



МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

11 КЛАСС. Вариант 1



1. [3 балла] Найдите все тройки натуральных чисел $(A; B; C)$ такие, что:
- A — четырёхзначное число, составленное из одинаковых цифр,
 - B — трёхзначное число, хотя бы одна из цифр которого равна 2,
 - C — двузначное число, хотя бы одна из цифр которого равна 3,
 - произведение $A \cdot B \cdot C$ является квадратом некоторого натурального числа.
2. [3 балла] Положительные числа x и y таковы, что значение выражения $K = \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{2}{xy}$ не изменяется, если x уменьшить на 1, а y — увеличить на 1. Найдите все возможные значения выражения $M = x^3 - y^3 - 3xy$.
3. [5 баллов] а) Найдите все пары действительных чисел $(x; y)$ такие, что $(\sin \pi x + \sin \pi y) \sin \pi x = (\cos \pi x + \cos \pi y) \cos \pi x$.
б) Сколько пар целых чисел (x, y) удовлетворяют одновременно этому уравнению и неравенству

$$\arcsin \frac{x}{5} + \arccos \frac{y}{4} < \frac{3\pi}{2}?$$

4. [4 балла] В начале месяца было выделено 4 билета на праздничный концерт, которые планировалось случайным образом распределить между одиннадцатиклассниками. В конце месяца выяснилось, что будет выделено больше 4 билетов. Одиннадцатиклассники Петя и Вася вычислили, что вероятность им обоим вместе попасть на концерт в начале месяца была в 2,5 раза меньше, чем оказалась в конце месяца. Сколько всего было выделено билетов на концерт в конце месяца, если количество одиннадцатиклассников не изменилось?

5. [5 баллов] Точка O — центр окружности ω_1 , описанной около остроугольного треугольника ABC . Окружность ω_2 , описанная около треугольника BOC , пересекает отрезок AB в точке P . Найдите площадь треугольника ABC , если $AP = \frac{15}{2}$, $BP = 5$, $AC = 9$.
6. [6 баллов] На координатной плоскости изображена фигура $\Phi(\alpha)$, состоящая из всех точек, координаты $(x; y)$ которых удовлетворяют системе неравенств

$$\begin{cases} (x - 3\sqrt{2} \sin \alpha)(y - 3\sqrt{2} \cos \alpha) \leq 0, \\ x^2 + y^2 \leq 25. \end{cases}$$

Найдите максимальное значение M периметра (длины границы) фигуры $\Phi(\alpha)$ и укажите все значения α , при которых оно достигается.

7. [6 баллов] Шар Ω касается всех рёбер правильной усечённой пирамиды, а шар ω касается всех её граней. Пусть сторона верхнего основания меньше, чем сторона нижнего. Найдите отношение площади боковой поверхности пирамиды к площади её нижнего основания.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении **каждой задачи отдельно**.



- | | | | | | | |
|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

СТРАНИЦА
1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач **нумеруются отдельно**. Порча QR-кода недопустима!

Пусть a -какая-то цифра ($a \in \mathbb{N}; 1 \leq a \leq 9$) - из $\frac{a}{a+0}$, ведь $A \neq 0$

$$A = \overline{aaaa} = 1000a + 100a + 10a + a = 1111a = 11 \cdot 101 \cdot a$$

П.к. числа 11 и 101 - простые, то, чтобы $A \cdot B \cdot C$ являлось квадратом, необходимо, чтобы произв. $B \cdot C$ содержало множитель 11 и 101. В пятойной степени (легко видеть, что 11^3 уже не трёхзначное $\Rightarrow 11 \cdot 101$ содержится в $B \cdot C$ ровно в первой степени)

Если $B \vdash (11 \cdot 101)$, то $B \geq 1111$, но B -трёхзначное, противоречие

Также $C \nmid (11 \cdot 101) \Rightarrow B$ один из чисел B и C содержит множитель 11, а в других 101

Раз C -двухзначное, то именно $C \vdash 11$, а раз одно из его

чисел ровно 3, то $C=33$ -единств. Возможн.

$B \vdash 101 \Rightarrow B$ может быть ровно 101, 202, 303, 404, 505, 606, 707, 808, 909

из этих чисел только 202 содержит хотя бы одну цифру 2 \Rightarrow

$\Rightarrow B=202$ -единств. Возможн.

$$BC = 33 \cdot 202 = 11 \cdot 3 \cdot 101 \cdot 2 = 11 \cdot 101 \cdot 6$$

$$ABC = 11 \cdot 101 \cdot a \cdot 11 \cdot 101 \cdot 6 = (11 \cdot 101)^2 \cdot (6a)$$

Чтобы ABC являлось точным квадратом, $6a$ должно быть квадратом натур. числа \Rightarrow подходит только $a=6$

Итого, $A=6666$ $B=202$ $C=33$ $ABC = (6 \cdot 11 \cdot 101)^2$ -

- единств. тройка натур. чисел, удовлетворяющих
условию

ОТВЕТ: (6666; 202; 33)



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении **каждой** задачи **отдельно**.

