



МОСКОВСКИЙ  
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ  
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"  
ПО МАТЕМАТИКЕ

## 11 КЛАСС. Вариант 2



1. [3 балла] Найдите все тройки натуральных чисел  $(A; B; C)$  такие, что:
  - $A$  — четырёхзначное число, составленное из одинаковых цифр,
  - $B$  — трёхзначное число, хотя бы одна из цифр которого равна 1,
  - $C$  — двузначное число, хотя бы одна из цифр которого равна 5,
  - произведение  $A \cdot B \cdot C$  является квадратом некоторого натурального числа.
2. [3 балла] Положительные числа  $x$  и  $y$  таковы, что значение выражения  $K = \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{xy}$  не изменяется, если  $x$  уменьшить на 3, а  $y$  — увеличить на 3. Найдите все возможные значения выражения  $M = x^3 - y^3 - 9xy$ .
3. [5 баллов] а) Найдите все пары действительных чисел  $(x; y)$  такие, что  $(\sin \pi x - \sin \pi y) \sin \pi x = (\cos \pi x + \cos \pi y) \cos \pi x$ .  
б) Сколько пар целых чисел  $(x; y)$  удовлетворяют одновременно этому уравнению и неравенству

$$\arccos \frac{x}{4} + \arccos \frac{y}{9} < 2\pi?$$

4. [4 балла] В начале месяца было выделено 4 билета на праздничный концерт, которые планировалось случайным образом распределить между одиннадцатиклассниками. В конце месяца выяснилось, что будет выделено больше 4 билетов. Одиннадцатиклассники Петя и Вася вычислили, что вероятность им обоим вместе попасть на концерт в начале месяца была в 3,5 раза меньше, чем оказалась в конце месяца. Сколько всего было выделено билетов на концерт в конце месяца, если количество одиннадцатиклассников не изменилось?
5. [5 баллов] Точка  $O$  — центр окружности  $\omega_1$ , описанной около остроугольного треугольника  $ABC$ . Окружность  $\omega_2$ , описанная около треугольника  $BOC$ , пересекает отрезок  $AB$  в точке  $P$ . Найдите площадь треугольника  $ABC$ , если  $AP = \frac{16}{5}$ ,  $BP = 2$ ,  $AC = 4$ .
6. [6 баллов] На координатной плоскости изображена фигура  $\Phi(\alpha)$ , состоящая из всех точек, координаты  $(x; y)$  которых удовлетворяют системе неравенств

$$\begin{cases} (x - 2 \cos \alpha)(y - 2 \sin \alpha) \geq 0, \\ x^2 + y^2 \leq 9. \end{cases}$$

Найдите максимальное значение  $M$  периметра (длины границы) фигуры  $\Phi(\alpha)$  и укажите все значения  $\alpha$ , при которых оно достигается.

7. [6 баллов] Шар  $\Omega$  касается всех рёбер правильной усечённой пирамиды, а шар  $\omega$  касается всех её граней. Найдите угол наклона бокового ребра пирамиды к плоскости её основания.



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.



СТРАНИЦА

1 из 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$A = \overline{aaaa} = 1111 \cdot a = \underset{\text{простое}}{101} \cdot \underset{\text{простое}}{11} \cdot a, \quad 1 \leq a \leq 9$$

$$100 \leq B \leq 999$$

$$10 \leq C \leq 99$$

$$A \cdot B \cdot C = n^2, \quad n \in \mathbb{N}$$

$$A : 11$$

$$A : 101$$

$$\left. \begin{array}{l} n^2 : 11 - \text{простое} \\ n^2 : 101 - \text{простое} \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} n^2 : 11^2 \\ n^2 : 101^2 \end{array} \right\}$$

$$\Rightarrow B : 101, \quad C : 11$$

$$\left. \begin{array}{l} \text{у } B \text{ хотя бы одна } 1 \\ B \text{ может быть: } 101, 201, \dots, 909 \end{array} \right\} \Rightarrow B = 101$$

$$\left. \begin{array}{l} \text{у } C \text{ хотя бы одна } 5 \\ C \text{ может быть: } 11, 22, \dots, 99 \end{array} \right\} \Rightarrow C = 55$$

$$C \text{ может быть: } 11, 22, \dots, 99$$

$$A \cdot B \cdot C = 11 \cdot 101 \cdot a \cdot 101 \cdot 5 \cdot 11 = 11^2 \cdot 101^2 \cdot 5 \cdot a = n^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow a : 5, \text{ но т.к. } 1 \leq a \leq 9 \Rightarrow a = 5$$

$$A = 5555, \quad B = 101, \quad C = 55$$

$$\text{Ответ: } (5555; 101; 55)$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1  
☐

