(n-2)(n-3)(n-4)(n-5) \cdot 2} = \frac{(n-2)!}{(m-2)!(n-m)!} \cdot \frac{m!(n-m)!}{n!}$$

$$\Leftrightarrow \frac{7 \cdot 3!}{(n-2)(n-3)} = \frac{m(m-1)}{n}$$

$$\text{Тогда } 3,5 \cdot \frac{C_{n-2}^2}{C_n^4} = \frac{C_{n-2}^{m-2}}{C_n^m} \Leftrightarrow 3,5 \cdot \frac{(n-2)!}{(n-4)! \cdot 2!} \cdot \frac{4! \cdot (n-4)!}{n!} = \frac{(n-2)!}{(m-2)!(n-m)!} \cdot \frac{m!(n-m)!}{n!}$$

$$\Leftrightarrow 3,5 \cdot \frac{4 \cdot 3}{n(n-1)} = \frac{m(m-1)}{n(n-1)} \Leftrightarrow \frac{7}{2} \cdot 4 \cdot 3 = m(m-1) \Leftrightarrow m^2 - m - 42 = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (m-7)(m+6) = 42 \Leftrightarrow m = 7.$$

Ответ: 7. * (если в условии имеется в виду, что билеты разн., то кол-во способов нужно домножить на $4!$ в 1-ом сл. и на $m!$ во 2-ом, но вероятности от этого не изменятся)

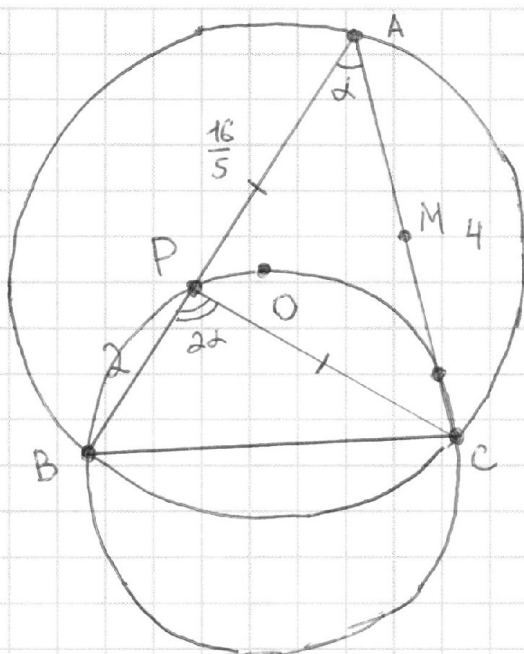


На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☒ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА
1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



$\triangle ABC$ - остроугольный $\Rightarrow O$ лежит
внутри $\triangle ABC$

Пусть $\angle BAC = \alpha \Rightarrow \angle BOC = 2\alpha \Rightarrow$
 $\Rightarrow \angle BPC = \angle BOC = 2\alpha$
BPOC - впис.

$\angle PCA = \angle BPC - \angle PAC = 2\alpha - \alpha = \alpha \Rightarrow$
 $\Rightarrow \angle PCA = \angle PAC \Rightarrow \triangle PAC$ - р/б $\Rightarrow$
 $\Rightarrow AP = PC$

Пусть M - середина AC $\Rightarrow$
 $\Rightarrow PM$ - высота в $\triangle PAC$

$\Rightarrow AM = AP \cdot \cos \alpha$

$$AC = 2AM = 2AP \cdot \cos \alpha \Rightarrow \cos \alpha = \frac{AC}{2AP} = \frac{4}{2 \cdot \frac{16}{5}} = \frac{1}{\frac{8}{5}} = \frac{5}{8}$$

$$\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1 \Rightarrow \sin \alpha = \sqrt{1 - \cos^2 \alpha} = \sqrt{1 - \frac{5^2}{8^2}} = \sqrt{\frac{64 - 25}{64}} =$$

$$= \frac{\sqrt{39}}{8}$$

$$S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} \cdot \sin \alpha \cdot AB \cdot AC = \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{39}}{8} \cdot (AP + BP) \cdot AC = \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{39}}{8} \cdot \left(\frac{16}{5} + 2\right) \cdot 4 =$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{39}}{8} \cdot \frac{28}{5} \cdot 4 = \frac{\sqrt{39} \cdot 13}{10} = \frac{13\sqrt{39}}{10}$$

Ответ: $\frac{13\sqrt{39}}{10}$.



