



МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ



11 КЛАСС. Вариант 2

1. [3 балла] Найдите все тройки натуральных чисел $(A; B; C)$ такие, что:

- A — четырёхзначное число, составленное из одинаковых цифр,
- B — трёхзначное число, хотя бы одна из цифр которого равна 1,
- C — двухзначное число, хотя бы одна из цифр которого равна 5,
- произведение $A \cdot B \cdot C$ является квадратом некоторого натурального числа.

2. [3 балла] Положительные числа x и y таковы, что значение выражения $K = \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{xy}$ не изменяется, если x уменьшить на 3, а y — увеличить на 3. Найдите все возможные значения выражения $M = x^3 - y^3 - 9xy$.

3. [5 баллов] а) Найдите все пары действительных чисел $(x; y)$ такие, что $(\sin \pi x - \sin \pi y) \sin \pi x = (\cos \pi x + \cos \pi y) \cos \pi x$.

б) Сколько пар целых чисел (x, y) удовлетворяют одновременно этому уравнению и неравенству

$$\arccos \frac{x}{4} + \arccos \frac{y}{9} < 2\pi?$$

4. [4 балла] В начале месяца было выделено 4 билета на праздничный концерт, которые планировалось случайным образом распределить между одиннадцатиклассниками. В конце месяца выяснилось, что будет выделено больше 4 билетов. Одиннадцатиклассники Петя и Вася вычислили, что вероятность им обоим вместе попасть на концерт в начале месяца была в 3,5 раза меньше, чем оказалась в конце месяца. Сколько всего было выделено билетов на концерт в конце месяца, если количество одиннадцатиклассников не изменилось?

5. [5 баллов] Точка O — центр окружности ω_1 , описанной около остроугольного треугольника ABC . Окружность ω_2 , описанная около треугольника BOC , пересекает отрезок AB в точке P . Найдите площадь треугольника ABC , если $AP = \frac{16}{5}$, $BP = 2$, $AC = 4$.

6. [6 баллов] На координатной плоскости изображена фигура $\Phi(\alpha)$, состоящая из всех точек, координаты $(x; y)$ которых удовлетворяют системе неравенств

$$\begin{cases} (x - 2 \cos \alpha)(y - 2 \sin \alpha) \geqslant 0, \\ x^2 + y^2 \leqslant 9. \end{cases}$$

Найдите максимальное значение M периметра (длины границы) фигуры $\Phi(\alpha)$ и укажите все значения α , при которых оно достигается.

7. [6 баллов] Шар Ω касается всех рёбер правильной усечённой пирамиды, а шар ω касается всех её граней. Найдите угол наклона бокового ребра пирамиды к плоскости её основания.



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

- | | | | | | | |
|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

СТРАНИЦА
2 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по **каждой из задач** нумеруются **отдельно**. Порча QR-кода недопустима!

$$A = 5555$$

$$B = 101$$

$$C = 55$$

$$A \cdot B \cdot C = 5^2 \cdot 101^2 \cdot 11^2 - \text{квадрат.}$$

\Rightarrow получим только $(5555; 101; 55)$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи **отдельно**.



- | | | | | | | |
|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

СТРАНИЦА
1 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по **каждой из задач** **нумеруются отдельно**. Порча QR-кода недопустима!

$$A = \overline{\alpha\alpha\alpha\alpha}$$

$$\Rightarrow A = \alpha \cdot 1111 \Rightarrow A : 1111$$

$$\Rightarrow A : 101 \cdot 11$$

$$ABC = 1111 \cdot \alpha \cdot B \cdot C = 101 \cdot 11 \cdot \alpha \cdot B \cdot C$$

По условию ABC - квадрат \Rightarrow каждое простое

входит ~~один~~ в четной степени \Rightarrow если оно входит в первой степени, то входит в 2ой.

$$\Rightarrow \alpha \cdot B \cdot C : 101 \quad (\text{101 и 11 - простые числа})$$

$$\text{и } \alpha \cdot B \cdot C : 11.$$

α не кратно 101, т.к. $\alpha \leq 9$. Следовательно 101 т.к.

$$\text{•••} C \leq 99 \Rightarrow B : 101$$

\Rightarrow Вместо B буд $\overline{x0x}$, где $x \in \{1; 9\}$.