2  
☒

3  
☐

4  
☐

5  
☐

6  
☐

7  
☐

СТРАНИЦА  
1 из 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{xy} = \frac{1}{x-3} + \frac{1}{y+3} + \frac{1}{(x-3)(y+3)}$$

$$\frac{x+y+1}{xy} = \frac{y+3+x-3+1}{(x-3)(y+3)}$$

$$\frac{x+y+1}{xy} = \frac{x+y+1}{(x-3)(y+3)}$$

1)  $x+y+1=0$

$$y = -x-1$$

~~но~~  $x, y$  — положительные }  $\Rightarrow \emptyset$

2)  $x+y+1 \neq 0$

$$xy = (x-3)(y+3)$$

$$xy = xy - 3y + 3x - 9$$

$$x = y+3 \quad (\text{если } y \geq 0, \text{ то } x \geq 0 \Rightarrow \text{вариант подходит})$$

$$x^3 - y^3 - 9xy = (y+3)^3 - y^3 - 9(y+3)y = y^3 + 9y^2 + 27y + 27 - y^3 - 9y^2 - 27y = 27$$

$$-y^3 - 9y^2 - 27y = 27$$

Ответ: 27



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1  
☐2  
☐3  
☒4  
☐5  
☐6  
☐7  
☐СТРАНИЦА  
1 из 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$a) (\sin \pi x - \sin \pi y) \sin \pi x = (\cos \pi x + \cos \pi y) \cos \pi x$$

$$2 \sin \left( \frac{\pi x - \pi y}{2} \right) \cos \left( \frac{\pi x + \pi y}{2} \right) \sin \pi x = 2 \cos \left( \frac{\pi x + \pi y}{2} \right) \cos \left( \frac{\pi x - \pi y}{2} \right) \cdot \cos \pi x$$

$$1) \cos \left( \frac{\pi x + \pi y}{2} \right) = 0$$

$$\frac{\pi x + \pi y}{2} = \frac{\pi}{2} + \pi k, k \in \mathbb{Z}$$

$$x + y = 1 + 2k, k \in \mathbb{Z} \quad y = t \quad (-t + 1 + 2k; t), t \in \mathbb{R}, k \in \mathbb{Z}$$

$$2) \cos \left( \frac{\pi x - \pi y}{2} \right) \cos \pi x - \sin \left( \frac{\pi x - \pi y}{2} \right) \sin \pi x = 0$$

$$\cos \left( \frac{\pi x - \pi y}{2} \right) + 0$$

$$\cos \left( \frac{\pi x - \pi y}{2} + \pi x \right) = 0$$

$$\frac{3\pi x - \pi y}{2} = \frac{\pi}{2} + \pi n, n \in \mathbb{Z}$$

$$3x - y = 1 + 2n, n \in \mathbb{Z}$$

$$y = 3x - 1 - 2n$$

$$x = \frac{1 + 1 + 2n}{3}, n \in \mathbb{Z}$$

$$\left( \frac{1 + 1 + 2n}{3}; t \right), t \in \mathbb{R}, n \in \mathbb{Z}$$

$$\text{Ответ: } a) (-t + 1 + 2k; t); \left( \frac{1 + 1 + 2n}{3}; t \right), t \in \mathbb{R}, k, n \in \mathbb{Z}$$

$$b) \arccos \frac{x}{4} + \arccos \frac{y}{9} < 2\pi \Rightarrow \text{исключаем, когда } \begin{cases} x = -4 \\ y = -9 \end{cases} \quad (\arccos(-1) = \pi)$$

$$1) y = -9$$

$$-t + 1 + 2k = 9 + 1 + 2k = 10 + 2k = -4 \Rightarrow k = -8$$

$$2) y = -9$$

$$\frac{1 + 1 + 2n}{3} = \frac{-9 + 1 + 2n}{3} = \frac{-8 + 2n}{3} = -4$$

$$\frac{-8 + 2n}{3} = -4 \Rightarrow n = -2$$

$$\text{Ответ: } b) (-1 + 1 + 2k; t); \left( \frac{1 + 1 + 2n}{3}; t \right), t \in \mathbb{R}, k, n \in \mathbb{Z}, k \neq -8, n \neq -2$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

☐ ☐ ☐ ☒ ☐ ☐ ☐

СТРАНИЦА  
1 из 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$n$  - число одиннадцатиклассников

$x$  - число билетов, которое добавили к 4.

$$\text{Вероятность в начале: } p_1 = \frac{C_2^4 \cdot C_{n-2}^{n-4}}{C_n^4} = \frac{1 \cdot 1}{1} = 1$$

$$= \frac{4! \cdot (n-2)! \cdot 4! \cdot (n-4)!}{2! \cdot (n-4)! \cdot n!} = \frac{24 \cdot (n-2)!}{2 \cdot n!} = \frac{12}{n(n-1)}$$