- 1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по **каждой** из задач **нумеруются отдельно**. Порча QR-кода недопустима!

$$K = \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{2}{xy} = \frac{1}{x-1} + \frac{1}{y+1} + \frac{2}{(x-1)(y+1)}$$
$$\frac{x+y+2}{xy} = \frac{(y+1)+(x-1)+2}{(x-1)(y+1)} = \frac{x+y+2}{(x-1)(y+1)}; x+y+2 \neq 0 \Rightarrow xy = (x-1)(y+1)$$

$$xy = xy + x - y - 1 \Leftrightarrow x - y - 1 = 0 \Leftrightarrow x - y = 1$$

$$(x-y)^3 = x^3 - 3x^2y + 3xy^2 - y^3$$

$$M = x^3 - y^3 - 3xy = (x-y)^3 + 3x^2y - 3xy^2 - 3xy = \\ = (x-y)^3 + 3xy(x-y-1) = (x-y)^3 + 3xy \cdot 0 = (x-y)^3 = 1^3 = 1$$

ОТВЕТ: 1

На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.



- | | | | | | | |
|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |
|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|

СТРАНИЦА
1 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$(1 \sin \pi x + \sin \pi y) \sin \pi x = (\cos \pi x + \cos \pi y) \cos \pi x$$

$$2 \sin \frac{\pi x + \pi y}{2} \cos \frac{\pi x - \pi y}{2} \sin \pi x = 2 \cos \frac{\pi x + \pi y}{2} \cos \frac{\pi x - \pi y}{2} \cos \pi x \quad | \times \frac{1}{2}$$

$$\cos \frac{\pi x - \pi y}{2} = 0 \text{ или } \sin \pi x \cdot \sin \frac{\pi x + \pi y}{2} = \cos \pi x \cdot \cos \frac{\pi x + \pi y}{2}$$

$$\frac{\pi x - \pi y}{2} = \frac{\pi}{2} + \pi k; k \in \mathbb{Z} \quad | \times \frac{2}{\pi}$$

$$x - y = 2k + 1; k \in \mathbb{Z}$$

$$y = x - 2k - 1; k \in \mathbb{Z}$$

Тогда умножим первое выражение:

$$(x; x - 2k - 1), \forall x \in \mathbb{R}, k \in \mathbb{Z}$$

$$-\cos \left(\frac{3\pi x + \pi y}{2} \right) = 0 \quad | \times (-1)$$

$$\frac{3\pi x + \pi y}{2} = \frac{\pi}{2} + \pi n; n \in \mathbb{Z} \quad | \times \frac{2}{\pi}$$

$$3x + y = 2n + 1; n \in \mathbb{Z}$$

$$y = -3x + 2n + 1; n \in \mathbb{Z}$$

Тогда умножим второе выражение:

$$(x; -3x + 2n + 1), \forall x \in \mathbb{R}, k \in \mathbb{Z}$$

$$\textcircled{b} \quad x, y \in \mathbb{R} \quad \arcsinh \frac{x}{5} + \arccos \frac{y}{4} < \frac{3\pi}{2}$$

ОДЗ:

$$\begin{cases} -1 \leq \frac{x}{5} \leq 1 \\ -1 \leq \frac{y}{4} \leq 1 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} -5 \leq x \leq 5 \\ -4 \leq y \leq 4 \end{cases}$$

$$1) \quad x = y + 2k + 1; k \in \mathbb{Z}$$

$$\text{По ОАТ } \arccos \frac{y}{4} = \frac{\pi}{2} - \arcsinh \frac{y}{4}$$

$$\arcsinh \left(\frac{y+2k+1}{5} \right) + \left(\frac{\pi}{2} - \arcsinh \frac{y}{4} \right) < \frac{3\pi}{2}$$

$$\arcsinh \left(\frac{y+2k+1}{5} \right) - \arcsinh \frac{y}{4} < \frac{\pi}{2}$$

Область значений arcsinh(x) - отрезок $[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}]$

$$\frac{\pi}{2} > \arcsinh \left(\frac{y+2k+1}{5} \right) - \arcsinh \frac{y}{4} > -\frac{\pi}{2}$$

Значит, первое уравнение выполнено, кроме случая:

$$\begin{cases} \arcsinh \left(\frac{y+2k+1}{5} \right) = \frac{\pi}{2} \\ \arcsinh \left(\frac{y}{4} \right) = -\frac{\pi}{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{y+2k+1}{5} = 1 \\ \frac{y}{4} = -1 \end{cases} \Rightarrow y = -4; k = 4 (x = 5)$$

$$y = -3: x = 2k + 1 - 3 = 2k - 2; -5 \leq 2k - 2 \leq 5 \Rightarrow k = -1; 0; 1; 2; 3 \Rightarrow 5 \text{ напр}$$

$$y = -4: x = 2k + 1 - 4 = 2k - 3; -5 \leq 2k - 3 \leq 5 \Rightarrow k = -2; -1; 0; 1; 2; 3 \Rightarrow 6 \text{ напр}$$

На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.



