



МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

11 КЛАСС. Вариант 1



1. [3 балла] Найдите все тройки натуральных чисел $(A; B; C)$ такие, что:
- A — четырёхзначное число, составленное из одинаковых цифр,
 - B — трёхзначное число, хотя бы одна из цифр которого равна 2,
 - C — двузначное число, хотя бы одна из цифр которого равна 3,
 - произведение $A \cdot B \cdot C$ является квадратом некоторого натурального числа.
2. [3 балла] Положительные числа x и y таковы, что значение выражения $K = \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{2}{xy}$ не изменяется, если x уменьшить на 1, а y — увеличить на 1. Найдите все возможные значения выражения $M = x^3 - y^3 - 3xy$.
3. [5 баллов] а) Найдите все пары действительных чисел $(x; y)$ такие, что $(\sin \pi x + \sin \pi y) \sin \pi x = (\cos \pi x + \cos \pi y) \cos \pi x$.
- б) Сколько пар целых чисел (x, y) удовлетворяют одновременно этому уравнению и неравенству

$$\arcsin \frac{x}{5} + \arccos \frac{y}{4} < \frac{3\pi}{2}?$$

4. [4 балла] В начале месяца было выделено 4 билета на праздничный концерт, которые планировалось случайным образом распределить между одиннадцатиклассниками. В конце месяца выяснилось, что будет выделено больше 4 билетов. Одиннадцатиклассники Петя и Вася вычислили, что вероятность им обоим вместе попасть на концерт в начале месяца была в 2,5 раза меньше, чем оказалась в конце месяца. Сколько всего было выделено билетов на концерт в конце месяца, если количество одиннадцатиклассников не изменилось?
5. [5 баллов] Точка O — центр окружности ω_1 , описанной около остроугольного треугольника ABC . Окружность ω_2 , описанная около треугольника BOC , пересекает отрезок AB в точке P . Найдите площадь треугольника ABC , если $AP = \frac{15}{2}$, $BP = 5$, $AC = 9$.
6. [6 баллов] На координатной плоскости изображена фигура $\Phi(\alpha)$, состоящая из всех точек, координаты $(x; y)$ которых удовлетворяют системе неравенств

$$\begin{cases} (x - 3\sqrt{2} \sin \alpha) (y - 3\sqrt{2} \cos \alpha) \leq 0, \\ x^2 + y^2 \leq 25. \end{cases}$$

Найдите максимальное значение M периметра (длины границы) фигуры $\Phi(\alpha)$ и укажите все значения α , при которых оно достигается.

7. [6 баллов] Шар Ω касается всех рёбер правильной усечённой пирамиды, а шар ω касается всех её граней. Пусть сторона верхнего основания меньше, чем сторона нижнего. Найдите отношение площади боковой поверхности пирамиды к площади её нижнего основания.



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

1
☒

2
☐

3
☐

4
☐

5
☐

6
☐

7
☐

СТРАНИЦА
1 из 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

✓ 1

$$A = k \cdot 1111 = k \cdot 101 \cdot 11$$

101 - простое число

$$1 \leq k \leq 9$$

B или C должно делиться на 101, чтобы $A \cdot B \cdot C$ было квадратом. C не делится на 101 и k тоже двухзначное число, значит B - делится на 101.
Также по условию B имеет цифру 2 $\rightarrow B = 202$
 202 не делится на 11.

C должно делиться на 11 и B не делится на 11 и k не делится тоже. B запишем C имеет цифру 3 $\rightarrow C = 33$

$$A \cdot B \cdot C = k \cdot 101 \cdot 11 \cdot 2 \cdot 101 \cdot 3 \cdot 11 = (101 \cdot 11)^2 \cdot k \cdot 2 \cdot 3$$

$$\rightarrow k = 6 \quad \text{Значит, } A = 6666 ; B = 202 ; C = 33$$

Ответ: $A = 6666 ; B = 202 ; C = 33$ (одна точка)



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1
☐

2
☒

3
☐

4
☐

5
☐

6
☐

7
☐

СТРАНИЦА
1 из 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

N2

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{2}{xy} = \frac{1}{x-1} + \frac{1}{y+1} + \frac{2}{(x-1)(y+1)}$$

$$\frac{x+y+2}{xy} = \frac{x+y+2}{(x-1)(y+1)} \quad (1)$$

$x+y+2 > 0$ т.к. x и y — положительные по условию
Значит, из (1) следует:

$$xy = (x-1)(y+1) = xy + x - y - 1$$

$$y - x = -1 \quad x = y + 1$$

$$M = x^3 - y^3 - 3xy = (y+1)^3 - y^3 - 3y^2 - 3y = y^3 + 3y^2 + 3y + 1 - 3y^2 - 3y^2 - 3y = 1$$

