



МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

11 КЛАСС. Вариант 1



1. [3 балла] Найдите все тройки натуральных чисел $(A; B; C)$ такие, что:
- A — четырёхзначное число, составленное из одинаковых цифр,
 - B — трёхзначное число, хотя бы одна из цифр которого равна 2,
 - C — двузначное число, хотя бы одна из цифр которого равна 3,
 - произведение $A \cdot B \cdot C$ является квадратом некоторого натурального числа.
2. [3 балла] Положительные числа x и y таковы, что значение выражения $K = \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{2}{xy}$ не изменяется, если x уменьшить на 1, а y — увеличить на 1. Найдите все возможные значения выражения $M = x^3 - y^3 - 3xy$.
3. [5 баллов] а) Найдите все пары действительных чисел $(x; y)$ такие, что $(\sin \pi x + \sin \pi y) \sin \pi x = (\cos \pi x + \cos \pi y) \cos \pi x$.
- б) Сколько пар целых чисел (x, y) удовлетворяют одновременно этому уравнению и неравенству

$$\arcsin \frac{x}{5} + \arccos \frac{y}{4} < \frac{3\pi}{2}?$$

4. [4 балла] В начале месяца было выделено 4 билета на праздничный концерт, которые планировалось случайным образом распределить между одиннадцатиклассниками. В конце месяца выяснилось, что будет выделено больше 4 билетов. Одиннадцатиклассники Петя и Вася вычислили, что вероятность им обоим вместе попасть на концерт в начале месяца была в 2,5 раза меньше, чем оказалась в конце месяца. Сколько всего было выделено билетов на концерт в конце месяца, если количество одиннадцатиклассников не изменилось?
5. [5 баллов] Точка O — центр окружности ω_1 , описанной около остроугольного треугольника ABC . Окружность ω_2 , описанная около треугольника BOC , пересекает отрезок AB в точке P . Найдите площадь треугольника ABC , если $AP = \frac{15}{2}$, $BP = 5$, $AC = 9$.
6. [6 баллов] На координатной плоскости изображена фигура $\Phi(\alpha)$, состоящая из всех точек, координаты $(x; y)$ которых удовлетворяют системе неравенств

$$\begin{cases} (x - 3\sqrt{2} \sin \alpha)(y - 3\sqrt{2} \cos \alpha) \leq 0, \\ x^2 + y^2 \leq 25. \end{cases}$$

Найдите максимальное значение M периметра (длины границы) фигуры $\Phi(\alpha)$ и укажите все значения α , при которых оно достигается.

7. [6 баллов] Шар Ω касается всех рёбер правильной усечённой пирамиды, а шар ω касается всех её граней. Пусть сторона верхнего основания меньше, чем сторона нижнего. Найдите отношение площади боковой поверхности пирамиды к площади её нижнего основания.



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7
☒ ☐ ☐ ☐ ☐ ☐ ☐

СТРАНИЦА
1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Пусть число $A = \overline{aaaa}$, тогда $A = 1111a$.

$1111a = 11 \cdot 101a$. Чтобы $A \cdot B \cdot C$ был квадратом $A \cdot B \cdot C : 101^2$
т.к. $A : 101$, т.к. 101 простое и C двузначное, то
и $B : 101$. Т.к. B трехзначное и делится на 101 ,
то B вида $\overline{b0b}$, где b цифра. Чтобы в B хотя бы
одна цифра была равна 2 $b=2$. Тогда $B=202$.

Также $A : 11$, т.к. $B \neq 11$, то $A \cdot C : 11^2$, но $A : 11^2$ ($a \leq 9$)

$\Rightarrow C : 11$, тогда C вида $C = \overline{cc} = 11c$. Чтобы C
была хотя бы одна 3 $c=3 \Rightarrow C=33$

$$A \cdot B \cdot C = 11 \cdot 101 \cdot a \cdot 202 \cdot 33 = 101^2 \cdot 11^2 \cdot 6 \cdot a$$

$\Rightarrow 6a$ полный квадрат $\Rightarrow a : 6$, т.к. a цифра, то $a=6$.

$$\Rightarrow A=6666, B=202, C=33 \Rightarrow ABC = 101^2 \cdot 11^2 \cdot 6^2$$

Ответ: (6666, 202, 33)



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении **каждой задачи отдельно**.