- | | | | | | | |
|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |
|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|

СТРАНИЦА
1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\begin{aligned}
 y = -1: & x = 2k; \quad -5 \leq 2k \leq 5 \Rightarrow k = -2; -1; 0; 1; 2 \Rightarrow 5 \text{ пар} \\
 y = 0: & x = 2k+1; \quad -5 \leq 2k+1 \leq 5 \Rightarrow k = -3; -2; -1; 0; 1; 2 \Rightarrow 6 \text{ пар} \\
 y = 1: & x = 2k+2; \quad -5 \leq 2k+2 \leq 5 \Rightarrow k = -3; -2; -1; 0; 1 \Rightarrow 5 \text{ пар} \\
 y = 2: & x = 2k+3; \quad -5 \leq 2k+3 \leq 5 \Rightarrow k = -4; -3; -2; -1; 0; 1 \Rightarrow 6 \text{ пар} \\
 y = 3: & x = 2k+4; \quad -5 \leq 2k+4 \leq 5 \Rightarrow k = -4; -3; -2; -1; 0 \Rightarrow 5 \text{ пар} \\
 y = 4: & x = 2k+5; \quad -5 \leq 2k+5 \leq 5 \Rightarrow k = -5; -4; -3; -2; -1; 0 \Rightarrow 6 \text{ пар} \\
 y = -4: & x = 2k-3 \quad -5 \leq 2k-3 \leq 5 \Rightarrow k = -1; 0; 1; 2; 3 \quad (k=4 \text{ не подходит}) \Rightarrow \\
 & \Rightarrow 5 \text{ пар. } \text{Итого } 47 \text{ пар}
 \end{aligned}$$

$$2) x = \frac{2n+1-y}{3}; n \in \mathbb{Z}$$

$$\arcsin\left(\frac{2n+1-y}{15}\right) - \arcsin\frac{y}{4} < \pi$$

$$\begin{cases} \frac{2n+1-y}{15} = 1 \\ \frac{y}{4} = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2n+1-y = 15 \\ y = -4 \end{cases} \Leftrightarrow y = -4; n = 5 \quad (x=5) - \text{не подходит}$$

$$y = -4: \quad x = \frac{2n+5}{3}; \quad -5 \leq \frac{2n+5}{3} \leq 5 \Rightarrow -10 \leq n \leq 5 \Rightarrow (n=5 \text{ не подходит}) \quad 15 \text{ пар}$$

$$y = -3: \quad x = \frac{2n+4}{3}; \quad -5 \leq \frac{2n+4}{3} \leq 5 \Rightarrow 15 \text{ пар}$$

$$y = -2: \quad 16 \text{ пар} \Rightarrow -8 \leq n \leq 6 \Rightarrow 16 \text{ пар}$$

$$\begin{aligned}
 y = -1: & 15 \text{ пар} \quad y = 0: 16 \text{ пар} \quad y = 1: 15 \text{ пар} \quad y = 2: 16 \text{ пар} \\
 y = 3: & 15 \text{ пар} \quad y = 4: 16 \text{ пар. } \text{Итого } 139 \text{ пар}
 \end{aligned}$$

$$\text{Всего } 47 + 139 = 186 \text{ пар}$$

ОТВЕТ: $\{(x; x-2k-1), (x; -3x+2n+1)\}, \text{ где } x \in \mathbb{R}; n, k \in \mathbb{Z}$

$$5) 186 \text{ пар}$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.



- | | | | | | | |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

СТРАНИЦА
1 из 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Пусть есть n одиннадцатицесчаков

Рассмотрим момент времени в начале месяца (k бинета, n человек)

Всего есть C_n^k способов раздать бинеты, из них благоприятных C_{n-2}^k (одежда каждого дает бинета Петре и Васе, а оставшиеся два раздаем сразу образом C_{n-2}^2 возможных). Перебором при наих и убеждаемся в справедливости формулы (при $n=5$: 5 способов раздать бинеты (1234, 1235, 1245, 1345, 2345), где учреж - учрежденный начер геновка, Петре - начер 1, Васе - начер 2); из них $C_3^2 = 3$ благоприятных: 1234, 1235, 1245)

Аналогично рассмотрим конец месяца ($k+4$ бинета, n человек, где k - количество дополнительного выданных бинетов)

Всего есть C_n^{k+4} способов раздать бинеты, из них благоприятных C_{n-2}^{k+2} по аналогичным соображениям. Многа вероятность Петре и Васе ^{в конце мес.} выйти позже не начером равна $\frac{C_{n-2}^{k+2}}{C_n^{k+4}}$, а в конце месяца - $\frac{C_{n-2}^2}{C_n^{k+4}}$

$$C_4^n = \frac{n!}{4!(n-4)!}; C_{n-2}^2 = \frac{(n-2)!}{2!(n-4)!} \Rightarrow \frac{C_{n-2}^2}{C_4^n} = \frac{(n-2)!}{2!(n-4)!} \cdot \frac{4!(n-4)!}{n!} = \\ = \frac{24(n-2)!}{2(n-2)!(n-3)n} = \frac{12}{n(n-1)}$$

$$C_n^{k+4} = \frac{n!}{(k+4)!(n-k-4)!}; C_{n-2}^{k+2} = \frac{(n-2)!}{(k+2)!(n-k-4)!} \Rightarrow \frac{C_{n-2}^{k+2}}{C_n^{k+4}} = \frac{(n-2)!}{(k+2)!(n-k-4)!} \cdot \\ \cdot \frac{(k+4)!(n-k-4)!}{n!} = \frac{(n-2)!}{n!} \cdot \frac{(k+4)!}{(k+2)!} = \frac{(n-2)!}{(n-2)!(n-1)n} \cdot \frac{(k+2)!(k+3)(k+4)}{(k+2)!} = \frac{(k+3)(k+4)}{n(n-1)}$$

$$\text{Из ус. } \frac{C_{n-2}^2}{C_4^n} = \frac{2}{5} \cdot \frac{C_{n-2}^{k+2}}{C_n^{k+4}} \Leftrightarrow \frac{12}{n(n-1)} = \frac{\frac{2}{5}(k+3)(k+4)}{n(n-1)} \Rightarrow (k+3)(k+4) = \\ = 12 \cdot \frac{5}{2} = 30$$