Но по условию. Вместо $C \Rightarrow B = 101$.

$$ABC = 101^2 \cdot 11 \cdot \alpha \cdot C$$

α не кратно 11 (т.к. $\alpha \leq 9$) $\Rightarrow C : 11$.

\Rightarrow Сместо C буд \overline{yy} . По условию Сместо

$$5 \Rightarrow C = 55.$$

$$ABC = \alpha \cdot 101 \cdot 11 \cdot 101 \cdot 55 = 11^2 \cdot 101^2 \cdot \alpha \cdot 5$$

~~Число 101 входит в ABC~~ Число 5 входит в ABC
 ≥ 60 2ой степени $\Rightarrow \alpha : 5 \Rightarrow \alpha = 5$.

Проверим, что полученные числа подоходят:

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении **каждой** задачи отдельно.

СТРАНИЦА
2 из 3

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются **отдельно**. Порча QR-кода недопустима!

$$\begin{aligned}
 & \cancel{x^3 - x^3 - 9xy = x^3 - (x-3)^3 - 9x(x-3)} \\
 & = x^3 + x^3 + 3x^2 + 3x + 1 + 9x^2 + 9 \\
 & = 2x^3 + 12x^2 + 3x + 10 \\
 & \cancel{x \neq 0} \quad \Rightarrow \quad x \neq 0 \\
 & \cancel{x \neq 1} \quad \Rightarrow \quad x \neq 1 \\
 & \cancel{x \neq 3} \quad \Rightarrow \quad x \neq 3 \\
 & \cancel{x \neq 2} \quad \Rightarrow \quad x \neq 2.
 \end{aligned}$$

1) $x > 0$ $\Rightarrow x+y+1 > 0 \Rightarrow x+y+1 \neq 0$.

\Rightarrow ~~решение~~ эта система \Leftrightarrow

$$\begin{cases} x \neq 3 \\ x > 0 \\ y > 0 \\ x - y - 3 = 0 \end{cases} \quad y = x - 3.$$

$$\begin{aligned}
 x^3 - x^3 - 9xy &= x^3 - (x-3)^3 - 9x(x-3) \\
 &= x^3 - (x^3 - 3x^2 + 9x - 27) - 9x^2 + 27x \\
 &= 3x^2 - 9x + 27 - 9x^2 + 27x = -6x^2 + 18x + 27
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &x \neq 3 \\
 &x > 0 \quad (\Rightarrow x \in (3; +\infty)) \quad (\text{т.к. } y = x - 3) \\
 &y > 0
 \end{aligned}$$

Остается узнать значение $f(x) = -6x^2 + 18x + 27$ при $x \in (3; +\infty)$

$$x_0 = \frac{-18}{-12} = \frac{3}{2} \Rightarrow \text{при } x \in (3; +\infty) \text{ функция строго}$$

и при этом имеет чётко выраженные значения



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1

2

3

4

5

6

7

СТРАНИЦА
3 из 3

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\text{при } x=3$$

$$f(3) = -6 \cdot 9 + 18 \cdot 3 + 27 = -54 + 54 + 27 = 27$$

\Rightarrow мы прикасааем узелки $(27; +\infty)$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.



- | | | | | | | |
|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |
|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|

СТРАНИЦА
1 ИЗ 3

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по **каждой из задач** **нумеруются отдельно**. Порча QR-кода недопустима!

№2.

$$x > 0, y > 0.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{xy} = \frac{1}{x-3} + \frac{1}{y+3} + \frac{1}{(x-3)(y+3)} \\ x > 0 \\ y > 0 \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{y+x+1}{xy} = \frac{y+3+x-3+1}{(x-3)(y+3)} \\ x > 0 \\ y > 0 \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{y+x+1}{xy} = \frac{y+x+1}{(x-3)(y+3)} \\ x > 0 \\ y > 0 \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} x \neq 3 \\ x > 0 \\ y > 0. \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} x+y+1=0 \\ xy=(x-3)(y+3) \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} x \neq 3 \\ x > 0 \\ y > 0. \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} x+y+1=0 \\ 0 = -3y + 3x - 9 \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} x \neq 3 \\ x > 0 \\ y > 0. \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} x+y+1=0 \\ -y+x-3=0. \end{array} \right.$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

1

2

3

4

5

6

7

СТРАНИЦА
1 из 2.

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по **каждой из задач** нумеруются **отдельно**. Порча QR-кода недопустима!

