МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

11 КЛАСС. Вариант 1

1. [3 балла] Найдите все тройки натуральных чисел $(A; B; C)$ такие, что:
   - A — четырёхзначное число, составленное из одинаковых цифр,
   - B — трёхзначное число, хотя бы одна из цифр которого равна 2,
   - C — двузначное число, хотя бы одна из цифр которого равна 3,
   - произведение $A \cdot B \cdot C$ является квадратом некоторого натурального числа.

2. [3 балла] Положительные числа x и y таковы, что значение выражения $K = \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{2}{xy}$ не изменяется, если x уменьшить на 1, а y — увеличить на 1. Найдите все возможные значения выражения $M = x^3 - y^3 - 3xy$.

3. [5 баллов] а) Найдите все пары действительных чисел $(x; y)$ такие, что $(\sin \pi x + \sin \pi y) \sin \pi x = (\cos \pi x + \cos \pi y) \cos \pi x$.

   б) Сколько пар целых чисел $(x; y)$ удовлетворяют одновременно этому уравнению и неравенству
   $$\arcsin \frac{x}{5} + \arccos \frac{y}{4} < \frac{3\pi}{2}?$$

4. [4 балла] В начале месяца было выделено 4 билета на праздничный концерт, которые планировалось случайным образом распределить между одиннадцатиклассниками. В конце месяца выяснилось, что будет выделено больше 4 билетов. Одиннадцатиклассники Петя и Вася вычислили, что вероятность им обоим вместе попасть на концерт в начале месяца была в 2,5 раза меньше, чем оказалась в конце месяца. Сколько всего было выделено билетов на концерт в конце месяца, если количество одиннадцатиклассников не изменилось?

5. [5 баллов] Точка O — центр окружности ω_1, описанной около остроугольного треугольника ABC. Окружность ω_2, описанная около треугольника BOC, пересекает отрезок AB в точке P. Найдите площадь треугольника ABC, если $AP = \frac{15}{[illegible]}$, $BP = 5$, $AC = 9$.

6. [6 баллов] На координатной плоскости изображена фигура $\Phi(\alpha)$, состоящая из всех точек, координаты $(x; y)$ которых удовлетворяют системе неравенств
   $$\begin{cases} (x - 3\sqrt{2}\sin\alpha)(y - 3\sqrt{2}\cos\alpha) \leqslant 0, \\ x^2 + y^2 \leqslant 25. \end{cases}$$
   Найдите максимальное значение M периметра (длины границы) фигуры $\Phi(\alpha)$ и укажите все значения α, при которых оно достигается.

7. [6 баллов] Шар Ω касается всех рёбер правильной усечённой пирамиды, а шар ω касается всех её граней. Пусть сторона верхнего основания меньше, чем сторона нижнего. Найдите отношение площади боковой поверхности пирамиды к площади её нижнего основания.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

1 ☒ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. **Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно.** Порча QR-кода недопустима!

№1. Пусть числа имеют вид: $A = \overline{aaaa}$

$B = \overline{xyz}$ $(a, x, m \neq 0)$

$C = \overline{mn}$

Тогда ≥ 1 цифра числа B равна 2. (1)

И ≥ 1 цифра числа C равна 3. (2)

$A \cdot B \cdot C = t^2$, $t \in \mathbb{N}$.

$A = a \cdot 1000 + a \cdot 100 + a \cdot 10 + a = a \cdot 1111 = a \cdot 11 \cdot 101$.

a – это цифра от 1 до 9. Заметим, что 101 – простое число и $A \cdot B \cdot C = t^2$. В A 101 входит в 1ой степени ($a \not\vdots\, 101$, т.к. $a \leq 9$). В C 101 входит в нулевой степени, т.к. $C \leq 99 < 101$. В t^2 101 входит в чётной степени, т.к. это квадрат. Следовательно получаем, что в разложении числа B на множители 101 входит в нечётной степени $\Rightarrow$ хотя бы в 1ой $\Rightarrow$

$\Rightarrow B \vdots 101$, $100 \leq B \leq 999$ $\Rightarrow \left[\begin{array}{l} B=101 \\ B=202 \\ B=303 \\ B=404 \\ B=505 \\ B=606 \\ B=707 \\ B=808 \\ B=909 \end{array}\right.$. Воспользуемся условием (1). Получаем, что B однозначно равно $202 = 2 \cdot 101$.

$$A \cdot B \cdot C = (a \cdot 11 \cdot 101) \cdot (2 \cdot 101) \cdot C = t^2$$

$$2a \cdot 11 \cdot C = \left(\frac{t}{101}\right)^2 = x^2$$

Аналогичными рассуждениями, получаем, что $x^2 \vdots 11 \Rightarrow$ в $\frac{x^2}{11} = 2a \cdot C$ 11 входит в нечётной степени $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ хотя бы в 1ой $\Rightarrow$ $\left.\begin{array}{l} 2a \cdot C \vdots 11 \\ 2 \not\vdots\, 11 \\ a \not\vdots\, 11, \text{ т.к. } 1 \leq a \leq 9 \end{array}\right\} \Rightarrow C \vdots 11$.

Продолжение на обороте. →

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

1 ☒ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. **Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно.** Порча QR-кода недопустима!

№1 Продолжение

$\left.\begin{array}{l} C \vdots 11 \\ C\text{-двузначное} \\ \text{в числе } C \text{ есть} \\ \text{хотя бы 1 цифра 3} \end{array}\right\} \Rightarrow$ число C однозначно равно 33.

Итого, $C = 33$, $A = 11 \cdot 101 \cdot a$, $B = 202$.

$A \cdot B \cdot C = 3 \cdot 11 \cdot 11 \cdot 101 \cdot a \cdot 2 \cdot 101 = 3 \cdot 2a \cdot (11 \cdot 101)^2 = t^2$.

$3 \cdot 2a = \left(\frac{t}{11 \cdot 101}\right)^2 = y^2$.

Тогда в a 3 и 2 входят в чётных степенях $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ хотя бы в первых $\Rightarrow \begin{cases} a \vdots 6 \\ a\text{ — натуральное} \\ \text{число от 1 до 9} \end{cases} \Rightarrow a = 6$.

Значит, получаем. $C = 33$
$B = 202$

$A = 11 \cdot 101 \cdot 6 = 1111 \cdot 6 = 6666$

Итоговая тройка единственная и она нам подходит

Ответ: $(6666; 202; 33)$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

1	2	3	4	5	6	7
☐	☒	☐	☐	☐	☐	☐

СТРАНИЦА 1 из 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. **Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно.** Порча QR-кода недопустима!