Вероятность после новых билетов:

$$p_2 = \frac{C_2^{4+x} \cdot C_{n-2}^{n-4-x}}{C_n^{4+x}} = \frac{1 \cdot 1}{1} = 1$$

$$= \frac{(x+4)! \cdot (x+3)! \cdot (n^2-n)}{2 \cdot (n^2-n) \cdot 72} = \frac{(x+4)! \cdot (x+3)!}{2 \cdot 72} = \frac{7}{2}$$

$$\frac{p_2}{p_1} = 3,5$$

$$\frac{p_2}{p_1} = \frac{(x+4)! \cdot (x+3)! \cdot (n^2-n)}{2 \cdot (n^2-n) \cdot 72} = \frac{(x+4)! \cdot (x+3)!}{2 \cdot 72} = \frac{7}{2}$$

$$2(x^2+8x+16)(x^2+6x+9) = 7 \cdot 144$$

$$\frac{p_2}{p_1} = \frac{(x+4)(x+3)(n^2-n)}{(n^2-n) \cdot 12} = \frac{x^2+7x+12}{12} = \frac{7}{2}$$

$$x^2+7x+12=42$$

$$x^2+7x-30=0$$

$$D = 49 + 120 = 169$$

$$x = \frac{-7 \pm 13}{2}$$

$$\begin{cases} x = 3 > 0 + \\ x = -10 < 0 - \end{cases}$$

$$x = 3$$

В конце месяца было выделено  $(x+4) = (3+4) = 7$  билетов

Ответ: 7.



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☒ 7 ☐

СТРАНИЦА  
1 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\begin{cases} (x-2\cos\alpha)(y-2\sin\alpha) \geq 0 \\ x^2 + y^2 \leq 9 - \text{внутр. часть} \\ \text{окр. } \omega_1(0;0;3) \end{cases}$$

$$x = 2\cos\alpha$$

$$y = 2\sin\alpha$$

$$A(\frac{2\cos\alpha}{x_0}; \frac{2\sin\alpha}{y_0}) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow A \in \omega_2(0;0;2)$$

$$l_1: x = 2\cos\alpha$$

$$l_2: y = 2\sin\alpha$$

$$l_1 \perp l_2$$

$$l_1 \cap \omega_1 = \{B; C\}$$

$$B(x_0; \sqrt{9-x_0^2})$$

$$C(x_0; -\sqrt{9-x_0^2})$$

$$l_2 \cap \omega_1 = \{\Phi; E\}$$

$$\Phi(-\sqrt{9-y_0^2}; y_0)$$

$$E(\sqrt{9-y_0^2}; y_0)$$

$$l_1 \perp l_2 \Rightarrow \angle \Phi A C = \angle C A E = \angle E A B = \angle \Phi A B = 90^\circ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{\overset{\frown}{\Phi B} + \overset{\frown}{\Phi E}}{2} = 90^\circ \Rightarrow \frac{\overset{\frown}{B E} + \overset{\frown}{\Phi C}}{2} = 90^\circ \Rightarrow \overset{\frown}{\Phi C} + \overset{\frown}{B E} = 180^\circ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \overset{\frown}{\Phi C} + \overset{\frown}{B E} = 2\pi \cdot \frac{180^\circ}{360^\circ} = \pi \cdot 3 = 3\pi$$

$$\mathcal{M} = \overset{\frown}{\Phi E} + \overset{\frown}{B C} + \overset{\frown}{\Phi C} + \overset{\frown}{B E} = 2\sqrt{9-y_0^2} + 2\sqrt{9-x_0^2} + 3\pi$$

$$x_0^2 + y_0^2 = 4$$

$$y_0^2 = 4 - x_0^2$$

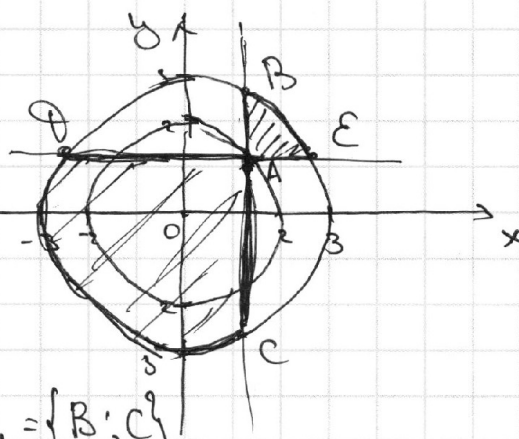
$$\mathcal{M} = 2(\sqrt{9-4+x_0^2} + \sqrt{9-x_0^2}) + 3\pi = 2\sqrt{x_0^2+5} + 2\sqrt{9-x_0^2} + 3\pi$$

$$t = x_0^2, t \geq 0$$

$$f(t) = 2\sqrt{t+5} + 2\sqrt{9-t} + 3\pi$$

$$f'(t) = 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{t+5}} + 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{-1}{\sqrt{9-t}} = \frac{1}{\sqrt{t+5}} - \frac{1}{\sqrt{9-t}} =$$

$$= \frac{\sqrt{9-t} - \sqrt{t+5}}{\sqrt{t+5} \cdot \sqrt{9-t}} = 0$$





На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

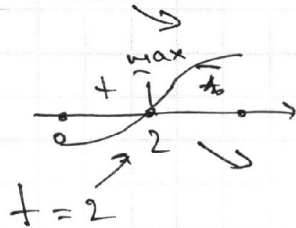
|                          |                          |                          |                          |                          |                                     |                          |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|
| 1                        | 2                        | 3                        | 4                        | 5                        | 6                                   | 7                        |
| <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