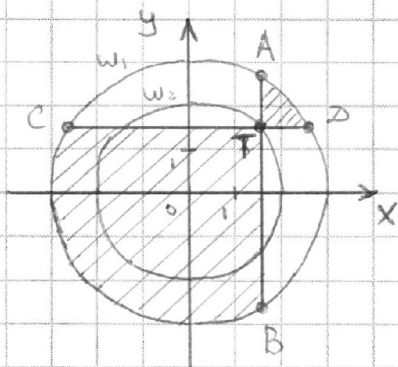
На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☒ 7 ☐

СТРАНИЦА

1 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



$x^2 + y^2 \leq 9$ - круг радиуса 3 с центром в $(0,0)$ - w_1
 $(2\cos\alpha, 2\sin\alpha)$ - некоторая точка T на окружности радиуса 2 с центром в $(0,0)$ - w_2

Проекция вертикальная прямая ($\parallel Oy$) через T пересекает w_1 в точках A и B (A выше B),

а горизонтальная прямая через T ($\parallel Ox$) пересекает w_1 в точках C и D (C левее D)

Тогда $(x - 2\cos\alpha)(y - 2\sin\alpha) > 0$ - углы $\angle DTA$ и $\angle BTC$

Значит, фигура $\Phi(\alpha)$ - объединение 2 криволинейных треугольников ATD и BTC как показано на рис

$M(\alpha) = S + AB + CD$, где S - сумма длин дуг $\widehat{BC}$ и $\widehat{AD}$

$$\angle CTB = \frac{\widehat{BC} + \widehat{AD}}{2} \Rightarrow \widehat{BC} + \widehat{AD} = \pi \Rightarrow S = \pi \cdot 3$$

радиус w_1

$$P((0,0), AB) = 2\cos\alpha - \text{расстояние от } (0,0) \text{ до } AB \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{AB}{2} = \sqrt{3^2 - (2\cos\alpha)^2} \Rightarrow AB = 2\sqrt{9 - 4\cos^2\alpha}$$

$$\text{Аналогично: } CD = 2\sqrt{9 - 4\sin^2\alpha}$$

$$\sqrt{\frac{(Ja)^2 + (Jb)^2}{2}} \geq \frac{Ja + Jb}{2} - \text{нер-во о средних между}$$

р-во при $a=b$ средним арифмет. и квадрат.

$$\Rightarrow M(\alpha) = S + AB + CD = 3\pi + 2\sqrt{9 - 4\cos^2\alpha} + 2\sqrt{9 - 4\sin^2\alpha} = 3\pi + 4 \cdot \frac{\sqrt{9 - 4\cos^2\alpha} + \sqrt{9 - 4\sin^2\alpha}}{2} \leq$$

$$\leq 3\pi + 4 \cdot \sqrt{\frac{9 - 4\cos^2\alpha + 9 - 4\sin^2\alpha}{2}} = 3\pi + 4 \cdot \sqrt{\frac{18 - 4}{2}} = 3\pi + 4 \cdot \sqrt{7} = 3\pi + 4\sqrt{7}$$

$$\uparrow \text{р-во при } 9 - 4\cos^2\alpha = 9 - 4\sin^2\alpha (*)$$



На одной странице можно оформлять **только одну задачу**. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1
☐

2
☐

3
☐

4
☐

5
☐

6
☒

7
☐

СТРАНИЦА
2 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$(*) \quad 9 - 4\sin^2 \alpha = 9 - 4\cos^2 \alpha \Leftrightarrow \sin^2 \alpha = \cos^2 \alpha \quad | : \cos^2 \alpha \quad (\cos \alpha \neq 0 - \text{иначе } \sin^2 \alpha = 1, 1 \neq 0)$$

$$\Leftrightarrow \tan^2 \alpha = 1 \Leftrightarrow \alpha = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi k}{2}, k \in \mathbb{Z}$$

$$\text{Ответ: } 3\pi + 4\sqrt{7} \text{ при } \alpha = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi k}{2}, k \in \mathbb{Z}$$

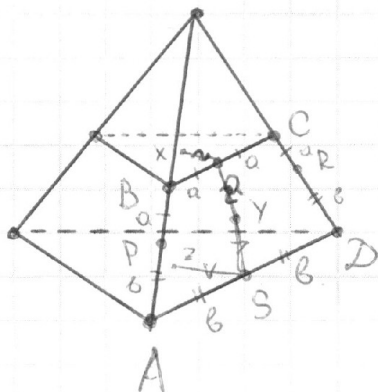


На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☒

СТРАНИЦА
1 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



Пусть это n -угольная пирамида.
Р-и некоторую боковую грань $ABCD$.
Пусть Ω касается её ребер в точках R, Q, S .
Т.к. пирамида правильная, то Q и S - середины BC и AD .