Ответ: M = 1



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1	2	3	4	5	6	7
☐	☒	☒	☐	☐	☐	☐

СТРАНИЦА

1 из 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\begin{aligned}
 & \text{a) } (\sin \pi x + \sin \pi y) \sin \pi x = (\cos \pi x + \cos \pi y) \cos \pi x \\
 & -(\cos^2 \pi x - \sin^2 \pi x) = \cos \pi y \cdot \cos \pi x - \sin \pi y \cdot \sin \pi x \\
 & -\cos(2\pi x) = \cos(\pi y + \pi x) \\
 & \cos(\pi - 2\pi x) = \cos(\pi y + \pi x)
 \end{aligned}$$

$$\pi - 2\pi x = \pi y + \pi x + 2\pi k, \quad k \in \mathbb{Z}$$

$$2\pi x - \pi = \pi y + \pi x + 2\pi k_1, \quad k_1 \in \mathbb{Z}$$

$$2x - 1 = y + x + 2k_1 \rightarrow y = x - 1 + 2k_1, \quad k_1 \in \mathbb{Z}$$

x - любое

$$1 - 2x = y + x + 2k \rightarrow y = 1 - 3x + 2k, \quad k \in \mathbb{Z}$$

x - любое

$$\text{б) } \arcsin \frac{x}{5} + \arccos \frac{y}{4} < \frac{3\pi}{2}$$

$$-5 \leq x \leq 5$$

$$-4 \leq y \leq 4$$

x, y - целые (по усл.)

$$-\frac{\pi}{2} \leq \arcsin \frac{x}{5} \leq \frac{\pi}{2} \quad 0 \leq \arccos \frac{y}{4} \leq \pi$$

$$\arcsin \frac{x}{5} + \arccos \frac{y}{4} \leq \frac{3\pi}{2} \quad \text{при любых допустимых } x \text{ и } y$$

$$\arcsin \frac{x}{5} + \arccos \frac{y}{4} = \frac{3\pi}{2}, \quad \text{если } x = 5; \quad y = -4$$

$$\text{Поэтому допустимых пар} = 11 \cdot 9 - 1 = 98$$

Ответ: а) $(x; x - 1 + 2k_1); (x; 1 - 3x + 2k)$ $k, k_1 \in \mathbb{Z}$
 x - любое число б) 98



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☒	☒	☐	☐

СТРАНИЦА

1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Вероятность ^{1/4} пойти в начале месяца - $\frac{4}{k} \cdot \frac{3}{k-1}$

k - кол-во одноклассников

Вероятность пойти в конце месяца - $\frac{m}{k} \cdot \frac{m-1}{k-1}$

m - настоящее кол-во билетов

$$\frac{17.25}{k(k-1)} = \frac{m(m-1)}{k(k-1)}$$

$$30 = m^2 - m$$

$$(m-6)(m+5) = 0$$

$$m=6$$

$$m=-5$$

$$m > 0$$

не подходит

Ответ: 6

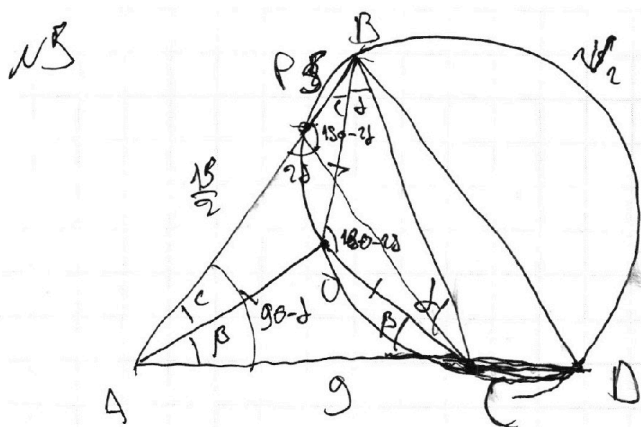


На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.



СТРАНИЦА
1 из 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



Допустим, $\angle OBC = \beta$
тогда $\angle OCB = \beta$
т.к. $OB = OC$ $\triangle BOC$ - р.б.
 $\angle BOC = 180 - 2\beta$
 $\angle BOC = \angle CPB$ т.к. они

опираются на одну дугу в окружности ω_2
 $\angle APC = 180 - 180 + 2\beta = 2\beta$ т.к. они смежные

$\angle CPB$

Допустим, $\angle OCB = \beta$ и $\angle OBA = \alpha$ тогда
 $\angle BAC = \alpha + \beta$ т.к. $\triangle AOC$ - р.б. ($\angle OCA = \angle OAC$)

и $\triangle BOA$ - р.б. ($\angle ABO = \angle OAB$)

$$2\alpha + 2\beta + 2\beta = 180 \quad \alpha + \beta = 90 - \beta = \angle BAC$$

$$\angle PCA = 180 - 2\beta - 90 + \beta = 90 - \beta \rightarrow \triangle APC - \text{р.б.}$$

$$\cos \angle BAC = \frac{\frac{9}{13}}{\frac{13}{2}} = \frac{9}{13} \quad \sin \angle BAC = \sqrt{1 - \frac{81}{169}} = \frac{8}{13}$$

$$S_{ABC} = \frac{1}{2} AB \cdot AC \cdot \sin \angle BAC = \frac{1}{2} \cdot \frac{25}{2} \cdot 9 \cdot \frac{8}{13} = 45$$

S_{ABC} - площадь $\triangle ABC$

Ответ: 45



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☒ 7 ☐

СТРАНИЦА
1 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

N 6

$$\begin{cases} (x - 3\sqrt{2} \sin a)(y - 3\sqrt{2} \cos a) \leq 0 \\ x^2 + y^2 \leq 18 \end{cases}$$