СТРАНИЦА  
2 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$t \geq 0$$
$$\sqrt{9-t} - \sqrt{t+5} = 0.$$

$\Rightarrow$  не более одного корня  
 $t = 2$



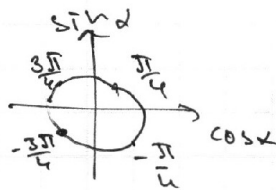
$$f(2) = 2 \cdot \sqrt{2+5} + 2 \cdot \sqrt{9-2} + 3J1 = 4\sqrt{7} + 3J1$$

$$t = x_0^2 = (2 \cos \alpha)^2 = 2$$

$$4 \cos^2 \alpha = 2$$

$$\cos^2 \alpha = \frac{1}{2}$$
$$\cos \alpha = \pm \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\alpha = \pm \frac{\pi}{4}$$
$$\alpha = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi k}{2}, k \in \mathbb{Z}$$



Ответ: макс.  $M = 4\sqrt{7} + 3J1$ , при  $\alpha = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi k}{2}, k \in \mathbb{Z}$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

☐ 1

☐ 2

☐ 3

☐ 4

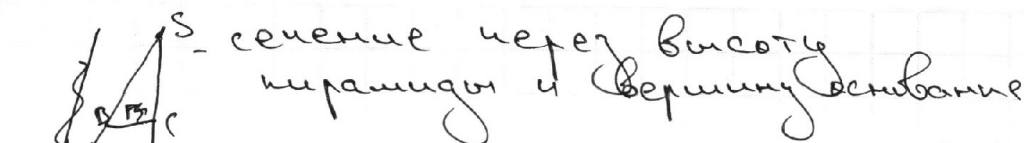
☐ 5

☐ 6

☒ 7

СТРАНИЦА  
2 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



$$SO = H$$

$$\frac{r_2}{H-h} = \frac{r_1}{H} \Rightarrow r_2 H = r_1 H - r_1 h$$

$$H = \frac{r_1 h}{r_1 - r_2}$$

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{SO}{AO} = \frac{H}{r_1} = \frac{r_1 h}{(r_1 - r_2) r_1} = \frac{h}{r_1 - r_2} =$$

$$= \frac{2\sqrt{r_1 r_2}}{r_1 - r_2}$$

$$\angle ASO = 90^\circ - \alpha$$

$$\sin \angle ASO = \frac{AO_1}{SO_1} = \frac{R_1}{H-x} =$$

$$= \frac{\sqrt{x^2 + r_1^2}}{\frac{r_1 h}{r_1 - r_2} - x} = \frac{\sqrt{x^2 + r_1^2}}{\frac{r_1 h}{r_1 - r_2} - \frac{h}{2} + \frac{r_2^2}{2h} + \frac{r_1^2}{2h}} = \frac{\sqrt{r_1^2 + r_1 r_2 + \frac{r_2^4 - 2r_1^2 r_2^2 + r_1^4}{16r_1 r_2} + \frac{r_2^2 - r_1^2}{2}}}{\frac{2r_1 h^2 - h^2 r_1 + h^2 r_2 + (r_1^2 - r_2^2)(r_1 - r_2)}{2h(r_1 - r_2)}}$$

$$= \frac{2h(r_1 - r_2) \sqrt{16r_1^3 r_2 + 16r_1^2 r_2^2 + r_2^4 - 2r_1^2 r_2^2 + r_1^4 + 8r_1 r_2^3 - 8r_1^3 r_2}}{(r_1 h^2 + r_2 h^2 + r_1^3 - r_1 r_2^2 - r_1^2 r_2 + r_2^3) \cdot \sqrt{16r_1 r_2}} =$$

$$= \frac{2\sqrt{r_1 r_2} (r_1 - r_2) \sqrt{r_1^4 + 8r_1^3 r_2 + 14r_1^2 r_2^2 + 8r_1 r_2^3 + r_2^4}}{(4r_1^2 r_2 + 4r_1 r_2^2 + 8r_1^3 - r_1 r_2^2 - r_1^2 r_2 + r_2^3) 4\sqrt{r_1 r_2}} =$$

$$= \frac{(r_1 - r_2) \sqrt{\left(\frac{r_1}{r_2} + 1\right)^2 \cdot \left(\frac{r_1}{r_2}\right)^4 + 6\frac{r_1}{r_2} + 1} \cdot r_2^4}{2(r_1^3 + 3r_1^2 r_2 + 3r_1 r_2^2 + r_2^3)} =$$

$$= \frac{(r_1 - r_2)(r_1 + r_2) \sqrt{r_1^2 + 6r_1 r_2 + r_2^2}}{2(r_1 + r_2)^3} = \frac{(r_1 - r_2) \sqrt{r_1^2 + 6r_1 r_2 + r_2^2}}{2(r_1 + r_2)^2}$$