Очевидно, что $k \in \mathbb{N}$

$$k=1: (k+3)(k+4) = 4 \cdot 5 = 20$$

$$k=2: (k+3)(k+4) = 5 \cdot 6 = 30 \quad \checkmark \Rightarrow k=2 \Rightarrow \text{выданные 2 доп. бинета} \Rightarrow$$

\Rightarrow Всего в конце месяца было выдано $4 + 2 = 6$ бинетов

ОТВЕТ: 6



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

1

2

3

4

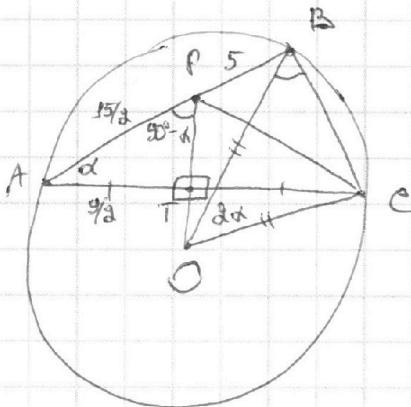
5

6

7

СТРАНИЦА
1 из 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач **нумеруются отдельно**. Порча QR-кода недопустима!



$$\text{Решение на отрезке } AB \Rightarrow AB = AP + PB = \\ = \frac{15}{2} + 5 = \frac{25}{2}$$

Пусть $\angle BAC = \alpha \Rightarrow \angle BOC = 2\alpha$ как центральн.

$OB = OC = R$, а $BOC - \text{rtg}$, т.к. $OB = OC$ или радиусы

$$\Rightarrow \angle OBC = \angle OCB = 90^\circ - \alpha$$

$$B, O, C \in \omega_2; P \in \omega_2 \Rightarrow OPBC - \text{вписанной} \Rightarrow \\ \Rightarrow \angle BPO = 180^\circ - \angle OCB = 90^\circ + \alpha \Rightarrow \angle APO = 180^\circ - \angle BPO = \\ = 90^\circ - \alpha$$

Пусть $OP \perp AC = m$.

По сумме углов в $\triangle ATP$ $\angle ATP = 90^\circ \Rightarrow OP \perp AC$

$AO = OC$ как радиусы $\Rightarrow \angle AOC - \text{rtg}$; OT - высота к основанию \Rightarrow она же и медиана $\Rightarrow AT = CT = \frac{AC}{2} = \frac{9}{2}$

$$\text{Изога в } \triangle APT \cos \alpha = \frac{AT}{AP} = \frac{\frac{9}{2}}{\frac{25}{2}} = \frac{9}{25} = \frac{3}{5} \Rightarrow \sin \alpha =$$

$$= \sqrt{1 - \cos^2 \alpha} = \sqrt{1 - \frac{9}{25}} = \sqrt{\frac{16}{25}} = \frac{4}{5}$$

$$S_{ABC} = \frac{AB \cdot AC \cdot \sin \alpha}{2} = \frac{\frac{25}{2} \cdot 9 \cdot \frac{4}{5}}{2} = \frac{25 \cdot 9 \cdot 4}{2 \cdot 2 \cdot 5} = 5 \cdot 9 = 45$$

ОТВЕТ: 45



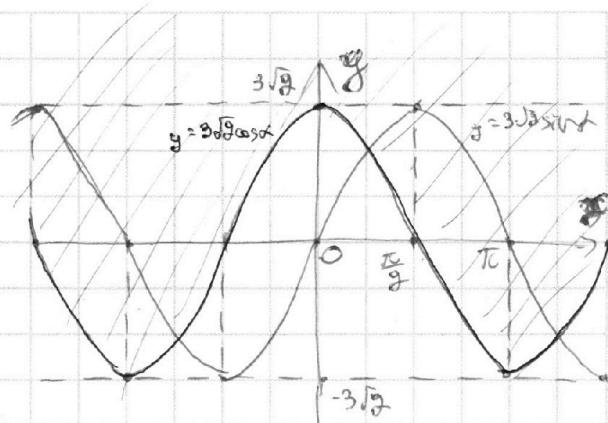
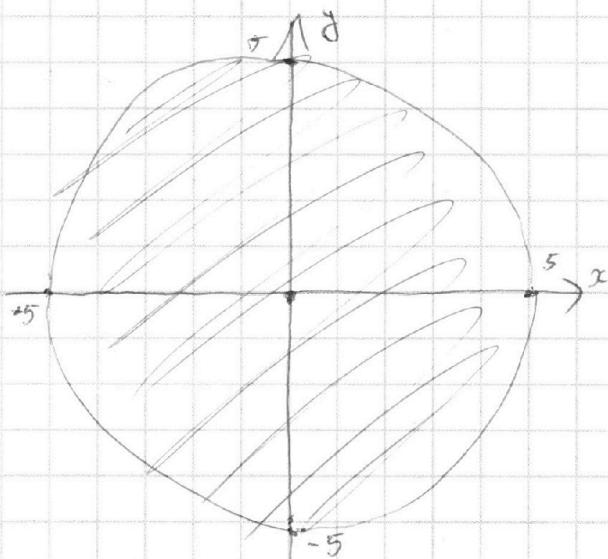
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