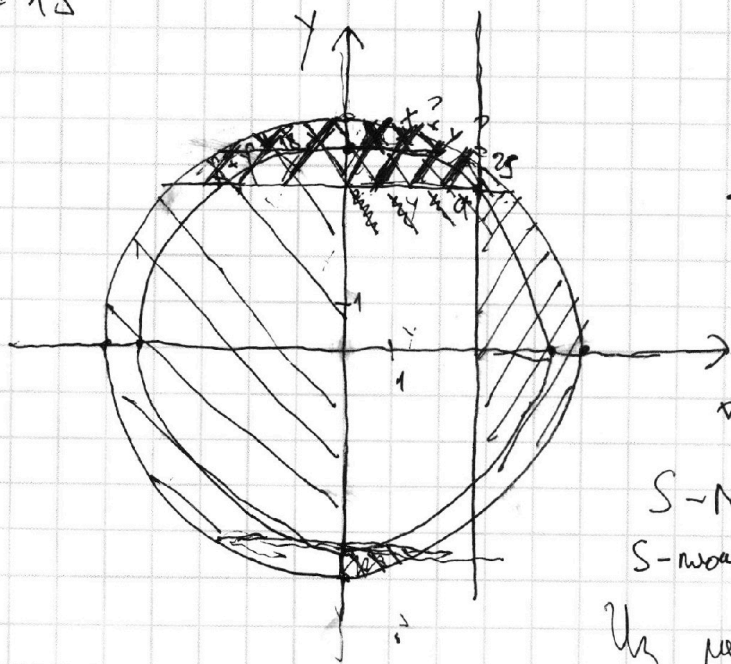
$x^2 + y^2 = 18$ — ~~окружность~~ ^{круг} в плоскости xOy

с центром в точке $(0, 0)$

$(x - 3\sqrt{2} \sin a)(y - 3\sqrt{2} \cos a) \leq 0$ — две полуплоскости в которых $(x \geq 3\sqrt{2} \sin a; y \leq 3\sqrt{2} \cos a)$ или $(x \leq 3\sqrt{2} \sin a; y \geq 3\sqrt{2} \cos a)$. Заметим,

что точка с координатами $(3\sqrt{2} \sin a; 3\sqrt{2} \cos a)$ лежит на окружности: $x^2 + y^2 = (3\sqrt{2})^2 = 18$

т.к. $(3\sqrt{2})^2 \sin^2 a + (3\sqrt{2})^2 \cos^2 a = (3\sqrt{2})^2 (\sin^2 a + \cos^2 a) = (3\sqrt{2})^2 = 18$



Возьмем любое a

$$a \neq \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2}k, \quad k \in \mathbb{Z}$$

(штриховка ///)

$$\text{Положим } a = \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2}k$$

$$k \in \mathbb{Z} \quad (\text{штриховка ///})$$

$$S = \frac{\pi \cdot 18}{2} =$$

S — половина круга

$$S - \text{площадь } \Phi(a) \leq 17,5\pi$$

Из рисунка очевидно, что $\Phi(a) = \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2}k$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☒	☐

СТРАНИЦА

2 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Ответ: $S(\varphi(a)) = \cancel{14} \cdot 5\pi$; $a = \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2}k, k \in \mathbb{Z}$