№3

$$\alpha) (\sin \pi x - \sin \pi y) \sin \pi x = (\cos \pi x + \cos \pi y) \cos \pi x$$

$$\sin^2 \pi x - \sin \pi y \cdot \sin \pi x = \cos^2 \pi x + \cos \pi y \cdot \cos \pi x$$

$$\sin^2 \pi x - \cos^2 \pi x = \sin \pi y \sin \pi x + \cos \pi y \cdot \cos \pi x$$

$$-\cos 2\pi x = \cos(\pi y - \pi x)$$

$$\cos(2\pi x + \pi) = \cos(\pi y - \pi x)$$

$$\begin{cases} 2\pi x + \pi = \pi y - \pi x + 2\pi k_1, \\ 2\pi x + \pi = -\pi y + \pi x + 2\pi k_2 \end{cases} \quad k_1, k_2 \in \mathbb{Z}$$

$$\begin{cases} 3x - y + 1 = 2k_1, \\ x + y + 1 = 2k_2. \end{cases}$$

~~один из 2 выражений~~

$$\text{Ответ: } (x; 3x + 1 - 2k_1) \cup (x; 2k_2 - x - 1)$$

При всех $x \in \mathbb{R}$ и $k_1, k_2 \in \mathbb{Z}$

$$\textcircled{1}) \begin{cases} 3x - y + 1 \vdots 2 \\ x + y + 1 \vdots 2. \end{cases}$$

$$\begin{cases} x - y + 1 \vdots 2 \\ x + y + 1 \vdots 2. \end{cases}$$

\Downarrow (м.к. выражение разделяется на 2):

$$\begin{cases} x + y + 1 \vdots 2 \\ \end{cases}$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

- | | | | | | | |
|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

СТРАНИЦА
2 из 2.

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по **каждой из задач** **нумеруются отдельно**. Порча QR-кода недопустима!

5)

Задумали, что $\arccos \alpha \leq \pi$ и $\arccos \beta = \pi$
только если $\alpha = -1$.

\Rightarrow неравенство $\arccos \frac{x}{4} + \arccos \frac{y}{9} \leq 2\pi$

не выполняется только если $\frac{x}{4} = -1$ и $\frac{y}{9} = -1$

$$\frac{x}{4} \in (-1; 1]$$

$$\frac{y}{9} \in (-1; 1]$$

Остается посчитать, сколько пар

$x \in [-3; 4]$ и $y \in [-8; 9]$ удовлетворяют.

$x+y+1 \geq 2$. ($\Leftrightarrow x$ и y разной четности).

Задумали, что x и y нечетные и x четное

x . Тогда x четное и y нечетное

$$4x \Rightarrow$$
 величина $4 \cdot 4 = 72$.

Ответ: 72.



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

- | | | | | | | |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

СТРАНИЦА
2.ИЗ 4

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по **каждой из задач** нумеруются **отдельно**. Порча QR-кода недопустима!

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{(x-1)}{y(y-1)} \cdot 3,5 = \frac{(x-3)}{4!}$$

$$6 \cdot 7 \frac{x-1}{y(y-1)} = \frac{(x-3)}{\cancel{6 \cdot 7}}$$

$$6 \cdot 7 (x-1) = y(y-1)(x-3)$$

~~$6 \cdot 7 (x-1) : x-3$~~

~~(x-1) и x-3 члены при x=3~~ ~~также~~
~~как назначаются~~ ~~на 2~~

~~$6 \cdot 7 \cdot 2 : x-3$~~

~~$3^2 \cdot 7 \cdot 2 : x-3$~~

$$6 \cdot 7 x - 6 \cdot 7 = (y^2 - y)(x-3)$$

~~$6 \cdot 7 x - 6 \cdot 7 = y^2 x - y x - 3 y^2 + 3 y$~~

$$x(6 \cdot 7 - y^2 + y) = 6 \cdot 7 - 3 y^2 + 3 y.$$

$$6 \cdot 7 - 3 y^2 + 3 y : 6 \cdot 7 - y^2 + y. \quad (\text{вычитаем 3 раза})$$