- | | | | | | | |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

СТРАНИЦА
1 из 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\begin{aligned} & \int (x - 3\sqrt{2} \sin x)(y - 3\sqrt{2} \cos x) = 0 \Rightarrow \\ & \int x^2 + y^2 \leq 25 - \text{Боковые всплески } cP = 5 \\ & \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 3\sqrt{2} \sin x \\ y \leq 3\sqrt{2} \cos x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq -3\sqrt{2} \\ y \leq 3\sqrt{2} \end{cases} \\ & \int x \in 3\sqrt{2} \sin x \\ & \int y \geq 3\sqrt{2} \cos x \end{aligned}$$





На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении **каждой задачи отдельно**.

1

2

3

4

5

6

7

СТРАНИЦА
_ ИЗ _

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

- | | | | | | | |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| <input type="checkbox"/> |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|

СТРАНИЦА
ИЗ



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$A = \overline{a} \cdot \overline{a} \cdot \overline{a} = 1000a + 100a + 10a + a = a(1000 + 100 + 10 + 1) = 1111a = 11 \cdot 101a$$

$$B = \underbrace{2}_{3} \text{ или } -\underbrace{2}_{3} \text{ или } -\underbrace{2}_{3} \quad (\sqrt{Bc} / \sqrt{Bc^2} / Bc^2) \text{ а.ч.нр.}$$

$$C = \underbrace{3}_{3} \text{ или } \underbrace{3}_{3} \quad (3a / \sqrt{3})$$

$$(ABC = n^2)$$

$$\begin{array}{r} 1111 \\ 1101 \\ \hline 11 \\ 101 \\ \hline 1111 \\ 1101 \\ \hline 11 \end{array}$$

$$11 \times 300 = 3300$$

101 202 303 ... 909

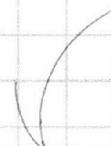
$$BC = 11 \cdot 101 \text{ к.ст.} \Rightarrow 1 \text{ не входит}$$

Одновременно 11 и 101 делятся на 11

$$\begin{aligned} 1) C:11, B:101 &\Rightarrow C=33; B=202 \text{ окнц} \\ ABC = 11 \cdot 101a \cdot 33 \cdot 202 &= \\ = 3 \cdot 11^2 \cdot 9 \cdot 101^2 &= 11^2 \cdot 101^2 \cdot (6a) \\ \Rightarrow a = 6 & \end{aligned}$$

$$2) C:101? \text{ невероятно}$$

$$A=6666 \quad B=202 \quad C=33$$



$$K = \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{2}{xy} = \frac{1}{x-1} + \frac{1}{y-1} + \frac{2}{(x-1)(y-1)}$$

$$x > 0 \quad y > 0$$

$$M = x^3 - y^3 - 3xy$$

$$\frac{1}{x-1} = \frac{2+y}{2-y} > \sqrt{xy} \quad \frac{1}{y-1} = \frac{x+2}{x-2} < \sqrt{xy}$$

$$\frac{1}{xy} = \frac{1}{x-1} + \frac{1}{y-1} + \frac{2}{(x-1)(y-1)} \Rightarrow xy = (x-1)(y-1)$$

$$\frac{x+y+2}{xy} = \frac{(y+1)+(x-1)+2}{(x-1)(y-1)} = \frac{x+y+2}{(x-1)(y-1)} \Rightarrow x+y = 1$$

$$xy = xy + x - y + 1 \Rightarrow x = y \Rightarrow x+y = 1 \Rightarrow y = 1-x$$

$$x = 1-y \quad x-y=1$$

$$\cancel{M = (x+y)(x-y)(x+y)} = (x^3 + 3x^2y + 3xy^2 + y^3)(x^3 - 3x^2y + 3xy^2 - y^3) = x^6 + 3x^4y^2 + 3x^2y^4 + y^6 - 3x^4y^2 - 3x^2y^4 + 2y^6 = 2y^6$$

$$(x-y)(x+y)(x-y) = (x^3 - 3x^2y + 3xy^2 - y^3)(x^3 + 3x^2y + 3xy^2 + y^3) = (x-y)^6$$

$$M = (x-y)^3 + 3x^2y - 3xy^2 - 3xy = (x-y)^3 + 3xy(x-y-1) = (x-y)^3 - 6xy^2 =$$

$$x^3 - 3x^2y - 3xy^2 - y^3 = x^3 - y^3 - 3xy(x+y)$$

$$x^3 - y^3 = (x-y)(x^2 + xy + y^2)$$

$$x^3 + y^3 + 3x^2y + 3xy^2 = 1 \quad (x+y)(x^2 - xy + y^2) + 3xy(x+y) = 1 \quad x^3 + 2xy + y^3 = 1$$