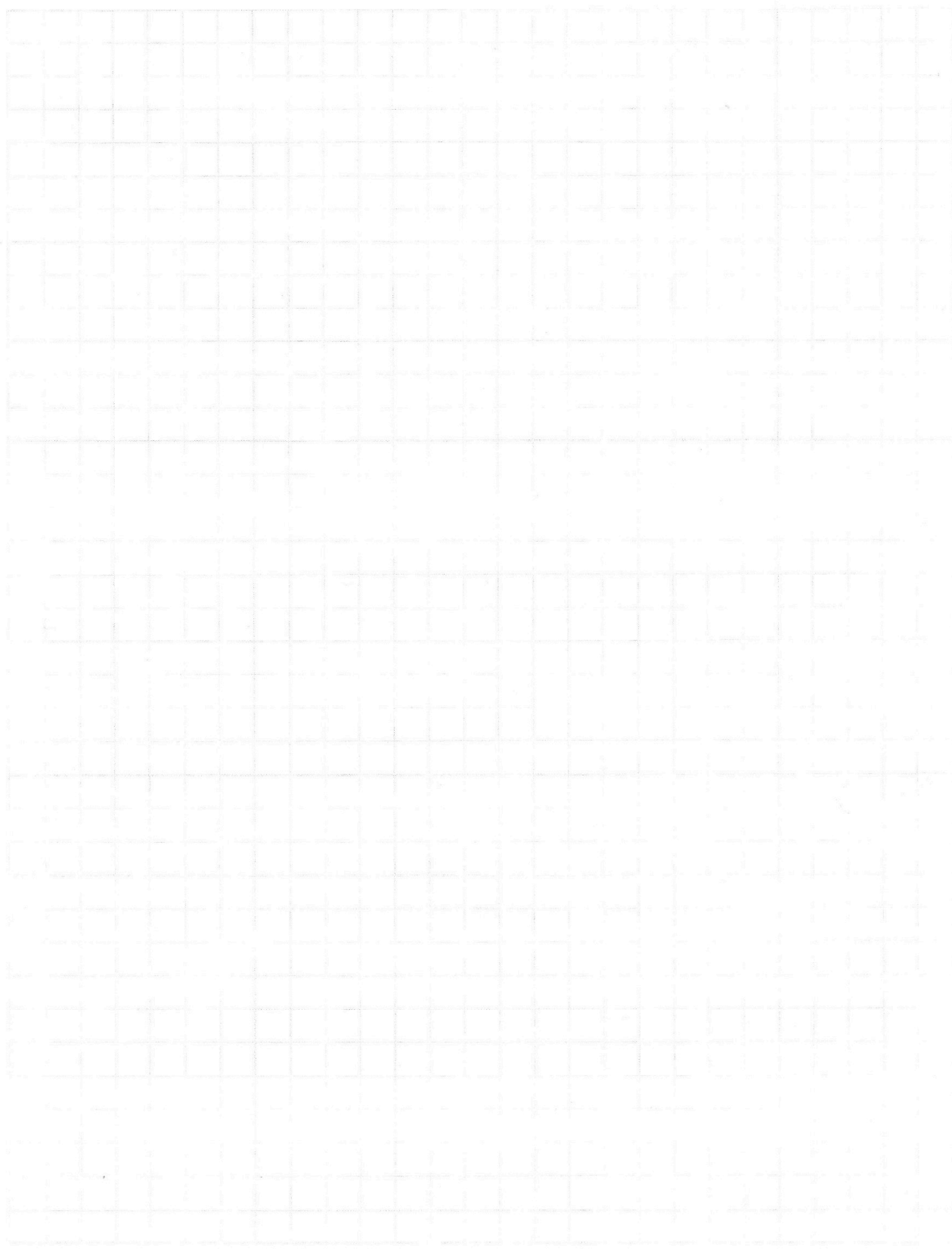


На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☒	☒	☐

СТРАНИЦА
14 ИЗ 14

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

1 2 3 4 5 6 7
☐ ☐ ☐ ☐ ☐ ☐ ☐

СТРАНИЦА
 __ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$3. \arcsin \frac{x}{3} + \arccos \frac{y}{4} \leq \frac{3\pi}{2}$$

$$(\sin \pi x + \sin \pi y) \sin \pi x = (\cos \pi x + \cos \pi y) \cos \pi x$$

$$(\sin x + \sin y) \sin x = (\cos x + \cos y) \cos x$$

$$-\cos 2x = \cos (x+y)$$

$$\cos (\pi - 2x) = \cos (x+y)$$

$$\pi - 2x = x + y + 2k\pi$$

$$2x - \pi = x + y + 2k\pi$$

$$x =$$

$$1 - 2x = x + y + 2k$$

$$2x - 1 = x + y + 2k$$

$$3x = 1 - y + 2k, k \in \mathbb{Z}$$

$$x = \frac{1-y}{3} + \frac{2k}{3}$$

$$-4 \leq y \leq 4$$

$$\frac{3}{4} \quad \frac{2}{4} = \frac{\pi}{3}$$

$$-3 \leq x \leq 3$$

$$0 \leq \arccos \frac{y}{4} \leq \pi$$

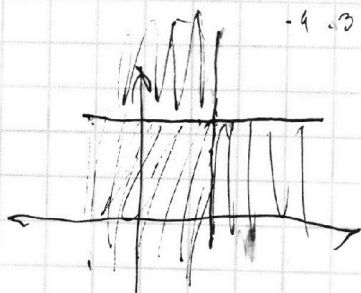
$$-\frac{\pi}{2} \leq \arcsin \frac{x}{3} \leq \frac{\pi}{2}$$

$$x = 3$$

$$y = -4$$

$$3, 1, 1 - 1$$

$$-4 \quad -3 \quad -2 \quad -1 \quad 0 \quad 1 \quad 2 \quad 3 \quad 4$$

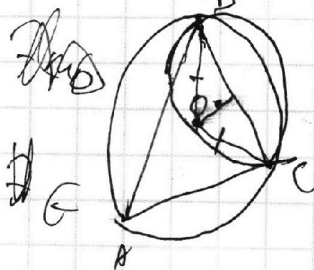


$$3 \cos \beta = 3\sqrt{2} \sin \alpha$$

$$x = 3\sqrt{2} \sin \alpha$$

$$y = 3\sqrt{2} \cos \alpha$$

$$y = 2x$$





На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

1 2 3 4 5 6 7
☐ ☐ ☐ ☐ ☐ ☐ ☐

СТРАНИЦА
 ИЗ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$1 \dots 1111 \begin{array}{r} 11 \\ 1017 \\ \hline 7 \\ 5 \end{array}$$

$$B=202 \quad C=38$$

$$k, 101 \cdot 11 \cdot 204 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 11 = 11^2 \cdot 101^2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot k$$

$$1 \leq k \leq 9$$

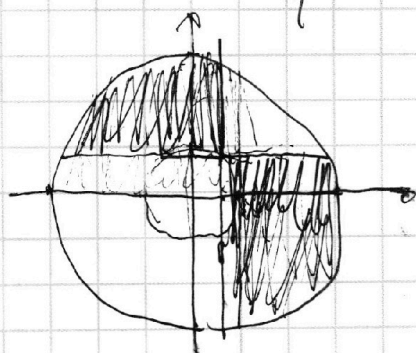
$$\begin{array}{c} 33 \\ 11 \\ \hline 64 \end{array}$$

$$9 \cdot 2 = 18 \quad k=6 \quad (k-1)(y-1)$$

$$A=6666$$

$$B=102 \quad C=33$$

$$2. \quad \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{2}{x+y} = \frac{1}{x-1} + \frac{1}{y+1} + \frac{2}{xy-x-y+1}$$



$$\frac{x+y+2}{xy} = \frac{x+y+2}{(x-1)(y+1)} \quad xy \neq 0$$

$$xy = (x-1)(y+1) \quad 0 < y < 1$$

$$-x+y = -1 \quad x = y-1$$

$$x-y = -1 \quad y > 1$$

$$(1-y)^3 - y^3 - 3(1-y)y$$

$$m(y+1)^3 - y^3 - 3(1-y)y$$

$$4y^3 + 3y^2 + 3y + 1 - y^3 - 3y + 3y^2$$

$$0 < x < 1$$

$$(1-y)(1-y) = (1-2y+y^2)(1-y) = 1-y-2y+2y^2+y^2-y$$

$$2(1-y)^2 - 1 = 1-3y+3y^2-y^2$$

$$(-1, 1)$$

$$1-3y+3y^2-y^2-y-3y+3y^2 = (2-6y+6y^2-2y^3)-1$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