Пусть $BC=2a$, $AD=2b$, O_1 - центр Ω .
Тогда $\triangle O_1 BQ = \triangle O_1 BR \Rightarrow BR=BQ=a$
($O_1 B$ - общ., $O_1 R=O_1 Q$,
тр. - прямоугольн.)

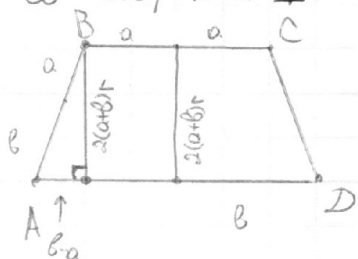
Аналогично: $CR=a$, $AP=DR=b$.

Пусть ω касается верхней грани в точке X , $ABCD$ - в Y ,
нижней - в Z . Т.к. пирамида правильная, X и Z - центры
соотв. граней, а Y лежит на SO .

Пусть O_2 - центр ω . Тогда $\triangle O_2 XQ = \triangle O_2 YQ \Rightarrow XQ=YQ$.
($O_2 Q$ - общая, $O_2 X=O_2 Y$)
тр. - прямоугольн.

Аналогично $YS=ZS$.

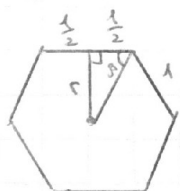
Пусть r - радиус вписанной окр. правильного n -угольника
со стороной 1 . Тогда из подобия $XQ=2ar$, $ZS=2br \Rightarrow QS=2(a+b)r$.



по т. Пифагора $2(a+b)r = \sqrt{(a+b)^2 - (b-a)^2} = \sqrt{4ab} = 2\sqrt{ab} \Rightarrow$

$$\Rightarrow r = \frac{\sqrt{ab}}{a+b} < \frac{\sqrt{ab}}{2\sqrt{ab}} = \frac{1}{2}.$$

нер-во о ср. (<, т.к. $a \neq b$, иначе это
не пирамида)



← пр. n -угольник

$$2\beta = 180^\circ \cdot \frac{n-2}{n} \Rightarrow \beta = 90^\circ \cdot \frac{n-2}{n}$$

$$\cancel{r} < \frac{1}{2} \Rightarrow \beta < 45^\circ \Rightarrow 90^\circ \cdot \frac{n-2}{n} < 45^\circ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2n-4 < n \Rightarrow n < 4 \Rightarrow n=3$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1
☐

2
☐

3
☐

4
☐

5
☐

6
☐

7
☒

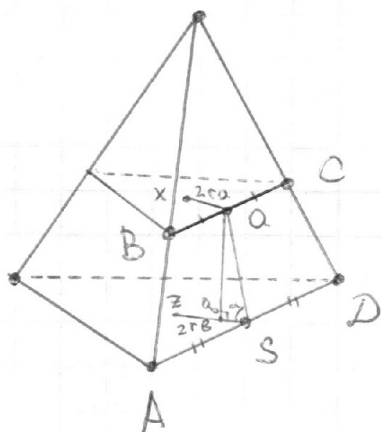
СТРАНИЦА
2 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



← правильный
треугольник

$$\begin{aligned} \text{в нём медиана} - 1 \cos \frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow \\ \Rightarrow r = \frac{1}{3} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{3}}{6} \end{aligned}$$



Пусть Q_0 - проекция Q на нижнюю
грань $\Rightarrow SQ_0 = \frac{1}{3} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{3}}{6}$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \alpha - \text{угол между боковой гранью и осн.} = \\ = \arccos \left(\frac{SQ_0}{SQ} \right) = \arccos \left(\frac{b-a}{a+b} \right) \end{aligned}$$

Не учитывая общности, можно считать, что $a=1$.