$$-2 \cdot 6 \cdot 7 : 6 \cdot 7 - \underbrace{y^2 + y}_{\leq 0}$$

~~$-2 \cdot 6 \cdot 7 : 6 \cdot 7 - y^2 + y \leq 0$~~

~~число делится будем~~
~~по получившемуся~~
~~значению~~

~~$2 \cdot 7 \cdot 2 : 6 \cdot 7 - y^2 + y$~~



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

- | | | | | | | |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

СТРАНИЦА
4 ИЗ 4

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$x = 9 :$$

$$2 \cdot 6 \cdot 7 : 6 \cdot 7 - 81 + 9.$$

$$2 \cdot 2 \cdot 7 : 2 \cdot 7 - 27 + 3.$$

$$28 : 14 - 27 + 3$$

$$28 : -10$$

нельзя

$$x = 10.$$

$$84 : 42 - 100 + 10.$$

$$84 : -48.$$

нельзя

$$y = 11.$$

$$84 : 42 - 121 + 11.$$

$$84 : -79 + 11$$

$$84 : -68.$$

нельзя.

Осталось проверить $y = 6$ и $y = 8$.

при ~~$x = 6$~~ $y = 6$.

$$x = \frac{42 - 3 \cdot 36 + 18 < 0}{42 - 36 + 6 > 0} \stackrel{< 0}{> 0} \text{ неподходит.}$$

при $y = 8$.

$$x = \frac{42 - 3 \cdot 64 + 3 \cdot 8 < 0}{42 - 64 + 8 < 0} \stackrel{< 0}{< 0} \text{ подходит}$$

Ответ: в конце было написано 8 символов.

На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.



- | | | | | | | |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

СТРАНИЦА
3 ИЗ 4

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

а) ~~Будем~~

~~рассмотреть~~
~~и вспомним~~.

~~Составим неравенство. Будем~~

Заметим, что $x^2 - y \leq 3 \cdot 6 \cdot 7$, иначе получим
длиннее будем дальше получим длинее.

Заметим, что это при $y = 12$.

$$(x^2 - y) = 12^2 - 12 = 144 - 12 = 132 > 3 \cdot 6 \cdot 7 = 126.$$

значит $y < 12$.

Получаем $y > 4$.

проверим $y \in [5; 11]$:

$$y = 5:$$

$$2 \cdot 6 \cdot 7 : 6 \cdot 7 - 25 + 5$$

$$84 : 42 - 25 + 5$$

$$84 : 2 \underset{\text{неверно}}{\cancel{2}}$$

$$y = 6:$$

$$2 \cdot 6 \cdot 7 : 6 \cdot 7 - 6^2 + 6$$

$$2 \cdot 7 : 7 - 6 + 1$$

$$14 : 2 \underset{\text{верно}}{\cancel{14}}$$

$$y = 7:$$

$$2 \cdot 6 \cdot 7 : 6 \cdot 7 - 49 + 7$$

$$2 \cdot 6 : 6 - 7 + 1$$

неверно.
(такого х не найдется)

$$y = 8:$$

$$2 \cdot 6 \cdot 7 : 6 \cdot 7 - 8^2 + 8$$

$$84 : 42 - 64 + 8$$

$$84 : 14 \underset{\text{верно}}{\cancel{14}}$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

- | | | | | | | |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|---------------------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|
| <input type="checkbox"/> 1 | <input type="checkbox"/> 2 | <input type="checkbox"/> 3 | <input checked="" type="checkbox"/> 4 | <input type="checkbox"/> 5 | <input type="checkbox"/> 6 | <input type="checkbox"/> 7 |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|---------------------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|

СТРАНИЦА
1 из 4

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Пусть всего x листов. Пусть выдано в конце месяца y листов.

Составим кол-во исходов, где Петя и Вася попадают на конкретные места разного

C_{x-2}^2 . Количество вариантов просто разделить общее C_x^4 .

$$\Rightarrow \text{вероятность } \frac{C_{x-2}^2}{C_x^4}$$

аналогично в конце месяца вероятность.

$$\frac{C_{x-2}^{y-2}}{C_x^y}$$

По условию:

$$\frac{C_{x-2}^2}{C_x^4} \cdot 3,5 = \frac{C_{x-2}^{y-2}}{C_x^y} \cdot \dots$$

$$\frac{(x-2)(x-1)}{2} \cdot \frac{x! \cdot x(x-1)!}{x(x-y)! \cdot (y-1)!} \cdot 3,5 = \frac{(x-2)!}{(x-y)! \cdot (y-1)!} \cdot \frac{x(x-1)(x-2)(x-3)}{4!}$$