1
☒

2
☒

3
☐

4
☐

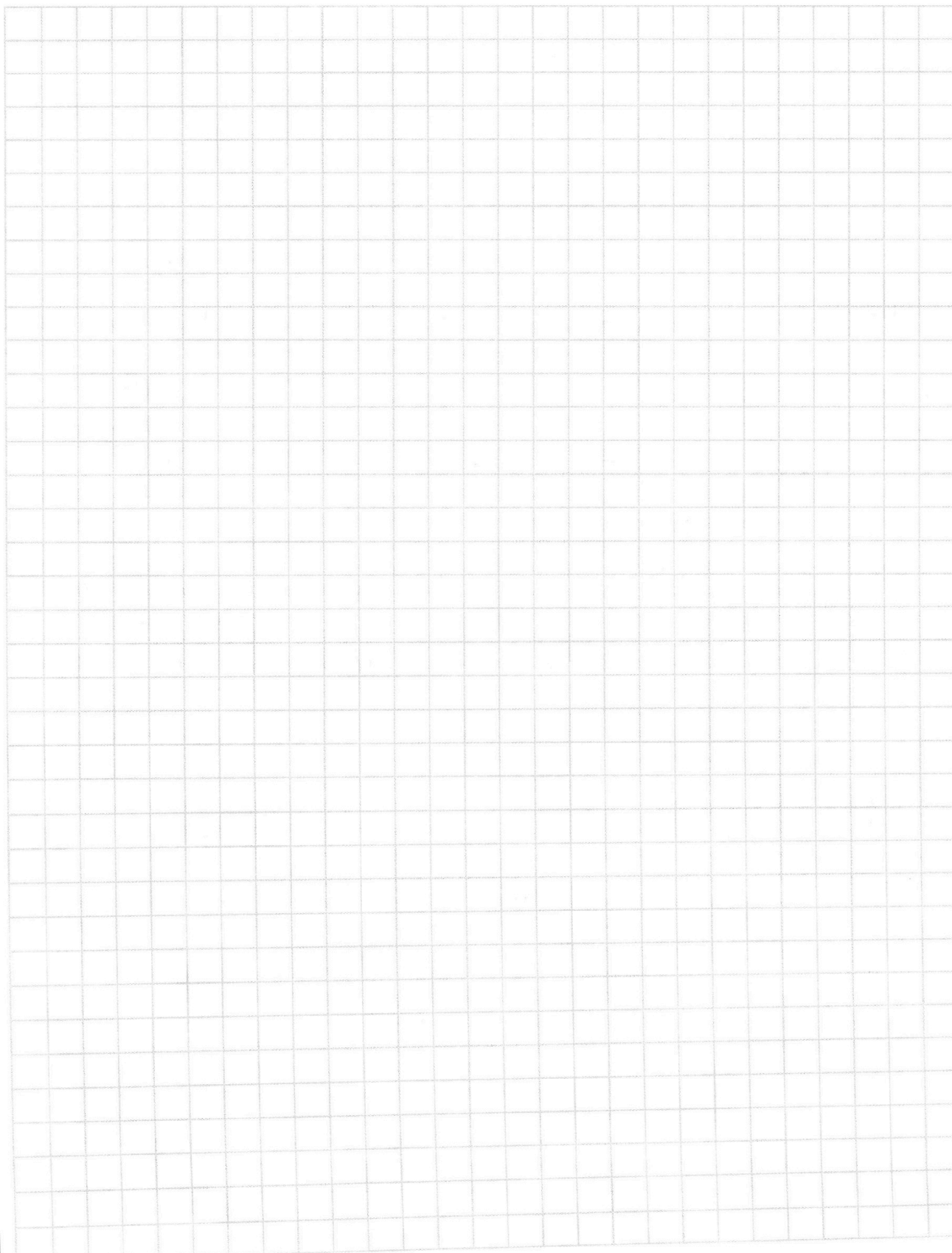
5
☐

6
☐

7
☐

СТРАНИЦА
1 из 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!