№2 $x, y > 0$. По условию:

$$\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{2}{xy}=\frac{1}{x-1}+\frac{1}{y+1}+\frac{2}{(x-1)(y+1)}$$

$x \neq 1$.

$$\frac{y+x+2}{xy}=\frac{(x-1)+(y+1)+2}{(x-1)(y+1)}$$

$$\frac{y+x+2}{xy}=\frac{x+y+2}{(x-1)(y+1)} \quad \Big| :(x+y+2)\neq 0, \text{ т.к. } \begin{cases} x>0 \\ y>0 \end{cases} \Rightarrow x+y+2>2.$$

$$\frac{1}{xy}=\frac{1}{(x-1)(y+1)}$$

$$xy = xy + x - y - 1.$$

$$x = y+1.$$

$$M = x^3-y^3-3xy=(y+1)^3-y^3-3y(y+1)=$$
$$=y^3+3y^2+3y+1-y^3-3y^2-3y=1.$$

Ответ: 1.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☒ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА 1 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. **Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно.** Порча QR-кода недопустима!

№3(б) Пускай $\begin{cases}\alpha=\pi x\\ \beta=\pi y\end{cases}$ (*)

$$(\sin\alpha+\sin\beta)\sin\alpha=(\cos\alpha+\cos\beta)\cos\alpha.$$

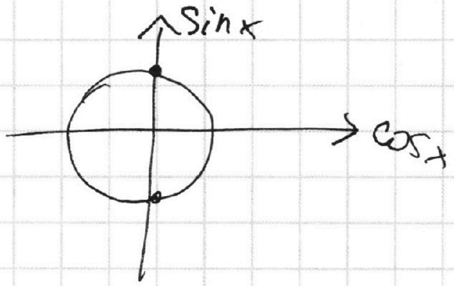
$$\sin^2\alpha+\sin\beta\sin\alpha=\cos^2\alpha+\cos\alpha\cos\beta$$

$$(\cos^2\alpha-\sin^2\alpha)+(\cos\alpha\cos\beta-\sin\beta\sin\alpha)=0.$$

$$\cos(2\alpha)+\cos(\alpha+\beta)=0.$$

$$2\cos\frac{3\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}=0$$

$$\left[\begin{array}{l}\cos\frac{3\alpha+\beta}{2}=0\\ \cos\frac{\alpha-\beta}{2}=0\end{array}\right. \Rightarrow$$



$$\Rightarrow\left[\begin{array}{l}\frac{3\alpha+\beta}{2}=\frac{\pi}{2}+\pi k_1\\ \frac{\alpha-\beta}{2}=\frac{\pi}{2}+\pi k_2\end{array}\right., \text{ где } k_i\in\mathbb{Z} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow\left[\begin{array}{l}3\alpha+\beta=\pi+2\pi k_1\\ \alpha-\beta=\pi+2\pi k_2\end{array}\right. \overset{(*)}{\Rightarrow}\left[\begin{array}{l}3\pi x+\pi y=\pi+2\pi k_1\\ \pi x-\pi y=\pi+2\pi k_2\end{array}\right. \Rightarrow$$

$$\Rightarrow\left[\begin{array}{l}3x+y=1+2k_1\\ x-y=1+2k_2\end{array}\right. \Rightarrow\left[\begin{array}{l}x=\frac{2k_1+1-y}{3}\\ x=y+1+2k_2.\end{array}\right.$$

Получаем, что нам подходят пары вида

$\left(\frac{2k+1-t}{3}, t\right)$ и $(t+1+2k, t)$, где $k\in\mathbb{Z}$, t — действительное.

Ответ: $\left(\frac{2k+1-t}{3}, t\right)$ и $(t+1+2k, t)$, где $k\in\mathbb{Z}$ и t — действительное.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☒ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА 2 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. **Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно.** Порча QR-кода недопустима!

(б). $\arcsin\frac{x}{5}+\arccos\frac{y}{4}<\frac{3\pi}{2}$.

$$\left.\begin{array}{l}\arcsin t\in\left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]\\ \arccos t\in[0;\pi]\end{array}\right\}\Rightarrow \arcsin\alpha+\arccos\beta\le\frac{3\pi}{2},$$

равенство достигается только в случае
(этому неравенству)

$$\begin{cases}\arcsin\alpha=\frac{\pi}{2}\\ \arccos\beta=\pi\end{cases}\Rightarrow$$ Нам удовлетворяют все пары целых $(x;y)$ кроме

таких: $$\begin{cases}\arcsin\overbrace{\frac{x}{5}}^{\text{от } -1 \text{ до } 1}=\frac{\pi}{2}\\ \arccos\underbrace{\frac{y}{4}}_{\text{от } -1 \text{ до } 1}=\pi\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\frac{x}{5}=1 \;(=\sin\frac{\pi}{2})\\ \frac{y}{4}=-1.\end{cases}$$

$\Updownarrow$ $\begin{cases}x=5\\ y=-4.\end{cases}$ — только такая пара не подходит под нер-во.

~~$\begin{cases}x=\frac{5\pi}{2}+10\pi k_1\\ y=4\pi+8\pi k_2\end{cases}$ $k_i\in\mathbb{Z}$.~~

~~$x=\pi\left(\frac{5}{2}+10k_1\right)$ рациональное число $\ne0$, т.к. $\frac{5}{2}\ne-10k_1$, т.к. левая часть дробная, а $-10k_1$ — целое $\Rightarrow$~~

~~$\Rightarrow$ x — иррациональное. Значит, кол-во целых пар от наложения условия с этим нер-вом не изменилось.~~

x и y разной чётности, значит, подходят под решение первого ур-ния (*)

Пары вида $(t+1+2k, t)$ или $\left(\frac{2k+l-t}{3}, t\right)$ или целые пары $(x;y)$ с условием $\left[\begin{array}{l}3x+y=1+2k_1\\ x-y=1+2k_2\end{array}\right.$ $k_i\in\mathbb{Z}$ $\Rightarrow$

$\Rightarrow\left[\begin{array}{l}3x+y\text{ — нч}\\ x-y\text{ — нч}\end{array}\right.\Leftrightarrow$ x и y разной чётности. (*) Значит, нам подходят все пары целых x и y разной чётности.

Ответ: бесконечно много $-\,1=$ бесконечно много.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☒ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА 1 ИЗ 1.

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. **Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно.** Порча QR-кода недопустима!

№4 Пусть всего учеников было x. А в конце месяца было выделено n билетов, где $n>4 \Rightarrow n \geq 5$. (n и $x \in \mathbb{N}$). $x \geq 2$. (Петя и Вася)

Вероятность того, что Петя и Вася оба пойдут на концерт $\frac{C_{x-2}^{2}}{C_x^4}$ (Это в начале месяца).

Т.к. C_x^4 – кол-во способов распределить 4 билета между x людьми, чтобы каждому досталось не более 1 билета*.

(* – так мне ответили на вопрос по условию)

А C_{x-2}^2 – распределить между всеми кроме Пети и Васи оставшиеся 2 билета.