$$\text{Тогда: } (b+1) \cdot \frac{\sqrt{3}}{6} = \sqrt{b} \Rightarrow \frac{(b+1)^2 \cdot 3}{36} = b \Rightarrow b^2 + 2b + 1 = 12b \Rightarrow$$

$$\Rightarrow b^2 - 10b + 1 \Rightarrow b = 5 \pm 2\sqrt{6} \quad b > 0, \quad 5 - 2\sqrt{6} < 1 \quad 2 < \sqrt{6} \Rightarrow 5 - 2\sqrt{6} < 1 \quad \ominus$$

$$\Rightarrow b = 5 + 2\sqrt{6}$$

$$\begin{aligned} \alpha = \arccos \left(\frac{\frac{\sqrt{3}}{6} \cdot (4+2\sqrt{6})}{b+2\sqrt{6}} \right) &= \arccos \left(\frac{\frac{\sqrt{3}}{6} \cdot (2+\sqrt{6})}{(3+\sqrt{6})} \right) = \arccos \left(\frac{\sqrt{3}}{6} \cdot \frac{(2+\sqrt{6})(3-\sqrt{6})}{(9-6)} \right) = \\ &= \arccos \left(\frac{\sqrt{3}}{6} \cdot \frac{\sqrt{6}}{3} \right) = \arccos \left(\frac{3 \cdot \sqrt{2}}{6 \cdot 3} \right) = \arccos \left(\frac{\sqrt{2}}{6} \right) \end{aligned}$$

$$\text{Ответ: } \arccos \left(\frac{\sqrt{2}}{6} \right).$$

$$\begin{aligned} \alpha = \arccos \left(\frac{4+2\sqrt{6}}{b+2\sqrt{6}} \right) &= \arccos \left(\frac{2+\sqrt{6}}{3+\sqrt{6}} \right) = \arccos \left(\frac{(2+\sqrt{6})(3-\sqrt{6})}{9-6} \right) = \\ &= \arccos \left(\frac{\sqrt{6}}{3} \right) \end{aligned}$$