На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

1
☐

2
☒

3
☒

4
☐

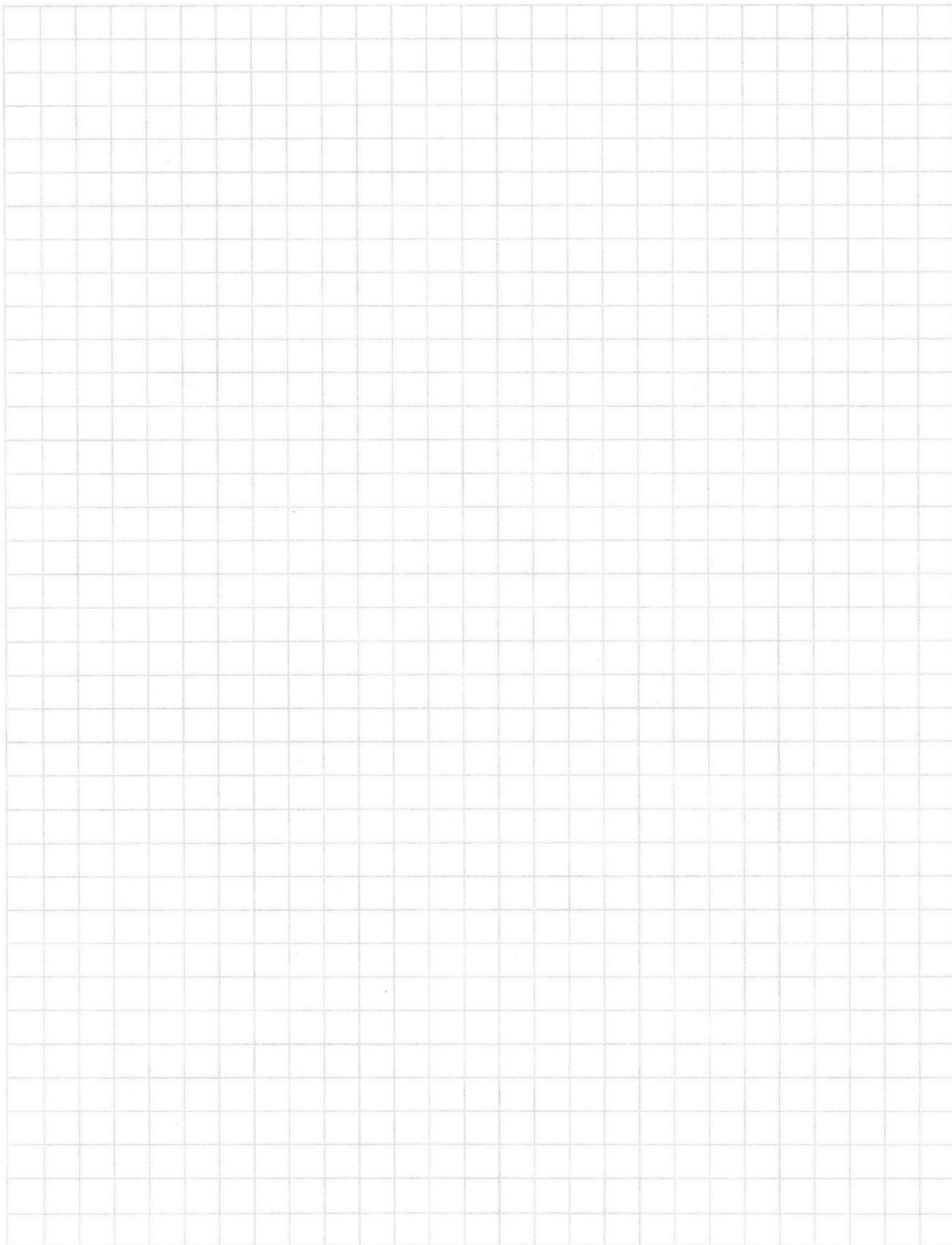
5
☐

6
☐

7
☐

СТРАНИЦА
1 из 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. **Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно.** Порча QR-кода недопустима!