В конце месяца вероятность будет $\frac{C_{x-2}^{n-2}}{C_x^n}$.

По условию: $\frac{C_{x-2}^2}{C_x^4} \cdot \frac{5}{2} = \frac{C_{x-2}^{n-2}}{C_x^n}$. Найдём n.

$$\frac{(x-2)!\,(x-4)!\,4!\cdot 5}{(x-4)!\,2!\cdot x!\cdot 2} = \frac{(x-2)!\,(x-n)!\,n!}{(n-2)!\,(x-n)!\,x!}$$

$$\frac{5\cdot 3!}{x(x-1)} = \frac{n(n-1)}{x(x-1)}$$

$5\cdot 6 = n(n-1)$

$30 = n(n-1)$

$f(n) = n^2 - n$ возрастает при $n \in \mathbb{N}$, т.к. $f'(n) = 2n - 1 > 0$ при $n \geq 1$

$f(6) = 30 \Rightarrow$ единственное подходящее n – это $n = 6$

Ответ: 6 билетов.

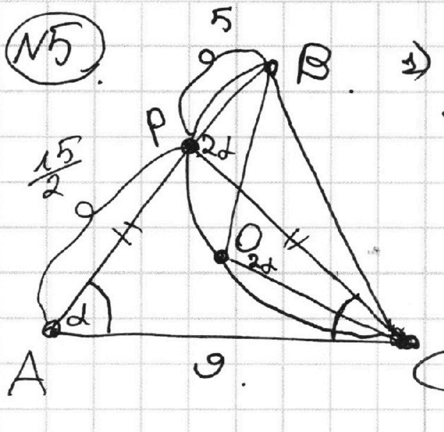
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☒ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА 1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. **Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно.** Порча QR-кода недопустима!

№5.



1) Пусть $\angle A = \alpha$.

$\angle BOC = 2\angle A = 2\alpha$ как центральный угл.

$(BPOC)$ — вписанный $\Rightarrow$

$\Rightarrow \angle BOC = \angle BPC = 2\alpha$

в $\triangle APC$: $\angle PAC = \alpha$

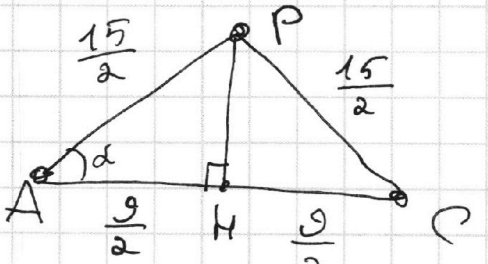
$\angle APC = 180^\circ - \angle BPC = 180^\circ - 2\alpha$ $\Big\} \Rightarrow$

$\Rightarrow \angle PCA = \alpha \Rightarrow \triangle APC$ — р/б $\Rightarrow AP = PC = \frac{15}{2}$.

Дано:
$\triangle ABC$.
O — центр опис. окр.
$(BOC) \cap AB = P$
отрезок
$AP = \frac{15}{2}$
$BP = 5$
$AC = 9$
$S_{\triangle ABC}$ — ?

2) Рассмотрим $\triangle APC$. Проведём в нём высоту PH, т.к. он р/б, то PH ещё и медиана $\Rightarrow$

$\Rightarrow \begin{cases} AH = CH = \frac{9}{2} \\ \angle AHP = 90^\circ \end{cases}$



Из прямоугольного $\triangle PHA$: $\cos\alpha = \frac{AH}{AP} = \frac{\frac{9}{2}}{\frac{15}{2}} = \frac{9}{15} = \frac{3}{5}$. Т.к. по условию $\triangle ABC$ — остроугольный $\Rightarrow \angle A < 90^\circ \Rightarrow$

$\Rightarrow \sin A = \sin\alpha = \sqrt{1-\cos^2\alpha} = \sqrt{1-\frac{9}{25}} = \sqrt{\frac{16}{25}} = \frac{4}{5}$.

3) По формуле площади треугольника получаем, что $S_{\triangle ABC} = \frac{AB \cdot AC \cdot \sin\alpha}{2} = \frac{\left(\frac{15}{2}+5\right)\cdot 9 \cdot \frac{4}{5}}{2} = \frac{\frac{15+10}{2}\cdot 9 \cdot \frac{4}{5}}{2} =$

$= \frac{25 \cdot 9 \cdot 4}{2 \cdot 2 \cdot 5} = 5 \cdot 9 = 45$

Ответ: 45.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☒ 7 ☐

СТРАНИЦА 1 из 3

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. **Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно.** Порча QR-кода недопустима!

№6 $\begin{cases}(x-3\sqrt2\sin\alpha)(y-3\sqrt2\cos\alpha)\le 0 \ (1)\\ x^2+y^2\le 25 \ (2)\end{cases}$

(2) $x^2+y^2-25=0$ - уравнение окружности с центром в (0;0) и радиусом 5. Тогда ~~первому~~ второму удовлетворяют точки круга с центром в (0;0) и радиуса 5.

(1) $(x-3\sqrt2\sin\alpha)(y-3\sqrt2\cos\alpha)\le 0$

$(*)\left[\begin{array}{l}\begin{cases}x-3\sqrt2\sin\alpha<0\\ y-3\sqrt2\cos\alpha>0\end{cases}\\ \begin{cases}x-3\sqrt2\sin\alpha>0\\ y-3\sqrt2\cos\alpha<0\end{cases}\\ x-3\sqrt2\sin\alpha=0\\ y-3\sqrt2\cos\alpha=0\end{array}\right.$

$(-1)3\sqrt2\le 3\sqrt2\sin\alpha\le 3\sqrt2\cdot 1$

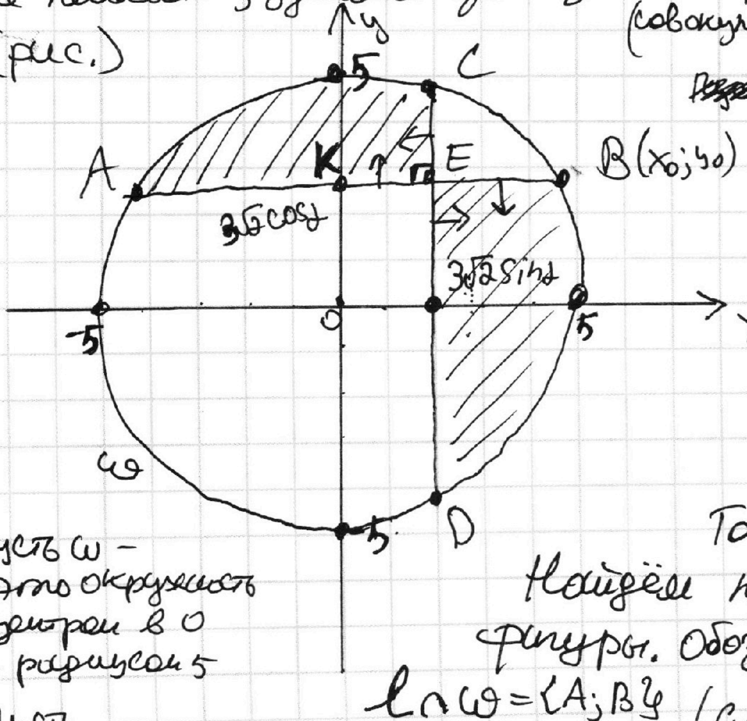
$3\sqrt2\le 5$, т.к. $18\le 25$.