$$\text{Ответ: } \arccos \left(\frac{\sqrt{6}}{3} \right)$$

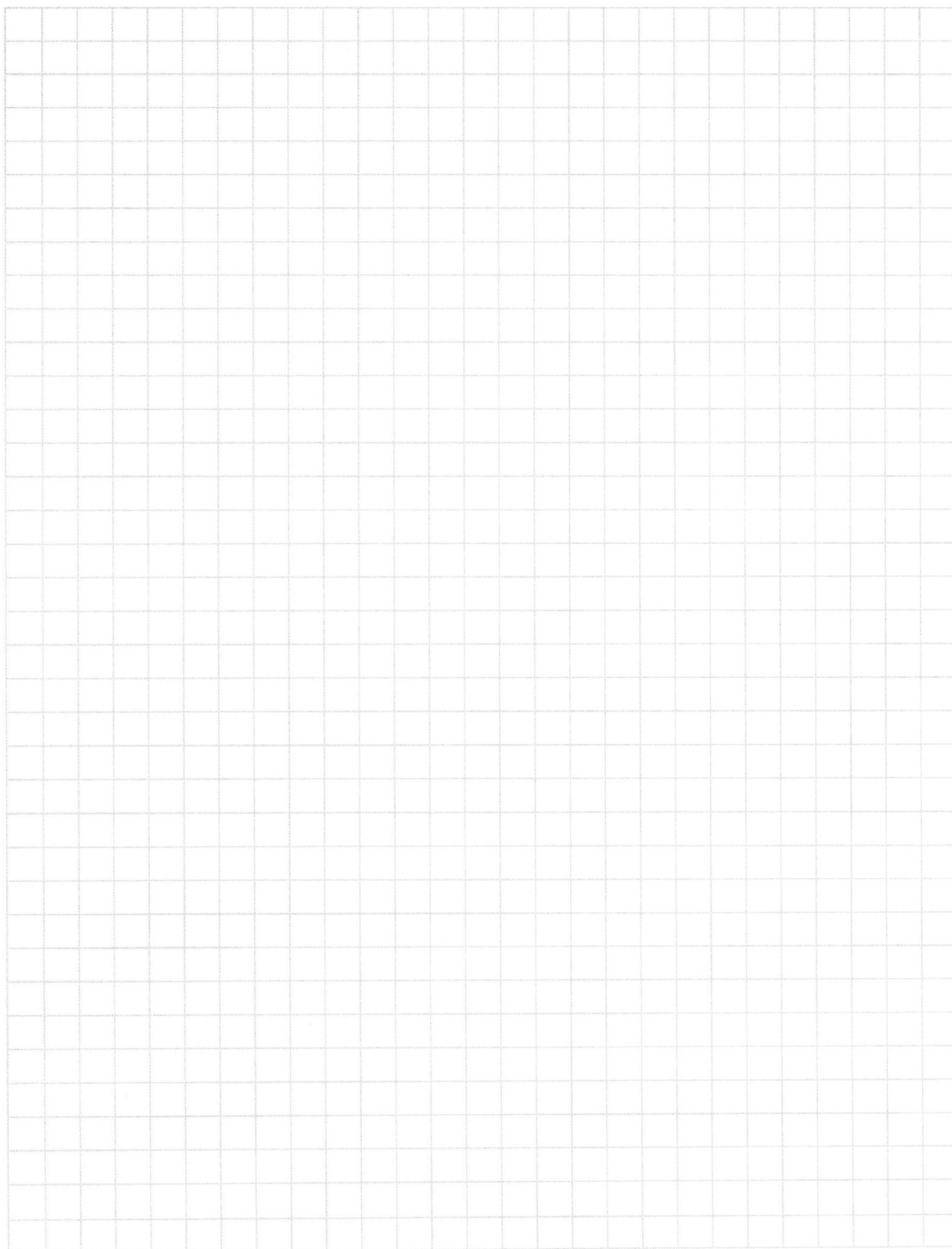


На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. **Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно.** Порча QR-кода недопустима!





На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

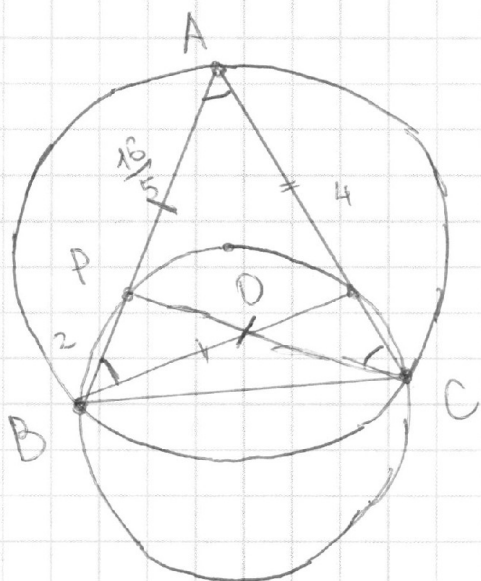
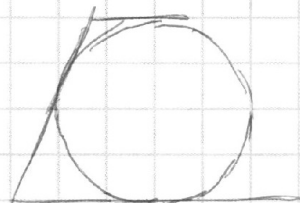
Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$(\sin a - \sin b) \sin a = (\cos a - \cos b) \cos a$$

~~sin a cos a~~

$$\cos a \cdot \cos b - \sin a \cdot \sin b = \cos^2 a - \sin^2 a$$

$$\cos(a+b) = \cos 2a$$



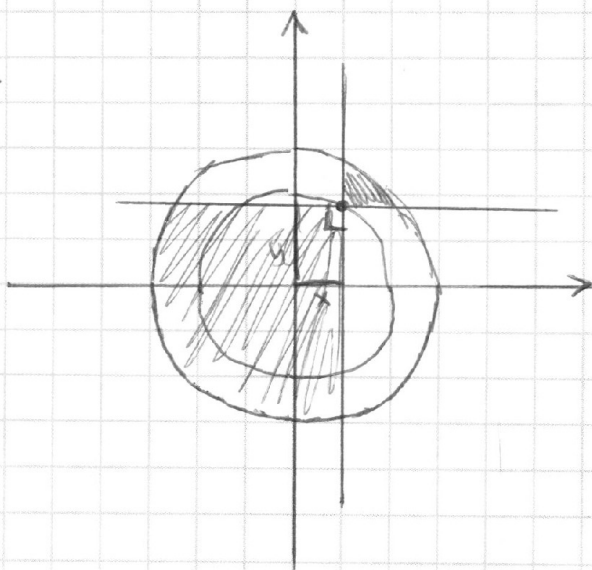
$$\frac{16}{5} + 2 = \frac{26}{5}$$

$$\frac{\frac{16}{5} \cdot \frac{26}{5}}{4} = \frac{4}{5} \cdot \frac{26}{5} = \frac{104}{25} > 4$$

$$(x - 2\cos \alpha)(y - 2\sin \alpha) \geq 0$$

$\alpha + b$

- 1 +
- 2 +
- 3 +
- 4 +
- 5 +
- 6
- 7



$$x^2 + y^2 = 4$$

$$\sqrt{9-x^2} + \sqrt{9-y^2} \leq$$

~~atb~~

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{39}}{2} \cdot \frac{26}{5} \cdot \frac{13}{5} = \frac{13\sqrt{39}}{10}$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐

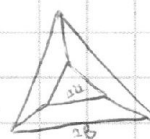
СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

1. $A = \overline{aaaa} = 1111 \cdot a = 11 \cdot 101 \cdot a$

$B = 101 \quad C = 55$

~~111~~



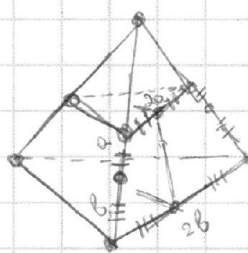
$2b - 2a = 2(b - a)$

2. $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{xy} = \frac{1}{x-3} + \frac{1}{y+3} + \frac{1}{(x-3)(y+3)}$

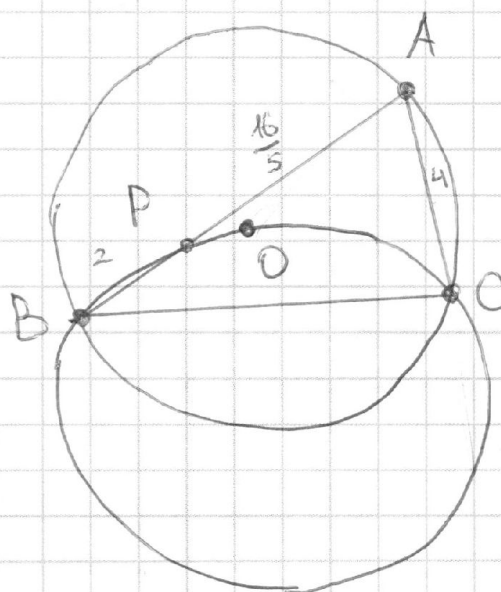
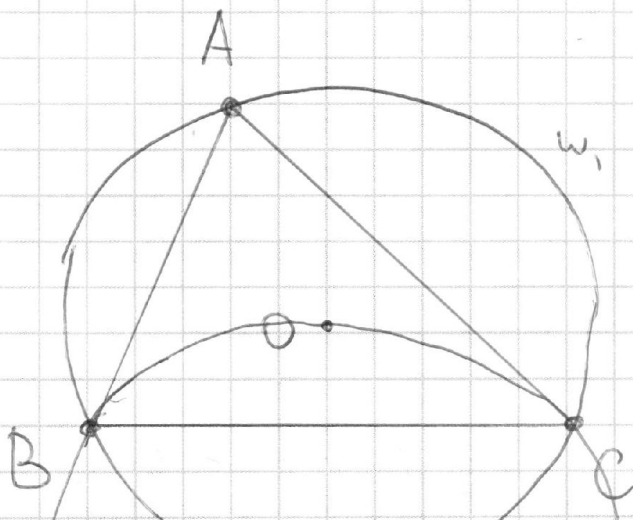
$\frac{x+y+1}{xy} = \frac{x+y+1}{(x-3)(y-3)}$

$\begin{cases} x+y+1=0 \\ xy=(x-3)(y-3) \end{cases}$

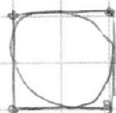
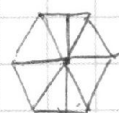
$\begin{cases} x+y=-1 \\ x+y=3 \end{cases}$



5.



$n \quad \frac{180^\circ \cdot n - 2}{2} = 90^\circ \cdot \frac{n-2}{n} \leq 45^\circ$



$2 \cdot \frac{n-2}{n} \leq 1$
 $2n-4 \leq n$
 $n \leq 4$

$2a \cdot r + 2b \cdot r = \sqrt{(a+b)^2 - (a-b)^2} = \sqrt{4ab} = 2\sqrt{ab}$

$r = \frac{\sqrt{ab}}{a+b} \leq \frac{1}{2}$

$a+b \geq 2\sqrt{ab}$