На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

1
☐

2
☒

3
☒

4
☐

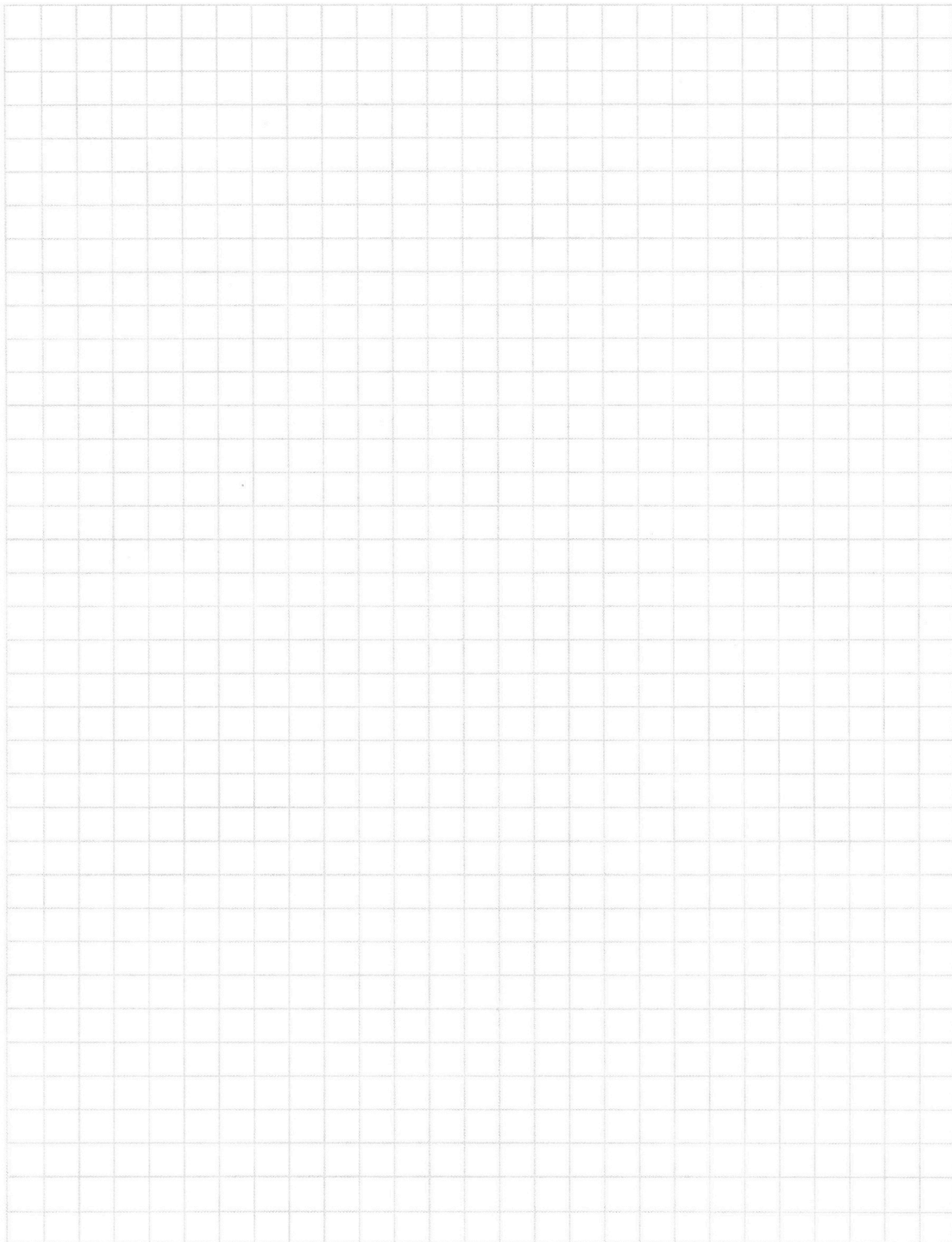
5
☐

6
☐

7
☐

СТРАНИЦА
1 из 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!





На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

1
☐

2
☐

3
☐

4
☒

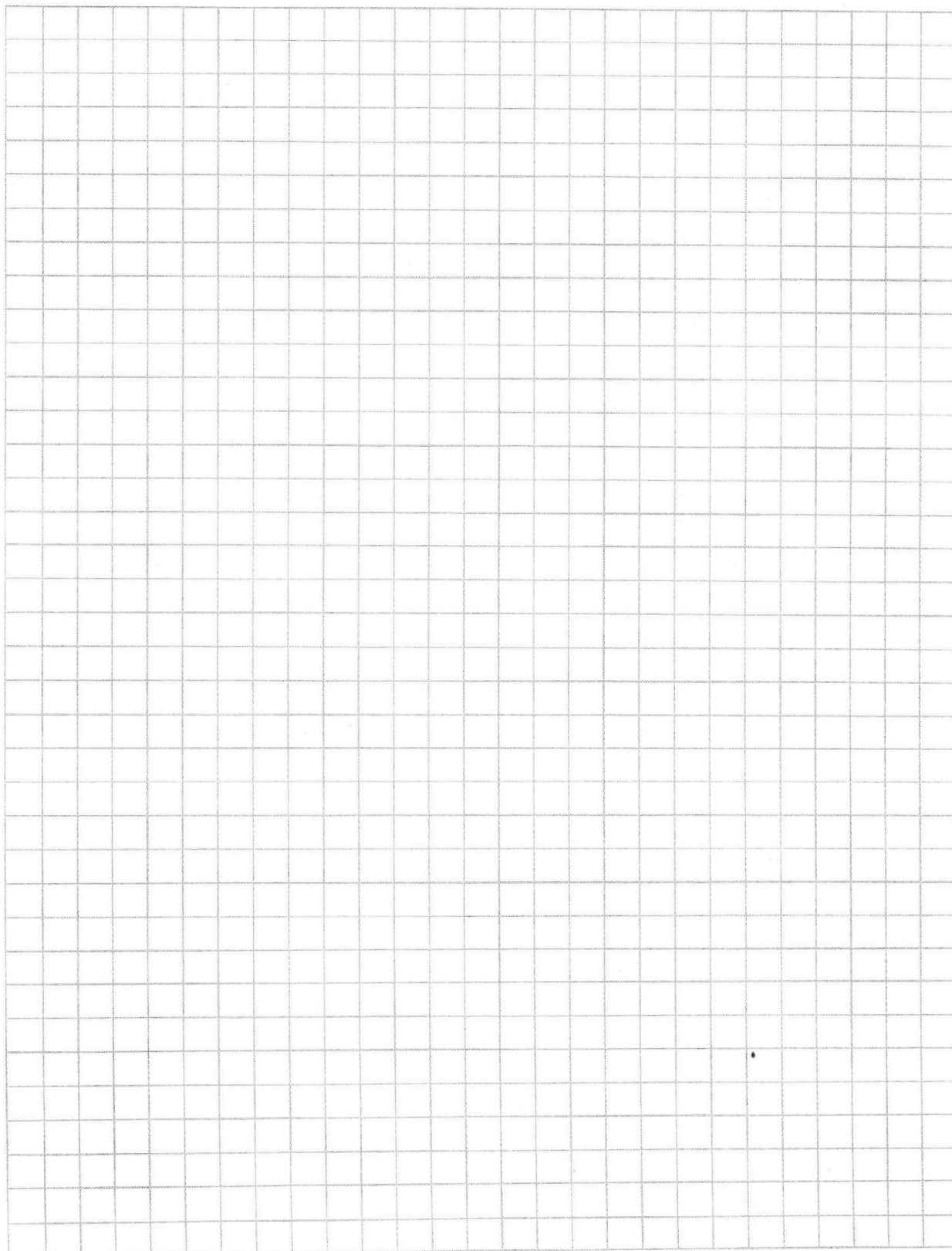
5
☒

6
☐

7
☐

СТРАНИЦА
1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. **Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно.** Порча QR-кода недопустима!