6

I-

I-



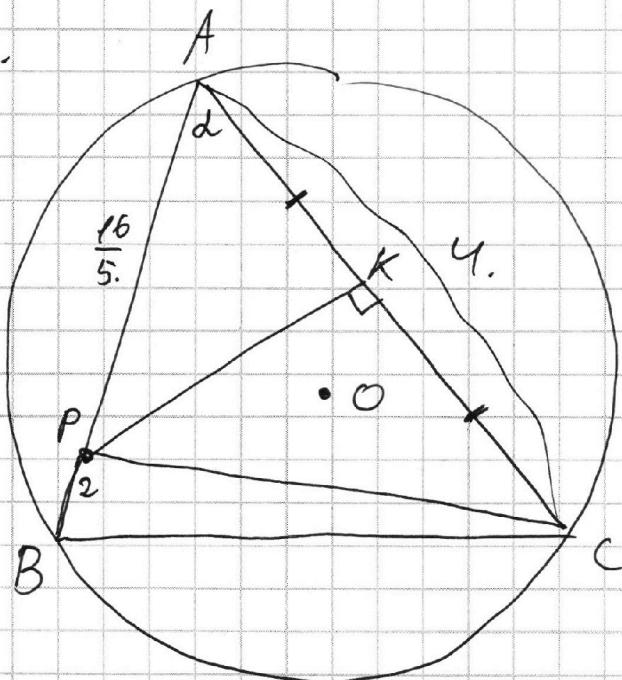
На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

- | | | | | | | |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

СТРАНИЦА
16 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

N 5.



Овнущти $\triangle ABC$, т.к. он остроугольный.

$$\angle A = \alpha \Rightarrow \angle BOC = 2\alpha \Rightarrow \angle BPC = 2\alpha$$

т.к. $BPOC$ - внешт. четырехугольник

$$\Rightarrow \angle PAC = 180^\circ - 2\alpha \quad | \quad \Rightarrow \angle PCA = \alpha$$

$$\angle A = \alpha$$

последовательн бд

$$\Rightarrow PC = PA.$$

Пусть PK - высота $\triangle PAC$.

PK -медиана, т.к. $AP = PC$.

~~sin < 90~~ $\cos \alpha = \frac{AK}{AP} = \frac{2}{\frac{16}{5}} = \frac{5}{8}$

$$\alpha < 90^\circ \Rightarrow \sin \alpha = \sqrt{1 - \left(\frac{5}{8}\right)^2} = \sqrt{\frac{64-25}{64}} = \sqrt{\frac{39}{64}} = \frac{\sqrt{39}}{8}$$

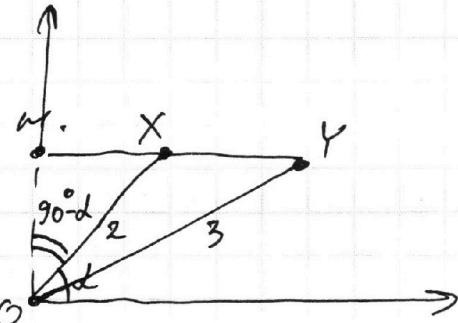
$$S = \frac{AB \cdot AC \cdot \sin \alpha}{2} = \frac{\left(2 + \frac{16}{5}\right) \cdot 4 \cdot \frac{\sqrt{39}}{8}}{2} = \frac{26}{5} \cdot \frac{1}{4} \cdot \sqrt{39} = \frac{13\sqrt{39}}{10}$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

СТРАНИЦА
2 ИЗ 3

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



Отметим точки как на рисунке

$$\frac{MO}{XO} = \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} = \frac{\cos \alpha}{\sin(90^\circ - \alpha)} = \frac{\cos \alpha}{\cos \alpha} = 1.$$

$$MO = \sqrt{9 - 4 \sin^2 \alpha}.$$

по т.нагр.: $MY = \sqrt{3^2 - 4 \sin^2 \alpha}$

~~горизонтальный~~
 \Rightarrow весь пулктируемый отрезок равен ~~2\sqrt{9-4\sin^2\alpha}~~

$$2 \sqrt{9 - 4 \sin^2 \alpha}$$

Аналогично боковой равен $2 \sqrt{9 - 4 \cos^2 \alpha}$.