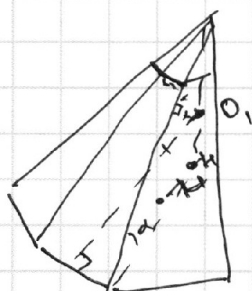
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

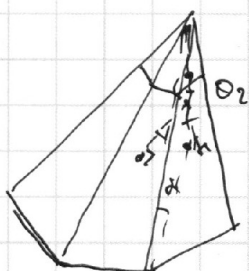
☐ ☐ ☐ ☐ ☐ ☐ ☒

СТРАНИЦА  
1 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



$\Omega(O_1; R_1)$

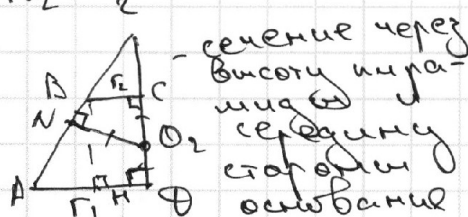


$\omega(O_2; R_2)$

$R_1$  - радиус описанной большого основания  
 $R_2$  - радиус описанной меньшего основания

$h$  - высота усеченной пирамиды

$$R_2 = \frac{h}{2}$$



$NO_2 = O_2P = O_2C$   
 $\angle ANO_2 = \angle APO_2 = \angle BCO_2$   
 $BO_2$  - общ. у  $\triangle NBO_2$  и  $\triangle BCO_2$   
 $AO_2$  - общ. у  $\triangle APO_2$  и  $\triangle ACO_2$

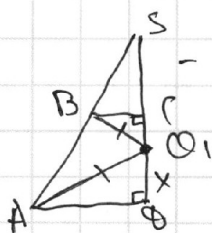
$$\Rightarrow \triangle NBO_2 = \triangle BCO_2 \quad \triangle APO_2 = \triangle ACO_2 \quad \Rightarrow \quad BN = BC = R_2$$

$$AN = AP = R_1$$

$H: H \in AP, BN \perp AP$

$$AB^2 = AN^2 + BN^2$$

$$(R_1 + R_2)^2 = h^2 + (R_1 - R_2)^2 \Rightarrow h^2 = 4R_1R_2$$



сечение через высоту пирамиды и середину стороны основания

$$BO_1 = AO_1 = R_1$$

$$O_1O_2 = x$$

$$CO_1 = h - x$$

$$x^2 + R_1^2 = (h - x)^2 + R_2^2$$

$$x^2 + R_1^2 = h^2 - 2hx + x^2 + R_2^2 \Rightarrow x = \frac{h^2 + R_2^2 - R_1^2}{2h}$$

$$x = \frac{h}{2} + R_2 \frac{R_2^2 - R_1^2}{2h}$$

$$x = \frac{2R_1R_2}{2} + \frac{4R_1R_2}{4\sqrt{R_1R_2}} - \frac{R_1^2}{4\sqrt{R_1R_2}} \Leftrightarrow x = \sqrt{R_1R_2} + \frac{R_2^2 - R_1^2}{4\sqrt{R_1R_2}}$$

$$R_1^2 = x^2 + R_2^2 = R_1^2 + R_1R_2 + \frac{R_2^4 - 2R_1^2R_2^2 + R_1^4}{16R_1R_2} + \frac{\sqrt{R_1R_2} \cdot (R_2^2 - R_1^2)^2}{2\sqrt{R_1R_2}} =$$

$$= R_1^2 + R_1R_2 + \frac{R_2^4 - 2R_1^2R_2^2 + R_1^4}{16R_1R_2} + \frac{R_2^2 - R_1^2}{2}$$

$$SO = H \Rightarrow \frac{R_2}{h - h} = \frac{R_1}{H} \Leftrightarrow R_2H = R_1h - R_1h \Leftrightarrow H = \frac{R_1h}{R_1 - R_2}$$





На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА

ИЗ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\sqrt{3}(\sin \pi x - \sin \pi y) \sin \pi x = (\cos \pi x + \cos \pi y) \cos \pi y$$

$$2 \sin\left(\frac{\pi x - \pi y}{2}\right) \cos\left(\frac{\pi x + \pi y}{2}\right) \sin \pi x = 2 \cos \frac{\pi x + \pi y}{2} \cdot \cos \frac{\pi x - \pi y}{2} \cdot \cos \pi x$$

$$1) \cos \frac{\pi x + \pi y}{2} = 0 \quad \frac{\pi x + \pi y}{2} = \frac{\pi}{2} + \pi k \Rightarrow x + y = 1 + 2k, k \in \mathbb{Z}$$

$$2) -\sin\left(\frac{\pi x - \pi y}{2}\right) \sin \pi x + \cos\left(\frac{\pi x - \pi y}{2}\right) \cos \pi x = 0.$$