1 ☐ 2 ☒ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА

1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Из условия $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{2}{xy} = \frac{1}{x-1} + \frac{1}{y+1} + \frac{2}{(x-1)(y+1)}$

$$-\frac{1}{x(x-1)} + \frac{1}{y(y+1)} + 2 \frac{x-y-1}{xy(x-1)(y+1)} = 0$$

$$-(y+1)y + x(x-1) + 2(x-y-1) = 0$$

$$x^2 + x - y^2 - 3y - 2 = 0$$

$$(x-y-1)(x+y+2) = 0$$

$\Rightarrow$ либо $x = y+1$, тогда $M = x^3 - y^3 - 3xy =$

$$= (y+1)^3 - y^3 - 3y(y+1) =$$

$$= y^3 + 3y^2 + 3y + 1 - y^3 - 3y^2 - 3y = 1.$$

$\Rightarrow \underline{M=1}$

либо $x = -y-2$, тогда $M = \cancel{x^3} - y^3 - 3xy =$

$$\cancel{(-y-2)^3} - y^3 + 3(y+2)y$$

$\Rightarrow x = -(y+2)$ т.к. $x > 0$, то $-(y+2) > 0$

$\Rightarrow y+2 < 0 \Rightarrow y < -2$, но $y > 0$, этот случай не возможен.

Ответ: $M = 1$.



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☒	☐	☐	☐	☐

СТРАНИЦА

1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$a) (\sin \pi x + \sin \pi y) \sin \pi x = (\cos \pi x + \cos \pi y) \cos \pi x$$

$$\sin^2 \pi x - \cos^2 \pi x = \cos \pi y \cos \pi x - \sin \pi y \sin \pi x$$

$$-\cos 2\pi x = \cos(\pi x + \pi y)$$

$$\cos(\pi x + \pi y) + \cos 2\pi x = 0$$

$$2 \cos \frac{3\pi x + \pi y}{2} \cos \frac{\pi y - \pi x}{2} = 0$$

$$\Rightarrow \cos \frac{3\pi x + \pi y}{2} = 0 \quad \text{или} \quad \cos \frac{\pi y - \pi x}{2} = 0$$

$$\frac{3\pi x + \pi y}{2} = \frac{\pi}{2} + \pi k, k \in \mathbb{Z} \quad \frac{\pi y - \pi x}{2} = \frac{\pi}{2} + \pi k, k \in \mathbb{Z}$$

$$3x + y = 2\pi k$$

$$y - x = 2\pi k$$

$$\cancel{x = \frac{2\pi k + y}{3}}$$

$$\Rightarrow \text{Ответ a) } (x; 2\pi k - 3x), (x, 2\pi k + x) \quad x \in \mathbb{R}$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

1 2 3 4 5 6 7
☐ ☐ ☐ ☒ ☐ ☐ ☐

СТРАНИЦА

1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Пусть в классе k человек, тогда вероятность что Пете и Васе пошлм на концерт равна $\frac{4}{k} \cdot \frac{3}{k-1}$, т.к. вероятность того, чтобы Васе пошлм на концерт равна $\frac{4}{k}$, тогда останется 3 билета среди $k-1$ человека и вероятность того, чтобы Пете пошлм на концерт равна $\frac{3}{k-1}$, ~~а что~~.

Аналогично Пусть в конце месяца n билетов. тогда полная вероятность равна $\frac{n(n-1)}{k(k-1)}$ (аналогично предыдущей случаю)

$$\text{Из условия } \frac{12}{k(k-1)} \cdot 2,5 = \frac{n(n-1)}{k(k-1)}$$

$$\Rightarrow n(n-1) = 30$$

$$n^2 - n - 30 = 0 \Rightarrow (n-6)(n+5) = 0 \Rightarrow n=6 (n>0)$$

Ответ: 6.



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

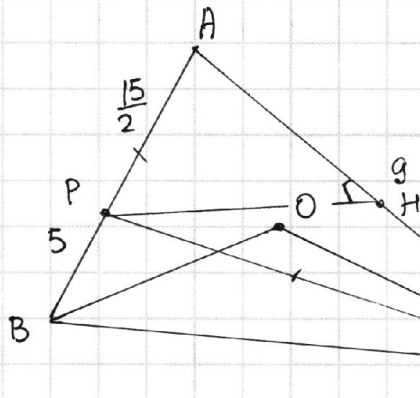
1 2 3 4 5 6 7
☐ ☐ ☐ ☐ ☒ ☐ ☐

СТРАНИЦА

1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

N 5



$$\angle BOC = 2\angle A, \text{ т.к. } O \text{ центр}$$

$$\angle BPC = \angle BOC = 2\angle A \text{ т.к. } BPOC \text{ вписанный}$$

$$\angle PCA = \angle BPC - \angle A = \angle A$$

$$\Rightarrow AP = PC = \frac{15}{2}$$

Тогда в $\triangle APE$ и $\triangle B$ проведем $PH \perp AC$, тогда PH медиана

$$AH = \frac{9}{2} \text{ по т. Пифагора } PH^2 = AP^2 - AH^2 = \frac{225 - 81}{4} = \frac{144}{4} = 36$$

$$\Rightarrow PH = 6 \Rightarrow \sin \angle A = \frac{PH}{AP} = \frac{6}{15/2} = \frac{4}{5}$$

$$S_{ABE} = \frac{1}{2} AB \cdot AC \sin \angle A = \frac{1}{2} \left(\frac{15}{2} + 5 \right) \cdot 9 \cdot \frac{4}{5} = \frac{25}{4} \cdot \frac{4}{5} \cdot 9 = 45$$