Тогда

$-5\le -3\sqrt2\le 3\sqrt2\le 5$.

Значит, точки $(3\sqrt2\sin\alpha;0)$ и $(0;3\sqrt2\cos\alpha)$ лежат внутри круга.

Нарисуем ~~фигуру~~ фигуру, состоящую из всех точек на плоскости, удовлетворяющих неравенствам (совокупности (*)) (рис.)



~~Решение~~ Мы получаем заштрихованную на рисунке область.

Пускай l - это прямая $y=3\sqrt2\cos\alpha$ и и m - прямая $x=3\sqrt2\sin\alpha$.

Тогда $l\perp m$.

Пусть ω - это окружность с центром в O и радиусом 5

Пусть $AB\cap$ осьOy $=K$

Найдём периметр данной фигуры. Обозначим:

$l\cap\omega=\{A;B\}$

$m\cap\omega=\{C;D\}$

$l\cap m=E$

(смотреть рисунок)

Продолжение на следующем листе →

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☒ 7 ☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. **Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно.** Порча QR-кода недопустима!

№6 Продолжение. Посчитаем сумму длин дуг $\overset{\frown}{AC}$ и $\overset{\frown}{BD}$ окр. ω, принадлежащих $\Phi(\alpha)$.

$\angle AEC = 90^\circ \Rightarrow \frac{\overset{\frown}{AC}+\overset{\frown}{BD}}{2} = 90^\circ \Rightarrow \overset{\frown}{AC}+\overset{\frown}{BD} = 180^\circ \Rightarrow$

длина дуги

$\Rightarrow |\overset{\frown}{AC}| + |\overset{\frown}{BD}| = \pi \cdot \underset{\text{радиус } \omega}{r} = \pi \cdot 5 = 5\pi.$

Теперь найдём длину отрезка AB $(AE+EB)$.

Пусть (x_0, y_0) — координаты точки B. Тогда

$\begin{cases} x_0^2 + y_0^2 = 25 \\ y_0 = 3\sqrt{2}\cos\alpha \end{cases} \Rightarrow x_0^2 = 25 - 18\cos^2\alpha \Rightarrow$

$\Rightarrow x_0 = +\sqrt{25-18\cos^2\alpha}$

т.к. B находится в четверти с $\begin{cases} x>0 \\ y>0 \end{cases}$.

Тогда $KB = x_0 = \sqrt{25-18\cos^2\alpha} = AK$

из симметрии относительно Oy.

Получаем, что $AB = 2KB = 2\sqrt{25-18\cos^2\alpha}$.

Аналогично, получим, что $CD = 2\sqrt{25-18\sin^2\alpha}$.

Итого, посчитаем периметр $\Phi(\alpha)$

$|\overset{\frown}{AC}| + |\overset{\frown}{BD}| + \underbrace{AE+EB}_{AB} + \underbrace{CE+ED}_{CD} = 5\pi + 2\sqrt{25-18\cos^2\alpha} +$

$+ 2\sqrt{25-18\sin^2\alpha} = f(\alpha)$. Мы хотим найти максимальное значение функции $f(\alpha)$ и при каких α оно достигается.

Продолжение на обороте →

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно.**

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☒ 7 ☐

СТРАНИЦА 3 из 3

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. **Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно.** Порча QR-кода недопустима!

N6 Продолжение. Часть 2

$$\sin^2(2\alpha) \le 1.$$

$$4\cos^2\alpha\sin^2\alpha \le 1.$$

$$18^2\cos^2\alpha\sin^2\alpha \le 9^2$$

$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$ $\downarrow$

$$25^2 - 25\cdot 18 + 18^2\cos^2\alpha\sin^2\alpha \le 9^2 + 25^2 - 25\cdot 18.$$

$$(\underbrace{25-18\cos^2\alpha}_{\ge 0 \text{ т.к. } \cos^2\alpha \le 1})(\underbrace{25-18\sin^2\alpha}_{\ge 0 \text{ т.к. } \sin^2\alpha \le 1}) \le 9^2 + 25\cdot 7$$

$$2\sqrt{(25-18\cos^2\alpha)(25-18\sin^2\alpha)} \le 2\sqrt{81+175}$$

$$= 25\cdot 2 - 18(\cos^2\alpha+\sin^2\alpha) + 2\sqrt{(25-18\cos^2\alpha)(25-18\sin^2\alpha)}$$

$\Updownarrow$ $2\cdot 16$ $+50-18$

$$\left(\underbrace{\sqrt{25-18\cos^2\alpha}}_{\ge 0} + \underbrace{\sqrt{25-18\sin^2\alpha}}_{\ge 0}\right)^2 \le 2\cdot 16 + 32$$

$$\sqrt{25-18\cos^2\alpha} + \sqrt{25-18\sin^2\alpha} \le 8$$

$$5\pi + 2\left(\sqrt{25-18\cos^2\alpha} + \sqrt{25-18\sin^2\alpha}\right) \le 5\pi + 8\cdot 2$$

$5\pi + 16$ — это максимум $f(\alpha)$. Причём он достигается только, если во всех предыдущих неравенствах — равенство. То есть из наших преобразований: тогда и только тогда, когда $\sin^2(2\alpha) = 1$. $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ $2\alpha = \frac{\pi}{2} + \pi k$ $\Rightarrow$ $\alpha = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi k}{2}$, где $k \in \mathbb{Z}$.

Ответ: макс. $M = 5\pi + 16$

достигается при $\alpha = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi k}{2}$, где $k \in \mathbb{Z}$.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

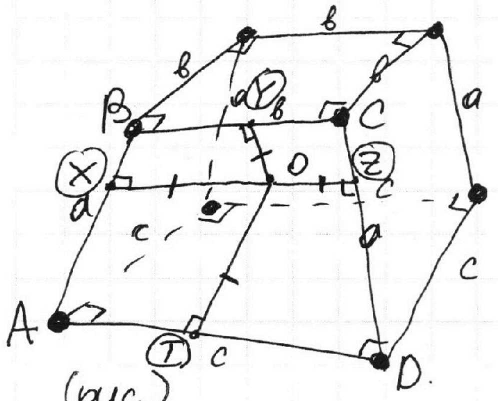
1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☒

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. **Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно.** Порча QR-кода недопустима!