На одной странице можно оформлять **ТОЛЬКО** одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

СТРАНИЦА
— ИЗ —

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач **нумеруются отдельно**. Порча QR-кода недопустима!

$$\begin{aligned} x+y &= 1 \quad M = x^3 - y^3 - 3xy = ? \\ x^2 + 2xy + y^2 &= 1 \quad x^3 + 3x^2y + 3xy^2 + y^3 = 1 \\ 2xy = \frac{1}{2} &\Rightarrow x^2 + y^2 \leq \frac{1}{2} \\ (x+y)^4 &= x^4 + 4x^3y + 6x^2y^2 + 4xy^3 + y^4 = x^4 + 2xy(2x^3 + 3xy + 2y^3) + y^4 \\ (x-y)(x^2 + 2xy + y^2) - 3xy &= (x-y)(x^2 - xy) - 3xy = x^3 - x^2y - xy^2 - 3xy = x \cdot y + xy(y-x-3) \\ M+3 &= (x-y+3)xy(x-y+3) - xy(x-y+3) = (x-y+3)(x-xy) = (4x-2y)(x-xy) \end{aligned}$$

n ogusseyan.

W. J. G. H. M. J. S.
 4 December
 BETHESDA: ~~D-1~~

$$(u+k)^{-3}$$

B $(4+k)^{\text{dimes}}$
Kette:

$$B \quad (4+k)^{\text{dwarfs}} \quad \cancel{(k+4)(k+3)}$$

$$\frac{C^{n+\alpha}_n}{C^{n+k}_n}$$

~~C₆²⁺ Beers~~

Dronenp: Ca^{6+2}_{9-2}

Всё СЧИТИМО ПОДАРОК ДЛЯ ТЕБЯ

17 $\theta(n)(n-1)$ $n(n-1)$ Transp. exceeds?

$$\text{Section: } \underline{\underline{1234}} \quad \underline{\underline{2345}} \quad \underline{\underline{1235}} \quad \underline{\underline{1345}} \quad \underline{\underline{2345}} \quad \underline{\underline{0644 - C_3}}$$

C_3^2
 C_4^2

$$KA4 = 0,4 KOK = \frac{2}{3} KOK$$

$$\frac{C_{n-2}^k}{C_n^4} = \frac{2}{55}.$$

$$C_n^r = \frac{n!}{r!(n-r)!} = \frac{(n-1)(n-2)\dots(n-r+1)}{r!} = \frac{(n-1)n(n-2)n\dots(n-r+1)n}{2^r r!}$$

$$C_{n-2}^2 = \frac{(n-2)!}{2!(n-4)!}$$

$$\frac{C_{n-3}}{C_n} = \frac{(n-3)!}{3!(n-4)!}$$

$$\frac{d}{dx} \ln(n+1) = \frac{1}{n+1}$$

$$\frac{(n-q)}{e^{k+q}} = \frac{(k+q)!}{(n-k-4)!} \cdot \frac{n!}{(k+q)!(n-k-4)!}$$

$$= \frac{(k+3)(k+4)}{n(n-1)}$$

$$n(n-1)$$

$$\frac{pq}{rs} = \frac{2}{5} \cdot \frac{(k+3)(k+4)}{(k+1)(k+2)} \Rightarrow \frac{2}{5}(k+3)(k+4) = 12 \Rightarrow (k+3)(k+4) = 30$$

$$\frac{u(n-1)}{u(n-1)} = \frac{1}{5} \cdot \frac{n(n-1)}{n(n-1)} \Rightarrow u(n-1) = 5$$

$6 - 2 \Rightarrow 6$ wegen: $6 + 4 = 10$

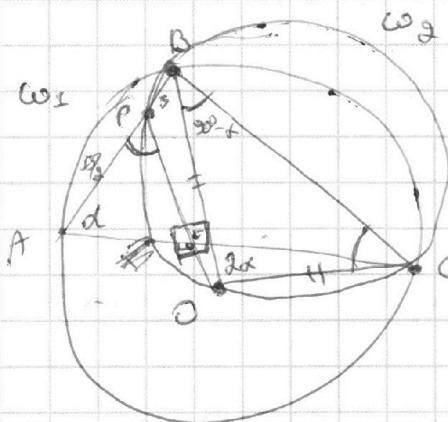
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.



- 1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
ИЗ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



$$\text{Рассмотрим } \rho O, 1/AC - \text{м. т.} \Rightarrow \angle CAP = 90^\circ \Rightarrow AT = CT \Rightarrow AP = PC \Rightarrow \angle ACP = \alpha$$

$$AP = \frac{15}{2}, BP = 5, AC = 9, S_{APC} = ? \quad \sin \angle A = \frac{\sin \angle A}{\sin \angle C} = ?$$

~~Угол ACO в ω₁ = m. X~~

$$AP \cdot AB = AC \cdot AC \Rightarrow AX = \frac{AP \cdot AB}{AC} = \frac{\frac{15}{2} \cdot 9}{9} = \frac{135}{18} = \frac{45}{2} \Rightarrow AC$$