Значит их сумма равна $2 \sqrt{9 - 4 \sin^2 \alpha} + 2 \sqrt{9 - 4 \cos^2 \alpha}$

~~Заметим, что верно неравенство:~~

$$\frac{a+b}{2} \leq \sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}$$

$$(a+b)^2 \leq (a^2+b^2) \cdot 2.$$

$$2ab \leq a^2+b^2$$

$$(a-b)^2 \geq 0.$$

неравенство таевко если $a = b$.



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

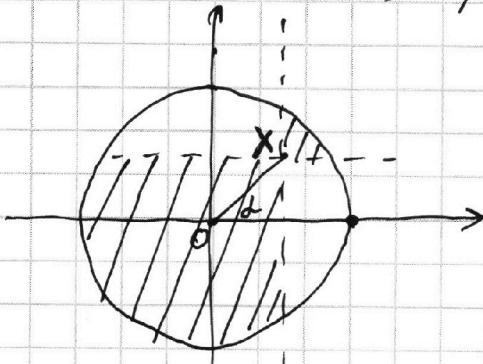
- | | | | | | | |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|---------------------------------------|----------------------------|
| <input type="checkbox"/> 1 | <input type="checkbox"/> 2 | <input type="checkbox"/> 3 | <input type="checkbox"/> 4 | <input type="checkbox"/> 5 | <input checked="" type="checkbox"/> 6 | <input type="checkbox"/> 7 |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|---------------------------------------|----------------------------|

СТРАНИЦА
1 ИЗ 3

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

№6.

$$\begin{cases} ((x - 2 \cos \alpha)(y - 2 \sin \alpha) \geq 0 \\ x^2 + y^2 \leq 9 \end{cases} \rightarrow \text{круг с центром } (0,0) \text{ и радиусом 3.}$$



Заметим, что точки пересечения прямых, ограничивающих. Одна из: $(2 \cos \alpha, 2 \sin \alpha)$
 $(2 \cos \alpha)^2 + (2 \sin \alpha)^2 = 4 \Rightarrow$ точка пересечения
 находится на расстоянии 2 от $(0,0)$
 \Rightarrow она находится на внутренней границе круга.

Угол между прямими прямой \Rightarrow сумма
 вспомогательных углов равна 180° берегов. \Rightarrow

сумма их длин константна. Поскольку
 сумма длин ~~одной~~ пульта может быть отрегулирована.

Хипотенуза константна ($2 \cos \alpha, 2 \sin \alpha$)

\Rightarrow Хипотенуза не мус, симметрична на $y=0$.

На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.



- | | | | | | | |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

СТРАНИЦА
3 ИЗ 3

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Нерча QR-кода недопустима!

По эллипсу пересекаются:

$$\frac{\sqrt{9-4\sin^2 d} + \sqrt{9-4\cos^2 d}}{2} \leq \sqrt{\left(\frac{18-4\cos^2 d - 4\sin^2 d}{2}\right)}$$
$$= \sqrt{\frac{18-4}{2}} = \cancel{\sqrt{7}}$$

неравенство толькo при $9-4\sin^2 d = 9-4\cos^2 d$

$$\sin^2 d = \cos^2 d$$

Послед при $d = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{2} \cdot k, k \in \mathbb{Z}$

Прибавим к $\sqrt{7}$ длину пасечного окружности и получим что максимум периметра

равен $\sqrt{7} + 3\pi$. и достигается толькo

$$\text{при } d = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{2} \cdot k, k \in \mathbb{Z}$$

На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

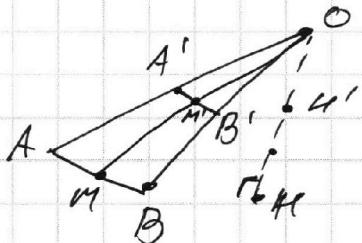
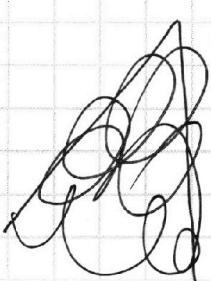


- | | | | | | | |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> |

СТРАНИЦА
1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Рассмотрим произвольное ребро AB ,
и, соответствующее ему, бокус $A'B'$

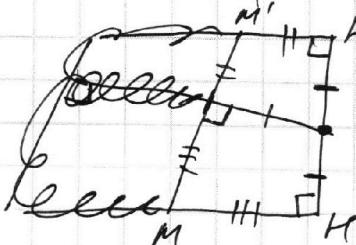


Пусть $AA' \cap BB' = O$. Тогда проекция О на
нижнего тора есть MH .