№7 Пирамида правильная => основание — ~~квадраты~~ правильные многоугольники, грани — равнобедренные трапеции.

Пусть b и c — стороны верхнего и нижнего основания (по условию $b < c$), a — боковая сторона р/б трапеции (боковой грани пирамиды).

Пусть O — центр сферы Ω.



(рис.)

Рассмотрим одну из боковых граней — грань $ABCD$ (см. рис.)

Пусть O_1 — проекция O на ~~про~~ плоскость $ABCD$.

Пусть X, Y, Z, T — точки касания шара Ω и рёбер AB, BC, CD, DA соответственно.

$OX = OY = OZ = OT$.

$\triangle XOO_1$ — прямоугольный ($OO_1 \perp (ABCD) \Rightarrow OO_1 \perp O_1X$) $\Rightarrow$

$\Rightarrow XO_1 = \sqrt{XO^2 - OO_1^2}$. Аналогично получаем, что

$YO_1 = \sqrt{YO^2 - OO_1^2}$, $ZO_1 = \sqrt{ZO^2 - OO_1^2}$, $TO_1 = \sqrt{TO^2 - OO_1^2}$.

Т.к. $XO = OY = OZ = OT \Rightarrow XO_1 = YO_1 = ZO_1 = TO_1$.

$O_1 \in (ABCD)$
$OO_1 \perp (ABCD)$
OX — наклонная
$OX \perp AB$
} по т.т.п. $\Rightarrow$ $O_1X \perp AB$. Аналогично, $O_1X \perp BC, CD, AD$ } $\Rightarrow$

$\Rightarrow O_1$ — центр вписанной окружности трапеции $ABCD$ $\Rightarrow$ по св-ву

$\Rightarrow$ трапеция описанная $\Rightarrow AB + CD = BC + AD \Rightarrow$

$\Rightarrow 2a = b + c$. (*)

Если что, рисую четырёхугольное основание для удобства.
Всего у нас n-угольное основание.

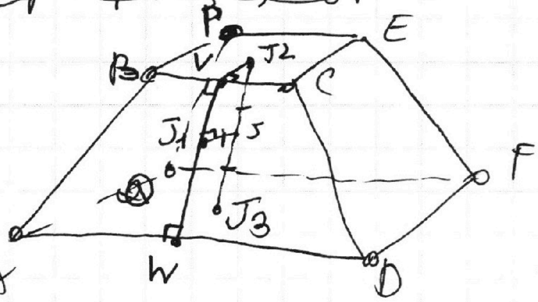
Продолжение на ~~обороте~~ следующем листе →

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☒ СТРАНИЦА 2 из 3

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. **Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно.** Порча QR-кода недопустима!

N7 Продолжение. Часть 1



Спроецируем J на (BPCE), (ABCD), (AQFD)

Получим J_2, J_1, J_3

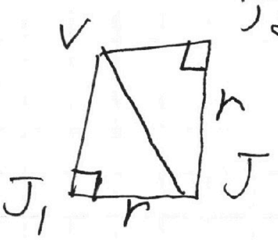
(J - это центр шара ω)

Тогда $JJ_1 = JJ_2 = JJ_3 = r$ - его радиус.

Спроецируем J_1 на BC и AD. Получим точки V и W.

$JJ_1 (ABCD)$, $J_1 \in (ABCD)$, $J_1V \perp BC$ $\Big\}$ по Т.Т.П. $\Rightarrow JV \perp BC$

$JV \perp BC$, $JJ_2 \perp (BPCE)$, $J_2 \in (BPCE)$ $\Big\}$ по Т.Т.П. $\Rightarrow J_2V \perp BC$

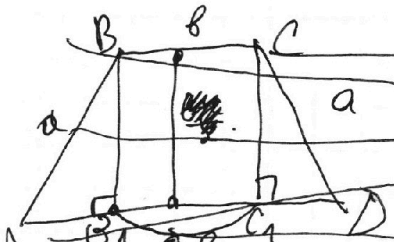


из $\triangle VJ_1J = \triangle VJ_2J$ по катету и гипотенузе $\Rightarrow$

$\Rightarrow J_1V = VJ_2$. Аналогично, $J_1W = J_3W \Rightarrow$

$\Rightarrow J_1V + J_1W = VW = VJ_2 + J_3W$

Продолжение на следующей странице.



$S_{ABCD} = \frac{b+c}{2} \cdot \frac{b+c}{2} = \left(\frac{b+c}{2}\right)^2$

~~$\frac{4S_{ABCD}}{c^2} = \frac{(b+c)^2}{c^2}$~~ ~~Пусть $BB_1 \perp AD$, $CC_1 \perp AD$. $C_1, B_1 \in AD$~~

$B_1C_1 = BC = b$, $AB_1 = C_1D = \frac{AD - B_1C_1}{2} = \frac{c-b}{2}$. Тогда по т. Пифагора $BB_1 = \sqrt{AB^2 - AB_1^2}$

продолжение на обороте

№7 Продолжение. Часть 2) Пусть r_B и r_C — радиусы вписанных окружностей верхней и нижней грани.

Тогда $VW = VJ_2 + J_3W$

J_1V = радиусу впис. окр. в боковую грань ⇒

⇒ J_2 равноудалено от сторон верхней грани ⇒

⇒ J_2 — центр впис. окр. в верхнюю грань ⇒

⇒ $J_2V = r_B$.

$VW = r_B + r_C$.

Мы хотим найти чему равно. n — кол-во сторон верхней грани.

$M = \frac{n \cdot S_{ABCD}}{S_{\text{нижней грани}}}$ — ?

$S_{\text{нижней грани}} = P_{\text{нижн. грани}} \cdot r_C = \frac{c \cdot n}{2} \cdot r_C$.

$M = \frac{2n \cdot S_{ABCD}}{c \cdot n \cdot r_C} = \frac{2 \cdot S_{ABCD}}{c \cdot r_C}$ — ?

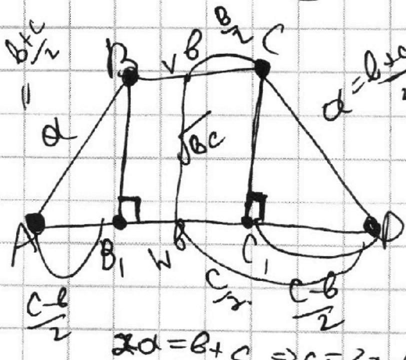
Для VWDC: $CP = \sqrt{VC \cdot WD} = \frac{\sqrt{bc}}{2} = \frac{b+c}{2}$ ⇒ ⇒ $b+c = \sqrt{bc}$

$k = \frac{r_B}{b} = \frac{r_C}{c}$

$r_B + r_C = \sqrt{bc}$ = $b+c$

$bk + ck = b + c$

$k = 1 \Rightarrow r_B = b,\ r_C = c$



Пусть B_1 и C_1 — перпендикуляры из B и C на AD. $BC = B_1C_1$

$AB_1 = C_1D = \frac{c-b}{2}$.