$$\cos\left(\frac{\pi x - \pi y}{2} + \pi x\right) = 0$$

$$\cos\left(\pi\left(\frac{3x - y}{2}\right)\right) = 0.$$

$$3x - y = 1 + 2n, n \in \mathbb{Z}$$

$$1849 - 1600 - 280 < 0.$$

$$\begin{array}{r} x43 \\ \times 43 \\ \hline 129 \\ 172 \\ \hline 1849 \end{array}$$

$$x - 51x + 550 = 0.$$

$$D = 51^2 - 2200 = 2500 + 101 - 2200 =$$

$$\sqrt{4} = 401$$

$$x = 401$$

$$\frac{C_n^4}{C_n^4}$$

$$1) 1 - \frac{C_{n-2}^4}{C_n^4}$$

$$1 - \frac{4!(n-4) \cdot (n-2)!}{n! \cdot 4!(n-6)!} =$$

$$= 1 - \frac{(n-4)(n-5)}{n(n-1)} =$$

$$= \frac{n^2 - n - (n^2 - 9n + 20)}{n^2 - n} =$$

$$= \frac{8n - 20}{n^2 - n}$$

R

$$1000 + 120 + 4$$

24

$$\begin{array}{r} x58 \\ \times 58 \\ \hline 464 \\ 290 \\ \hline 3364 \\ - 3364 \\ \hline 1124 \\ \hline 2140 \end{array}$$

$$x^2 - 41x + 470 = 0 \quad 510 - 50 = 470$$

$$52 - 9 = 43$$

$$D = 1$$

$$x^2 + x(5 - 2n) + (20n - 50) = 0.7$$

$$2x + 9 - 2n = 0$$

$$x = \frac{2n - 9}{2} \rightarrow 0$$

$$540$$

$$n > 5$$

$$x^2 - x + 50 = 0. D = 1 - 200$$

$$x^2 - 3x + 70 = 0 \quad D = 9 - 280 = 17^2$$

$$x = \frac{3 \pm 17}{2}$$

$$(x+5)(x-10)$$

$$x = 10$$

$$x = -7$$

$$x^2 - 45x + 430 = 0$$

$$2000 - 40 = 1960$$

$$D = 2025 - 1960 = 65$$

$$2) 1 - \frac{C_{n-2}^{4+x}}{C_n^{4+x}} = 1 - \frac{(n-2)!(4+x)!(n-4-x)!}{(4+x)!(n-6-x)! \cdot n!} =$$

$$= \frac{(n-4-x)(n-5-x)}{n(n-1)} =$$

$$= \frac{n^2 - n - (n^2 - (9+2x)n + (4+x)(5+x))}{n^2 - n} =$$

$$= \frac{8n + 2xn - 20 - 9x - x^2}{n^2 - n}$$

$$\frac{8n + 2xn - 20 - 9x - x^2}{8n - 20} = 3,5$$

$$1 + \frac{2xn - 9x - x^2}{8n - 20} = 3,5. \quad 2,5 = \frac{5}{2}$$

$$4xn - 18x - 2x^2 = 40n - 100$$

$$2x^2 + 18x - 4xn + 40n - 100 = 0.$$

$$x^2 + x(9 - 2n) + (20n - 50) = 0.$$

$$D = 4n^2 - 36n + 81 - 80n + 200 =$$

$$= 4n^2 - 116n + 281$$

$$D = 58^2 - 4 \cdot 281 =$$



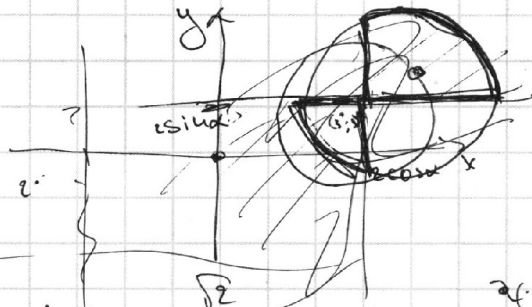
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

1 2 3 4 5 6 7

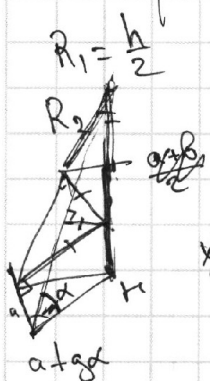
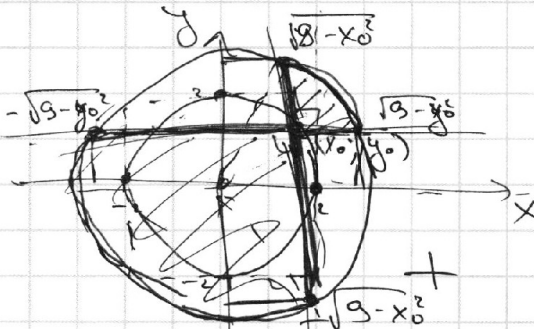
СТРАНИЦА  
из