Конечно же, на центр окружности, которой
касается вся эта сторона. спадающей
его на $(AA'B'B)$ и получим, что эта проекция
сама — центр вписанной окружности $A'B'B$

\Rightarrow эта трапеция описана.

Или M' середина AB и $A'B'$
расстояние $(MM'HH')$



$$\Rightarrow M'H' + MH = MM'$$

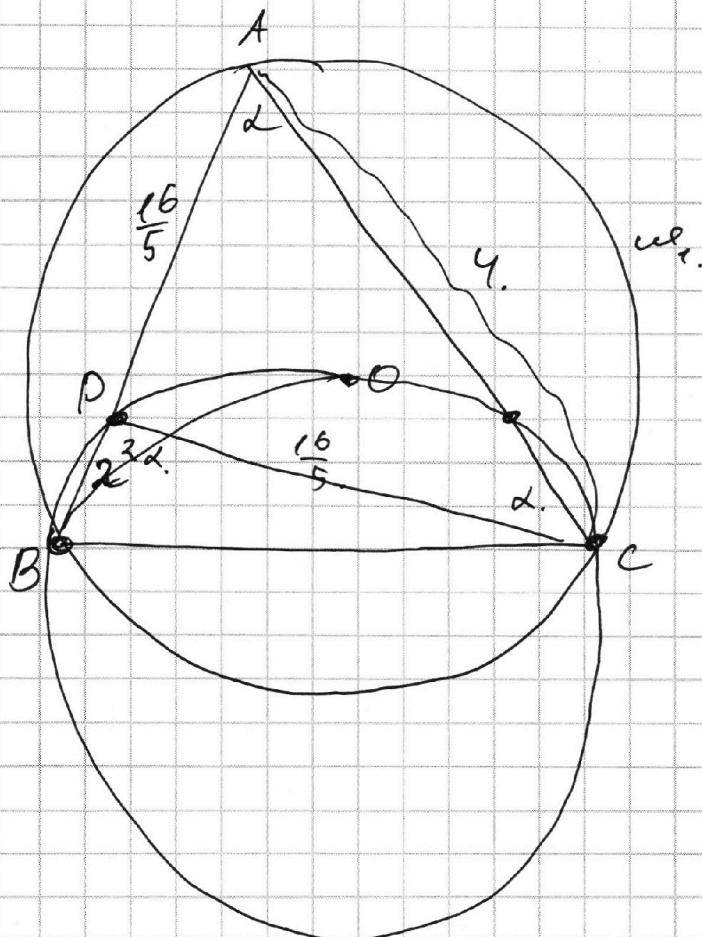


На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

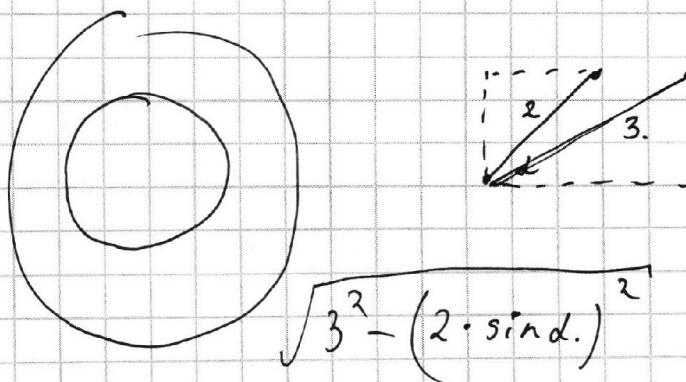
- | | | | | | | |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|
| <input type="checkbox"/> 1 | <input type="checkbox"/> 2 | <input type="checkbox"/> 3 | <input type="checkbox"/> 4 | <input type="checkbox"/> 5 | <input type="checkbox"/> 6 | <input type="checkbox"/> 7 |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|

СТРАНИЦА
ИЗ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



чс.



$$\sqrt{3^2 - (2 \cdot \sin \alpha)^2}$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении **каждой** задачи **отдельно**.