По Т. Пифагора

$BB_1^2 = a^2 - \left(\frac{c-b}{2}\right)^2 = VW^2 = (r_B + r_C)^2$.

$2a = b + c \Rightarrow c = 2a - b$

$a^2 - \left(\frac{2a-2b}{2}\right)^2 = (r_B + r_C)^2$.

$a^2 - (a-b)^2 = (r_B + r_C)^2$

$2ab - b^2 = (r_B + r_C)^2$.

$(b+c)b - b^2 = (r_B + r_C)^2 \Rightarrow bc = (r_B + r_C)^2$

$S_{ABCD} = \frac{b+c}{2} \cdot VZ = \frac{(b+c)(r_B + r_C)}{2}$.

$M = \frac{2 \cdot (b+c)(r_B + r_C)}{c \cdot r_C \cdot 2}$ — ?

$M = \frac{(b+c)\sqrt{bc}}{c \cdot r_C} = \frac{b}{r_C}$ ответ: $\frac{b}{c}$

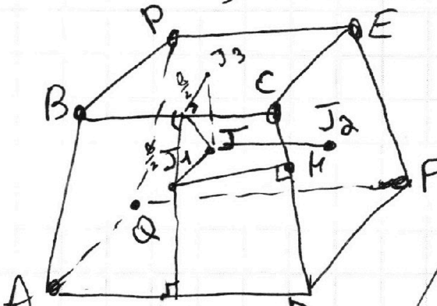
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

1 2 3 4 5 6 7 СТРАНИЦА __ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. **Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно.** Порча QR-кода недопустима!

№7 Продолжение. Спроецируем O на оставшиеся 3 боковые грани. Из симметрии получаем, что O от них равноудалена, т.к. у этих 4 трапеций из их равенства равен радиус вписанной, равно расстояние от O до рёбер этих трапеций => по Теореме Пифагора равно расстояние до боковых граней.

Докажем, что O также является центром шара ω. Пусть это не так и J — его центр. ~~[illegible]~~ Спроецируем J на соседние грани (боковые) с общим ребром CD (см. рис 2) Получим точки J_1 и J_2. $JJ_1=JJ_2$.



(рис. 2)

Пускай H — основание перпендикуляра из J_1 на CD

$JJ_1 \perp (ABCD)$
JH — наклонная
$J_1H \perp CD$
$J_1 \in (ABCD)$
по Т.Т.П. $\Rightarrow JH \perp CD$.

~~[illegible]~~ $JJ_2 \perp (CDEF)$
$J_2 \in (CDEF)$
JH — наклонная
$JH \perp CD$
по Т.Т.П. $\Rightarrow J_2H \perp CD \Rightarrow$

$\Rightarrow \begin{cases} JH = \sqrt{JJ_1^2 + J_1H^2} \\ JH \perp CD \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} JH = \sqrt{2r^2}, \text{ где } r \text{ — радиус шара } \omega. \\ JH \perp CD \end{cases}$

~~Продолжение на следующей странице~~

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА __ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. **Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно.** Порча QR-кода недопустима!

№7 Продолжение. Часть 2

$BB_1 = \sqrt{a^2 - \left(\frac{c-b}{2}\right)^2} = VW = \frac{b+c}{2}$ = высота трапеции.

$a^2 - \frac{(c-b)^2}{4} = \frac{(b+c)^2}{4} \quad | \cdot 4.$

$4a^2 - c^2 - b^2 + 2bc = b^2 + c^2 + 2bc$

$4a^2 = 2b^2 + 2c^2$

$\begin{cases} b^2 + c^2 = 2a^2 \\ \text{из } (*) \ 2a = b + c \end{cases} \Rightarrow b^2 + c^2 = 2\left(\frac{b+c}{2}\right)^2$

$b^2 + c^2 = \frac{(b+c)^2}{2} \rightarrow 2b^2 + 2c^2 = b^2 + c^2 + 2bc$

$b^2 + c^2 = 2bc.$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно.**

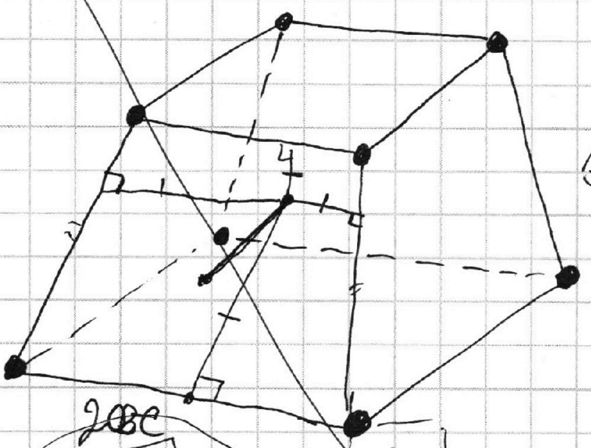
1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

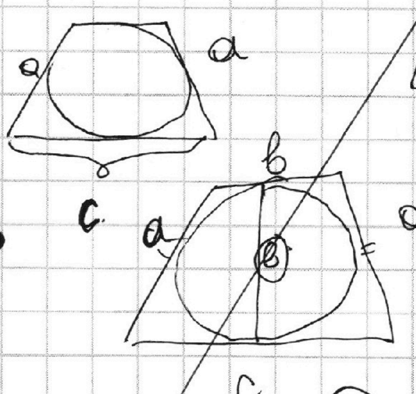
СТРАНИЦА __ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. **Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно.** Порча QR-кода недопустима!

ЧЕРНОВИК.

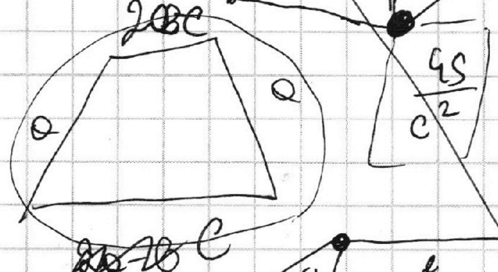
ребер и гр.