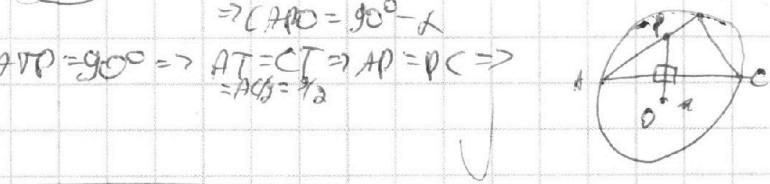
$$\text{Угол } CA \Rightarrow \angle PAC = 2\alpha \text{ или } 180^\circ - 2\alpha$$

$$\Rightarrow \angle PAC = 180^\circ - \alpha$$

~~OPBC - внеш. в ω₂ ⇒ ∠OPA =~~

$$= 180^\circ - \angle OCB = 180^\circ (90^\circ - \delta) = 90^\circ + \alpha \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \angle PAO = 90^\circ - \alpha$$



$$\cos(\alpha + \beta) = \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta \quad \cos \alpha + \cos \beta = 2 \cos \frac{\alpha + \beta}{2} \cos \frac{\alpha - \beta}{2}$$

$$(\sin \alpha x + \sin \beta y) \sin \alpha x = (\cos \alpha x + \cos \beta y) \cos \alpha x$$

$$\sin^2 \alpha x + \sin \beta y \cdot \sin \alpha x = \cos^2 \alpha x + \cos \beta y \cdot \cos \alpha x = \cos 2\alpha x$$

$$\sin \beta y \cdot \sin \alpha x = \cos 2\alpha x + \cos \beta y \cdot \cos \alpha x \quad \sin \beta y \cdot \sin \alpha x - \cos \beta y \cdot \cos \alpha x =$$

$$-\cos(\alpha x + \beta y) = \cos 2\alpha x$$

$$\cos 2\alpha x + \cos(\alpha x + \beta y) = 0 \quad 2 \cos \frac{3\alpha x + \beta y}{2} \cos \frac{\alpha x - \beta y}{2} = 0 \quad 1 \times \frac{\pi}{2} \quad \sin \frac{\pi}{2}$$

$$\cos \frac{3\alpha x + \beta y}{2} = 0 \quad \text{или} \quad \cos \frac{\alpha x - \beta y}{2} = 0$$

$$\frac{3\alpha x + \beta y}{2} = \frac{\pi}{2} + k\pi; k \in \mathbb{Z} / \pi/2$$

$$3x + y = \cancel{k\pi} + \frac{\pi}{2} + k\pi; k \in \mathbb{Z}$$

x, y любые вещественные

$$\frac{\alpha x - \beta y}{2} = \frac{\pi}{2} + k\pi; k \in \mathbb{Z} / \pi/2$$

$$x - y = 2n + \frac{\pi}{2}; n \in \mathbb{Z}$$

x, y любые вещественные

$$\alpha x - \beta y = \pi + 2k\pi$$

$$\sin \alpha + \sin \beta = 2 \sin \frac{\alpha + \beta}{2} \cos \frac{\alpha - \beta}{2}$$

$$\sin \frac{\alpha x + \beta y}{2} \cos \frac{\alpha x - \beta y}{2} = \sin \alpha x \cos \frac{\alpha x + \beta y}{2} - \cos \alpha x \sin \frac{\alpha x + \beta y}{2}$$

$$\cos \frac{\alpha x - \beta y}{2} = 0 \quad \text{или} \quad \sin \alpha x \sin \frac{\alpha x + \beta y}{2} = \cos \alpha x \cos \frac{\alpha x + \beta y}{2}$$

$$2n + \frac{\pi}{2} - y = 3y + 66 + \beta$$

$$2n = 4y + 66 + \beta \quad n = 3y + 33$$

$$\sin \alpha x \sin \beta - \cos \alpha x \cos \beta = 0$$

$$-\cos \left(\frac{3\alpha x + \beta y}{2} \right) = 0$$

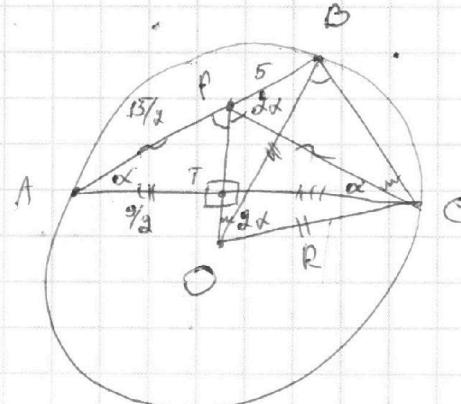
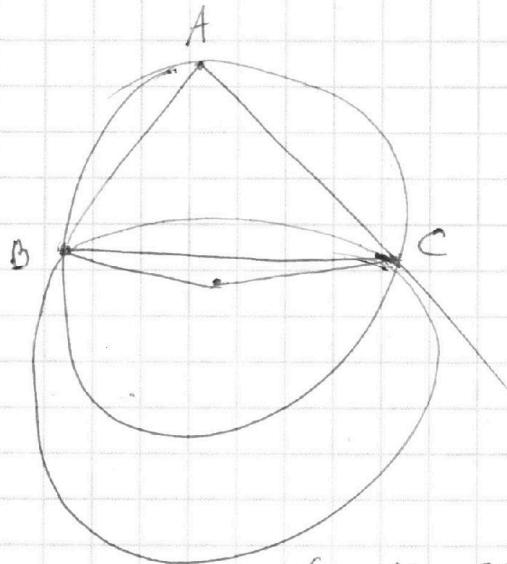
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.