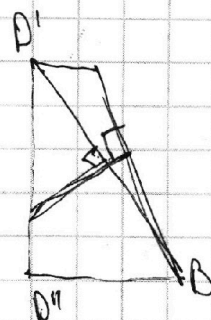
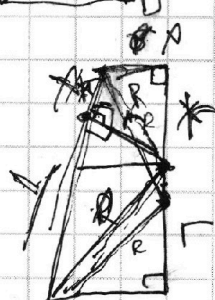
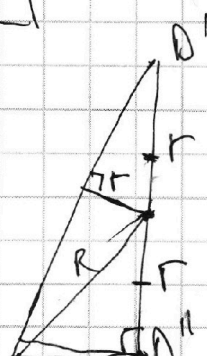
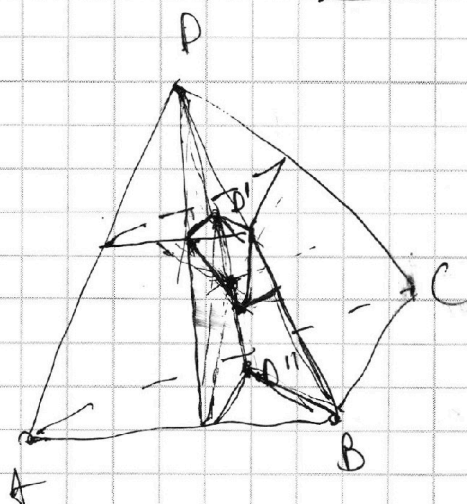
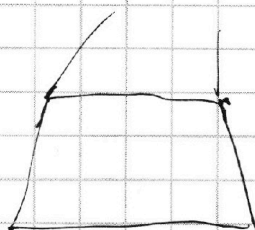


На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



$x \geq$

$$\frac{1}{2} p \cdot x = p_1$$

$$(x+y)$$

$$\sqrt{R^2 - r^2}$$

$$\begin{aligned} & \sqrt{64 - 27 - 36} = 1 \\ & 64 - 27 - 36 = 1 \\ & 5^2 - 9 - 3 \cdot 4 \cdot 3 \end{aligned}$$



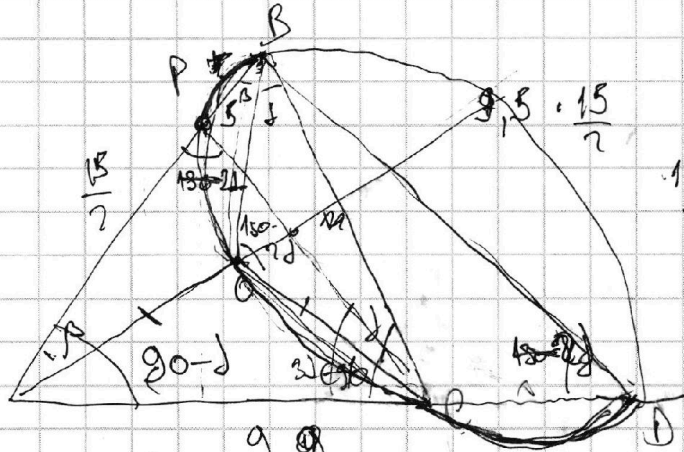
На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА

из

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



$$\cos(90 - \delta) = \frac{9}{15}$$

BD - PC

k - кол-во одинаковых кр

$$\frac{4}{k} \cdot \frac{3 \cdot 2.5}{(k-1)} = \frac{n \cdot (n-1) \cdot 2.5}{k(k-1)}$$

$$\begin{array}{r} 225 \\ - 81 \\ \hline 144 \\ \downarrow 5 \\ 6 \\ \hline 30 \end{array}$$

$$\frac{2}{k-2} \cdot \frac{1}{k} = \frac{1}{k}$$

$$\frac{\frac{k-2!}{k! \cdot 2!}}{\frac{k!}{k-4! \cdot 4!}}$$

$$\frac{k-4! \cdot 4!}{k! \cdot 2!}$$

$$\frac{9}{\sin 2\delta} = \frac{15}{2 \sin 3\delta}$$

$$m - m = 30$$

$$(m-6)(m+5) = 30$$

$$m=6 \quad m=-5 \text{ не берем}$$

Ответ: 4) 6

$$\sin(90 - \delta) = \frac{12}{15}$$

$$AC \cdot AB \cdot \frac{1}{2} \cdot \sin(90 - \delta) = 2 \cdot 9 \cdot \frac{19}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{12}{15.5}$$

$$\frac{3 \cdot 6 \cdot 19}{10} = 34.2$$

$$\begin{array}{r} 19 \\ \times 18 \\ \hline 152 \\ + 19 \\ \hline 342 \end{array}$$

$$18 \sin 3\delta = 15 \sin 2\delta$$

$$6 \sin 3\delta = 5 \sin 2\delta$$

$$6 \sin 2\delta + 6$$

$$4 \sin 3\delta$$