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\begin{cases} (x-2\cos\alpha)(y-2\sin\alpha) \geq 0 \\ x^2 + y^2 \leq 9 \end{cases}$$



$$\begin{aligned} 2\sqrt{9-y_0^2} + 2\sqrt{9-x_0^2} + \text{const} \\ x_0^2 + y_0^2 = 4 \\ 2\sin\alpha \cos\alpha x = t \\ x = 2t \end{aligned}$$



$$\begin{aligned} \cos\alpha = t \\ \sin\alpha = \sqrt{1-t^2} \end{aligned}$$

$$x^2 + y^2 = 9$$

$$x_0, y_0: x_0^2 + y_0^2 = 4$$

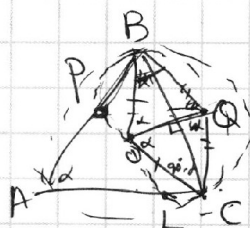
$$\begin{aligned} y^2 = 9 - x_0^2 \\ x = 9 - y_0^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{a}{b} = \frac{H-h}{H} \\ bH = aH - ah \\ H = \frac{ah}{a-b} \end{aligned}$$

$$t = x_0$$

$$y_0 = \sqrt{4-t^2}$$

$$\begin{aligned} 2\sqrt{9-x^2} dx = \\ 2\sqrt{9-t^2} + 2\sqrt{9-(4-t^2)} = \\ = 2\sqrt{5+t^2} \end{aligned}$$



$$\begin{aligned} \angle BQC = 360^\circ - 4\alpha \\ \angle BQO = 180^\circ - 2\alpha \\ 180^\circ - \alpha - (180^\circ - 2\alpha) = \\ = \alpha = \angle OBQ \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} R_1^2 + R_2^2 + 2R_1R_2\cos 2\alpha = R^2 \\ R_1^2(2+2\cos 2\alpha) = R^2 \end{aligned}$$

$$BC^2 = R^2(2+2\cos 2\alpha) = R_1^2(2+2\cos 4\alpha)$$

$$\frac{16}{5} \cdot \frac{26}{5} = 4 \cdot x \\ x = \frac{104}{25}$$

$$(2+2\cos 2\alpha)(2-2\cos 2\alpha) = 2-2\cos 4\alpha$$

$$1 - \cos^2 2\alpha = \cos^2 4\alpha$$

$$\cos 4\alpha = \cos^2 2\alpha = \frac{1+\cos 4\alpha}{2}$$

$$\cos 4\alpha + 1 = 2\cos 4\alpha$$

$$\cos 4\alpha = 1$$

$$4\alpha = 2\pi k$$

$$\frac{a}{2} \cdot \frac{a}{2} = \frac{AP}{AB} = \frac{16}{26} = \frac{8}{13}$$

$$\frac{AL}{AC} = \frac{104}{25 \cdot 4} = \frac{26}{25}$$

$$\begin{aligned} -4 & -9 \\ -t+1+2k & = -4 \\ t & = -9 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 10+2k & = -4 \\ k & = -8 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 2(1-\cos^2 2\alpha) & = 1-\cos 4\alpha \\ 2-(1+\cos 4\alpha) & = 1-\cos 4\alpha \end{aligned}$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи** отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

☐ ☐ ☐ ☐ ☐ ☐ ☐

СТРАНИЦА  
\_\_ ИЗ \_\_

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$111,1 = 101 \cdot 11$$

$$101 \cdot 11 = 1111$$

$$a \approx 101 \cdot 11$$

$$B \approx 101$$

$$101 \cdot 202 \cdot 303 \dots 809$$

$$C: 11$$

$$B = 101$$

$$C = 55$$

$$5 \cdot 11 \cdot 101 \cdot 101 \cdot 11 \cdot a = m^2$$

$$a = 5$$

\*

$$\begin{array}{r} 28 \\ \times 34 \\ \hline 112 \\ 84 \phantom{0} \\ \hline 952 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 28 \\ \times 27 \\ \hline 196 \\ 56 \phantom{0} \\ \hline 756 \end{array}$$