- | | | | | | | |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| <input type="checkbox"/> |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|

СТРАНИЦА
_ ИЗ _

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются **отдельно**. Порча QR-кода недопустима!



$$\begin{aligned} \sin^2 + \cos^2 &= 1 \\ \cos^2 - \sin^2 &= ? \\ 2\cos^2 - 1 &= ? \\ 2\cos^2 &= \frac{2}{5} \\ \cos^2 &= \frac{1}{5} \\ \cos &= \pm \sqrt{\frac{1}{5}} \\ \cos &= \pm \frac{1}{\sqrt{5}} \end{aligned}$$

$$\text{1. } \sin \angle AOC: \frac{BC}{2R\sin x} = 2R \Rightarrow BC = 2R \sin x$$

$$\text{2. } \sin \angle OBC: \frac{BC}{2R\sin x} = 2r$$

$$\Rightarrow BC = \sqrt{2}R\sqrt{1-\cos 2x} = 2R \sin x \Rightarrow \sqrt{2} \sin x = \sqrt{1-\cos 2x} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2 \sin^2 x = 1 - (1 - 2 \sin^2 x) \Rightarrow 2 \sin^2 x = 2 \sin^2 x$$

$$\cos x = \frac{9}{5} \cdot \frac{9}{25} = \frac{9}{25} = \frac{3}{5} \Rightarrow \sin x = \sqrt{1 - \cos^2 x} = \sqrt{1 - \frac{9}{25}} = \frac{4}{5} \Rightarrow \sin x = \frac{4}{5}$$

~~знач~~

$$S_{ABC} = \frac{AB \cdot AC \cdot \sin x}{2} = \frac{\frac{25}{2} \cdot 9 \cdot \frac{4}{5}}{2} = \frac{25 \cdot 9 \cdot 4}{4 \cdot 8} = 65$$

$$\frac{2n+1-y}{3}$$

$$\begin{cases} -15 \leq 2n+1-y \leq 15 \\ -15 \leq 2n+5 \leq 15 \end{cases}$$

$$\arcsin \frac{x}{5} + \arccos \frac{y}{4} = \frac{3\pi}{2}$$

$$-15 \leq 2n+1-y \leq 15$$

$$\left\{ -1 \leq \frac{x}{5} \leq 1 \right.$$

$$\begin{cases} 1) x = y + 2k+1 & \arcsin \frac{y+2k+1}{5} & \arccos \frac{y}{4} < \frac{3\pi}{2} \\ \arccos \frac{y}{4} = \frac{\pi}{2} - \arcsin \frac{y}{4} & & \end{cases} \quad \begin{cases} -1 \leq \frac{y}{4} \leq 1 \\ -5 \leq x \leq 5 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \arcsin \frac{y+2k+1}{5} = \pi - \arcsin \frac{y}{4} & \arccos \frac{y}{4} = \frac{\pi}{2} \\ -5 \leq y+2k+1 \leq 5 & -6 \leq y+2k \leq 4; -4 \leq y \leq 4 \\ -6 \leq y+2k \leq 2k+4 \Rightarrow k \geq -5 & 4 \leq y+2k \geq -4 \Rightarrow k \leq 4 \end{cases} \quad \begin{cases} -9 \leq n \leq 5 \\ -15 \leq 2n+3 \leq 15 \end{cases}$$

$$\begin{cases} -9 \leq n \leq 5 \\ -15 \leq 2n+3 \leq 15 \end{cases}$$

$$\begin{cases} -9 \leq n \leq 5 \\ -18 \leq 2n+3 \leq 12 \end{cases}$$

$$\begin{cases} -9 \leq n \leq 5 \\ -18 \leq 2n+3 \leq 12 \end{cases}$$

$$\begin{cases} -9 \leq n \leq 5 \\ -18 \leq 2n+3 \leq 12 \end{cases}$$

$$\begin{cases} -9 \leq n \leq 5 \\ -18 \leq 2n+3 \leq 12 \end{cases}$$

$$\begin{cases} -9 \leq n \leq 5 \\ -18 \leq 2n+3 \leq 12 \end{cases}$$

$$\begin{cases} -9 \leq n \leq 5 \\ -18 \leq 2n+3 \leq 12 \end{cases}$$

$$\begin{cases} -9 \leq n \leq 5 \\ -18 \leq 2n+3 \leq 12 \end{cases}$$

Всего верно, кроме

$$y = -4$$

$$\arcsin \frac{y+2k+1}{5} = \pi - \arcsin \frac{y}{4}$$

$$\begin{cases} y+2k+1 = 5 \\ y+2k = 4 \end{cases} \quad \begin{cases} 2k+1 = 4 \\ 2k = 3 \end{cases} \quad \begin{cases} 2k = 3 \\ 2k = 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y+2k+1 = 5 \\ y+2k = 4 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y+2k+1 = 5 \\ y+2k = 4 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y+2k+1 = 5 \\ y+2k = 4 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y+2k+1 = 5 \\ y+2k = 4 \end{cases}$$