 1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
ИЗ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по **каждой** из задач **нумеруются отдельно**. Порча QR-кода недопустима!

$$\overline{aaaa} = A$$

$$:\overline{1111}$$

$$\overline{xyz} = B$$

$$=\overline{10 \cdot 101}.$$

↑

$$\overline{k\ell} = C$$

↑

5.

$$ABC = P.$$

$$= \overline{70 \cdot 56}$$

$$\frac{\ell}{x} + \frac{\ell}{y} + \frac{1}{xy} =$$

$$P : \overline{11^2 \cdot 10^2} = 126.$$

$$12 \cdot 144 - 12$$

$$= 132.$$

$$\frac{\ell}{x-3} + \frac{\ell}{y+3} + \frac{1}{(x-3)(y+3)} =$$

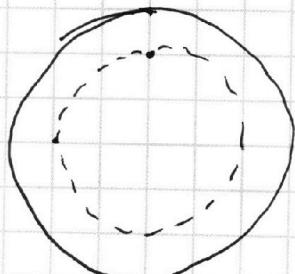
$$\frac{x+y+1}{xy} = \frac{x+y+1}{(x-3)(y+3)}$$

$$6x^2 + 24x + 3.$$

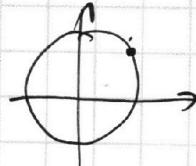
$$2x^2 + 8x + 1.$$

$$\textcircled{D} D = 64 - 8 = 56. \quad 28,$$

$$\frac{-8 \pm \sqrt{56}}{4} = \cancel{-2 \pm} -2 \pm \frac{\sqrt{14}}{2} < 2.$$



$$18.7$$



=





На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

- 1 2 3 4 5 6 7

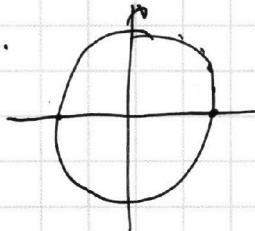
СТРАНИЦА
ИЗ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по **каждой из задач** нумеруются **отдельно**. Порча QR-кода недопустима!

$$\sin^2 \pi x - \sin \pi x \sin \pi x = \cos^2 \pi x + \cos \pi x \cos \pi x.$$

$$-\cos 2\pi x =$$

Х и Y разной четности.



$$y^2 - y.$$

$$y = 0, 1, 2.$$

$$144 - 12 = 132.$$

$$3 \cdot 6^2 : 7 =$$

x	2	1
x	3	6
x	2	1
+	3	6
x	2	1
x	7	5
		6

I-



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

- | | | | | | | |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| <input type="checkbox"/> |

СТРАНИЦА
ИЗ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

I-

I-



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

- | | | | | | | |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| <input type="checkbox"/> |

СТРАНИЦА
_ ИЗ _

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. **Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно.** Порча QR-кода недопустима!



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

1

2

3

4

5

6

7

СТРАНИЦА
_ ИЗ _

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1

2

3

4

5

6

7

СТРАНИЦА

ИЗ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\text{Пусть } k = y^2 - y$$

$$2k \geq 6^2 - 7 - k.$$

$$2k \geq 6^2 - 7 - k.$$

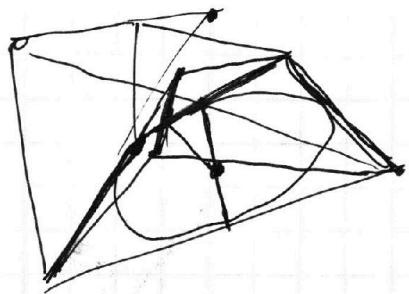
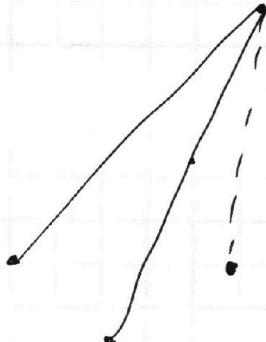


На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

- | | | | | | | |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| <input type="checkbox"/> |

СТРАНИЦА
_ ИЗ _

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по **каждой из задач** **нумеруются отдельно**. Переч QR-кода недопустим!



$$y^2 - y \leq 2 \cdot 6^3 \cdot 7 \\ = 2^3 \cdot 3^3 \cdot 7$$

$$3 \cdot 2 \cdot 4$$

$$= 12 \cdot 2$$