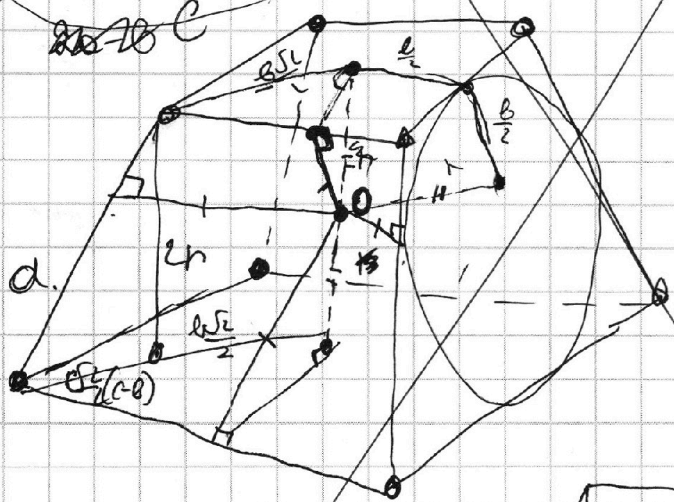


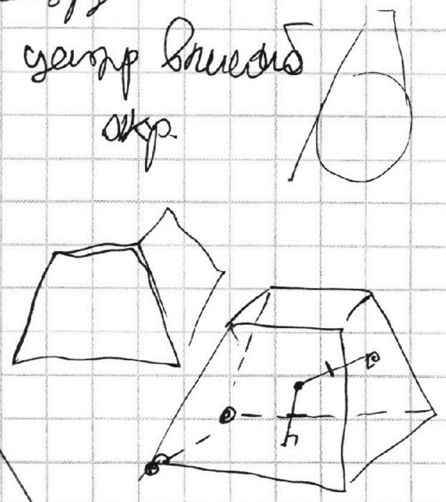


$\boxed{b+c=2a}$

О проекция в центр вписан окр.

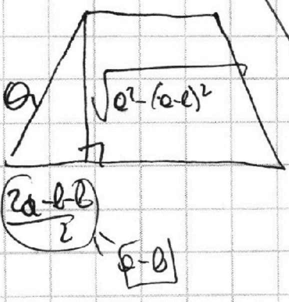






$$\frac{4S}{c^2}$$

$$\sqrt[4]{\frac{a^3}{a^3 c^2}}$$



$2ab-b^2=b^2$

$ab=b^2$ $\boxed{a=b}$

$h=\sqrt{a^2-a^2-b^2+2ab}=\sqrt{2ab-b^2}$

$$S=\frac{\sqrt{2ab-b^2}}{2}(b+c)$$

$$\frac{4\sqrt{2ab-b^2}(b+c)}{c^2} \quad \frac{4a\sqrt{b}\sqrt{2a-b}}{c^2} \quad \frac{4a\sqrt{b}}{(2a-b)\sqrt{2a-b}} \quad \sqrt[4]{\frac{a^2b}{(2a-b)^3}}$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА __ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. **Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно.** Порча QR-кода недопустима!

черновик

(б) реша (x, y)

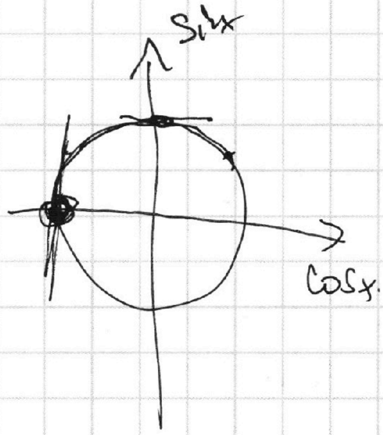
$(t+1+2k, t)$

$\left(\frac{2k+1-t}{3}, t\right)$

$\arcsin\frac{x}{5}+\arccos\frac{y}{4}<\frac{3\pi}{2}$

от $-\frac{\pi}{2}$ до $\frac{\pi}{2}$

от 0 до π



(4n, 0)

$\boxed{\text{при } k_1=\frac{5\pi}{4}}$

$x\ne 0$

0, 2

$\cancel{2k+1}$

$(t+1+2k, t)$

(1, 0)

(3, 0)

(5, 0) ...

$\cos(30+60)=\frac{1}{2}\cdot\frac{\sqrt3}{2}-\frac{1}{2}\cdot\frac{\sqrt3}{2}$

90+60 -30

$\cos 30+\cos 60=\frac{1+\sqrt3}{2}=2\cdot$

$\cos 45 \cos 15$

$\cos 30+\cos 90=\frac{\sqrt3}{2}=2\cdot\cos 60\cdot\cos 30=2\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{\sqrt3}{2}$

$3x+y$ – чет

$x-y$ – чет

$\boxed{\begin{array}{l} x \vdots 2 \Rightarrow y \vdots 2 \\ x \not\vdots 2 \Rightarrow y \not\vdots 2 \end{array}}$

все пар[ы] раз[ной] четн[ости]

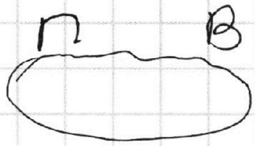
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

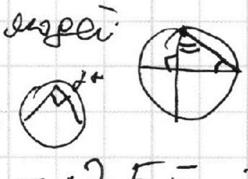
СТРАНИЦА __ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. **Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно.** Порча QR-кода недопустима!

черновик

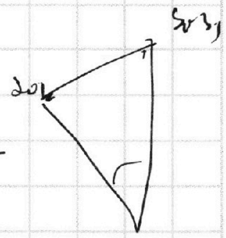


x людей



n ?

$$\frac{C_x^2}{C_x^4}\cdot 2{,}5=\frac{C_x^{n-2}}{C_x^n}$$



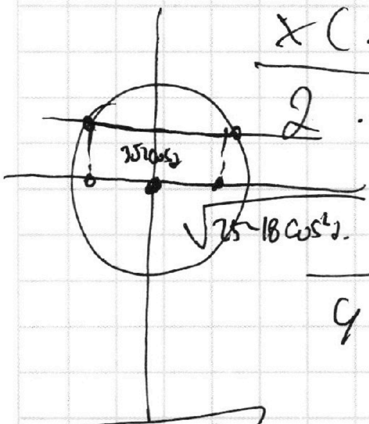
$\boxed{18\cos^2\alpha+x_0^2=25}$

$2\pi r.$

$x_0^2+y_0^2=25$

$y_0=3\sqrt2\cos\alpha$

$$\frac{x(x-1)}{2}:\frac{x!}{4!(x-4)!}\cdot\frac{5}{2}=\frac{x!}{(x-n+2)!(n-2)!}:\frac{x!}{(x-n)!\,n!}$$



$$\frac{x(x-1)\cdot 4!\cdot 5}{2\cdot x(x-1)(x-2)(x-3)\cdot 2}=\frac{(x-n)!\cdot n!}{(x-(n-2))!\,(n-2)!}$$