$$C_{n-2}^2 \cdot C_2^2$$

$$C_n^4$$

$$C_4 \cdot C_2^2 \cdot C_{n-2}^2$$

$$C_n^4$$

$$640$$

$$= \frac{4 \cdot 3}{2}$$

$$\frac{2 \cdot 11 \cdot 85 - 9 \cdot 11 - 11^2}{8 \cdot 85 - 20} =$$

$$= \frac{11(170 - 9 - 11)}{660}$$

$$= \frac{11 \cdot 150}{660}$$

$$= \frac{150}{660}$$

$$= \frac{5}{22}$$

$$= \frac{5}{22}$$

$$= \frac{5}{22}$$

$$= \frac{5}{22}$$

$$= \frac{5}{22}$$

$$= \frac{5}{22}$$

$$= \frac{5}{22}$$

$$= \frac{5}{22}$$

$$= \frac{5}{22}$$

$$\frac{1}{2} + \frac{19}{2} + \frac{70}{1-10}$$

$$x^2 + 7x - 30 = \frac{3}{2} + \frac{19}{2} - 10 = 11 - 10 = 1$$

$$\Delta = 49 \pm$$

$$\frac{5}{2} + \frac{19}{2} + \frac{70}{1-10} = 85$$

$$\frac{11}{2} + \frac{19}{2} + \frac{70}{1} = 85$$

$$n+1$$

$$52-9$$

$$x^2 + x(7-2n) + (20n-30) = 0$$

$$\Delta =$$

$$x^2 - 47x + 510 = 0$$

$$\Delta = 2199 - 2040 = 159$$

$$x^2 - 47x + 510 = 0$$

$$x = \frac{47 \pm 13}{2}$$

$$n = 28$$

$$\begin{cases} x = 30 \\ x = 17 \end{cases}$$

$$8 \cdot 28 + 2 \cdot 28 \cdot 17 - 20 \cdot 9 \cdot 17 - 289$$

$$= \frac{160 + 64 + 952 - 20 - 153 - 289}{756} = \frac{160 + 64 - 20}{160 + 64 - 20}$$

$$= \frac{204 + 952 - 153 - 20 - 442}{756}$$

$$\frac{2 \cdot 28 \cdot 17 - 9 \cdot 17 - 289}{8 \cdot 28 - 20} = \frac{756 - 289 - 17 \cdot 26 - 442}{160 + 64 - 20}$$

$$= \frac{314}{204}$$

$$\frac{2 \cdot 30 \cdot 28 - 9 \cdot 30 - 300}{8 \cdot 28 - 20} = \frac{30(56 - 9 - 30)}{204} = \frac{30 \cdot 17}{204} = \frac{5}{2}$$

$$\frac{2 \cdot 11 \cdot 85 - 9 \cdot 11 - 11^2}{8 \cdot 85 - 20} = \frac{11(170 - 9 - 11)}{660} = \frac{11 \cdot 150}{660} = \frac{150}{660} = \frac{5}{22}$$

$$= \frac{11(170 - 9 - 11)}{660}$$

$$= \frac{11 \cdot 150}{660}$$

$$= \frac{150}{660}$$

$$= \frac{5}{22}$$

$$= \frac{5}{22}$$

$$= \frac{5}{22}$$

$$= \frac{5}{22}$$

$$= \frac{11(170 - 9 - 11)}{660}$$

$$= \frac{11 \cdot 150}{660}$$

$$= \frac{150}{660}$$

$$= \frac{5}{22}$$

$$= \frac{5}{22}$$

$$= \frac{5}{22}$$

$$= \frac{5}{22}$$

$$= \frac{11(170 - 9 - 11)}{660}$$

$$= \frac{11 \cdot 150}{660}$$

$$= \frac{150}{660}$$

$$= \frac{5}{22}$$

$$= \frac{5}{22}$$

$$= \frac{5}{22}$$

$$= \frac{5}{22}$$

$$= \frac{11(170 - 9 - 11)}{660}$$

$$= \frac{11 \cdot 150}{660}$$

$$= \frac{150}{660}$$

$$= \frac{5}{22}$$

$$= \frac{5}{22}$$

$$= \frac{5}{22}$$

$$= \frac{5}{22}$$

$$= \frac{11(170 - 9 - 11)}{660}$$

$$= \frac{11 \cdot 150}{660}$$

$$= \frac{150}{660}$$

$$= \frac{5}{22}$$

$$= \frac{5}{22}$$

$$= \frac{5}{22}$$

$$= \frac{5}{22}$$

$$= \frac{11(170 - 9 - 11)}{660}$$

$$= \frac{11 \cdot 150}{660}$$

$$= \frac{150}{660}$$

$$= \frac{5}{22}$$

$$= \frac{5}{22}$$

$$= \frac{5}{22}$$

$$= \frac{5}{22}$$

$$= \frac{11(170 - 9 - 11)}{660}$$

$$= \frac{11 \cdot 150}{660}$$

$$= \frac{150}{660}$$

$$= \frac{5}{22}$$

$$= \frac{5}{22}$$

$$= \frac{5}{22}$$

$$= \frac{5}{22}$$

$$= \frac{11(170 - 9 - 11)}{660}$$

$$= \frac{11 \cdot 150}{660}$$

$$= \frac{150}{660}$$

$$= \frac{5}{22}$$

$$= \frac{5}{22}$$

$$= \frac{5}{22}$$

$$= \frac{5}{22}$$

$$= \frac{11(170 - 9 - 11)}{660}$$

$$= \frac{11 \cdot 150}{660}$$

$$= \frac{150}{660}$$

$$= \frac{5}{22}$$

$$= \frac{5}{22}$$

$$= \frac{5}{22}$$

$$= \frac{5}{22}$$

$$= \frac{11(170 - 9 - 11)}{660}$$

$$= \frac{11 \cdot 150}{660}$$

$$= \frac{150}{660}$$

$$= \frac{5}{22}$$

$$= \frac{5}{22}$$

$$= \frac{5}{22}$$

$$= \frac{5}{22}$$