$$\frac{4!\cdot 5}{4\,(x-2)(x-3)}=n(n-1)(x-n)(x-(n-1))$$

$$\frac{5\cdot 3!}{(x-2)(x-3)}=n(n-1)(x-n)(x-(n-1))$$

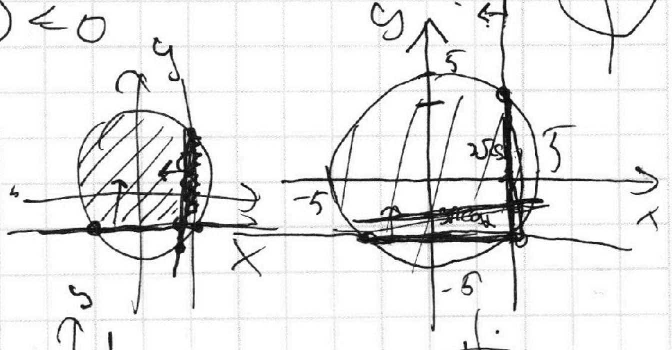
30

$\boxed{64}$

$2\sqrt{25-18\cos^2\alpha}+2\sqrt{25-18\sin^2\alpha}$

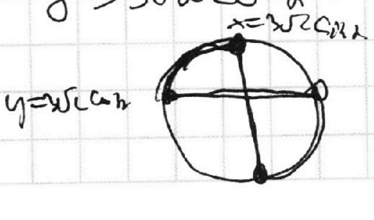
$$\begin{cases}(x-3\sqrt2\sin\alpha)(y-3\sqrt2\cos\alpha)\le 0\\ x^2+y^2\le 25.\end{cases}$$

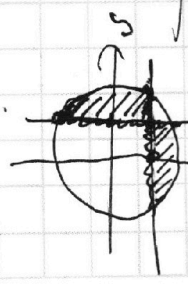
MAX M периметр Фигуры



$x\le 3\sqrt2\sin\alpha\le 3\sqrt2$

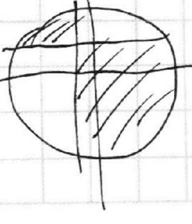
$y\ge 3\sqrt2\cos\alpha\ge 3\sqrt2.$





$3\sqrt2\vee 5$

$9\cdot 2\vee 25$



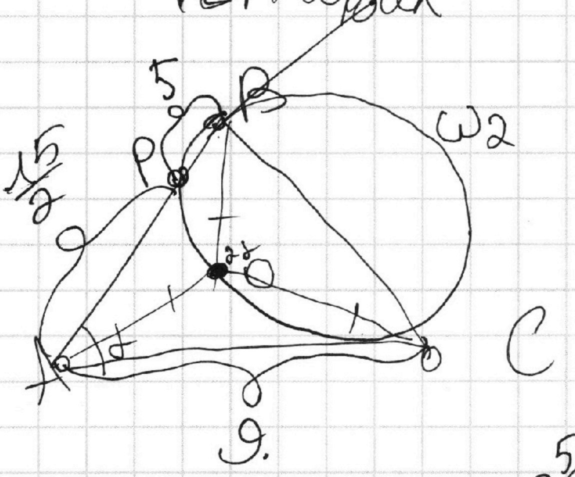
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

1 2 3 4 5 6 7

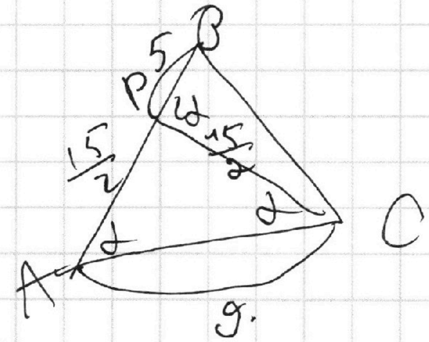
СТРАНИЦА __ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. **Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно.** Порча QR-кода недопустима!

ЧЕРНОВИК



$\boxed{\omega_1}$ $S_{\triangle ABC}$ - ?



1б.

$x, y > 0$ $\quad \frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{2}{xy}=k$ $\quad x^3-y^3-3xy=?$

$x \to x-1$

$y \to y+1$

$\frac{1}{x-1}+\frac{1}{y+1}+\frac{2}{(x-1)(y+1)}=k$

$x \neq 1$

№2

$\frac{y+1+x-1+2}{(x-1)(y+1)}=\frac{y+x+2}{xy}$ >0

$\cancel{x+y+2}$

$(x-1)(y+1)=xy$

$xy+x-y-1=xy$

$x=y+1$ $\quad (y+1)^3-y^3-3(y+1)\cdot y=$

$=y^3+3y^2+3y+1-y^3-3y^2-3y=1$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐

СТРАНИЦА __ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. **Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно.** Порча QR-кода недопустима!

черновик.

$(A;B;C)$

$A=\overline{aaaa}=(1000+100+10+1)\cdot a=1111a=11\cdot 101\, a$

$B=\overline{\_\_\_}\ \geq 1$ цифра 2. $=202$.

$C=\overline{\_\_}\ \geq 1$ цифра 3.

$A\cdot B\cdot C=t^2$

101, 202, 303, 404, 505, 606, 707, 808, 909.

11, 22, 33, 44

$\boxed{}=2$

$\frac{1}{2}$.

sin(α+β)

101 простое.

$\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta$

$2\cdot 101^2\cdot 11\boxed{a}\cdot\boxed{}=t^2$

$\cos\alpha+\cos\beta=2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}$

$2\cdot 11\cdot a\cdot\boxed{}=t^2$

$\vdots 11$.

$C=33$

$2\cdot 11\cdot a\cdot 3\cdot 11=t^2$

$a=2\cdot 3\cdot k^2$.

$\cos(\alpha+\beta)+\cos(2\alpha)=0$

$2\cos\frac{3\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}=0$

$(x;y)$

$\pi x=\alpha$

$\pi y=\beta$

$\left(\sin(\pi x)+\sin(\pi y)\right)\sin(\pi x)=\cos(\pi x)\left(\cos\pi x+\cos\pi y\right)$

$\sin\alpha^2+\sin\beta\sin\alpha=\cos\alpha^2+\cos\alpha\cos\beta$.

$(\sin\alpha-\cos\alpha)(\sin\alpha+\cos\alpha)\ \cancel{=\cos(\alpha+\beta)}$

$=\cos\beta(\cos\alpha-\sin\alpha)=0$

$(\sin\alpha-\cos\alpha)(\sin\alpha+\cos\alpha+\cos\beta)=0$.

$\left[\begin{array}{l}\sin\alpha=\cos\alpha.\\ \sin\alpha+\cos\alpha=-\cos\beta.\end{array}\right.$

$\sin^2(\beta)=\arcsin(-2\alpha)$

$1+\sin(2\alpha)=\cos^2\beta$

$\sin^2\beta+\sin(2\alpha)=0$.

$\sin^2\beta=-\sin(2\alpha)$

$\arcsin(-\sin(2\alpha))=\arcsin(\sin^2\beta)$

$\shortparallel$

-2α