Ответ: $S_{ABE} = 45$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☒ 7 ☐

СТРАНИЦА

1 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Сделаем замену $\alpha = \frac{\pi}{2} - \beta$, тогда система примет вид

$$\begin{cases} (x - 3\sqrt{2} \cos \beta)(y - 3\sqrt{2} \sin \beta) \leq 0 & (1) \\ x^2 + y^2 \leq 25 \end{cases}$$

Точка $A(3\sqrt{2} \cos \beta, 3\sqrt{2} \sin \beta)$ лежит на окружности

$$x^2 + y^2 = 18, \text{ т.к. } (3\sqrt{2} \cos \beta)^2 + (3\sqrt{2} \sin \beta)^2 = 18$$

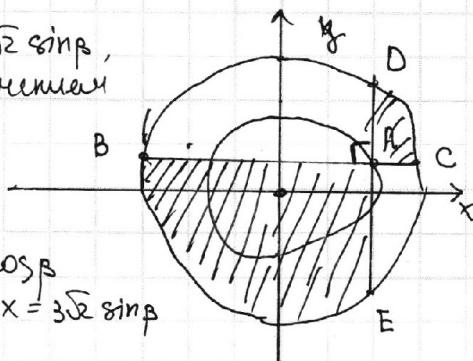
Решение пер-во (1) будет совокупность

Решение пер-во (2) будет круг с центром в (0,0) и радиусом 5.

$$\begin{cases} x \leq 3\sqrt{2} \cos \beta \\ y \geq 3\sqrt{2} \sin \beta \\ x \geq 3\sqrt{2} \cos \beta \\ y \leq 3\sqrt{2} \sin \beta \end{cases}$$

Проведем прямую $x = 3\sqrt{2} \cos \beta$, $y = 3\sqrt{2} \sin \beta$, тогда точка A будет их пересечением

Решением системы будет часть окружности, которая ниже $y = 3\sqrt{2} \sin \beta$ и выше $x = 3\sqrt{2} \cos \beta$ или выше $y = 3\sqrt{2} \sin \beta$ и ниже $x = 3\sqrt{2} \cos \beta$



Пусть $y = 3\sqrt{2} \sin \beta$ пересекает $x^2 + y^2 = 25$ в точках B и C. Он будет это делать всегда т.к. A лежит на окружности $x^2 + y^2 = 18$ которая полностью находится внутри круга $x^2 + y^2 \leq 25$. Пусть $x = 3\sqrt{2} \cos \beta$ пересекает окружность $x^2 + y^2 = 25$ в точках D и E. Т.к. $DE \perp BC$, то дуги $\angle BDE$ и $\angle BCE$ в сумме $180^\circ \Rightarrow \angle BDE + \angle BCE = \frac{2\pi}{2} \Rightarrow \angle BDE + \angle BCE = \pi$

Точка D имеет координаты $(3\sqrt{2} \cos \beta, \sqrt{18 \sin^2 \beta + 4})$ и $(3\sqrt{2} \cos \beta, -\sqrt{18 \sin^2 \beta + 4})$ соответственно.

$$\text{Т.к. } (3\sqrt{2} \cos \beta)^2 + (\pm \sqrt{18 \sin^2 \beta + 4})^2 = 25$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1
☐2
☐3
☐4
☐5
☐6
☒7
☐СТРАНИЦА
2 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Аналогично B и C имеют координаты $(3\sqrt{2} \sin \beta, \sqrt{18 \sin^2 \beta + 4})$
и $(-3\sqrt{2} \cos \beta, \sqrt{18 \cos^2 \beta + 4})$ т.к. $(3\sqrt{2} \sin \beta)^2 + (18 \cos^2 \beta + 4) = 25$

$$DE^2 = (3\sqrt{2} \cos \beta - 3\sqrt{2} \cos \beta)^2 + (\sqrt{18 \sin^2 \beta + 4} - \sqrt{18 \sin^2 \beta + 4})^2 = 4(18 \sin^2 \beta + 4)$$

$$BC^2 = (3\sqrt{2} \sin \beta - 3\sqrt{2} \sin \beta)^2 + (-\sqrt{18 \cos^2 \beta + 4} + \sqrt{18 \cos^2 \beta + 4})^2 = 4(18 \cos^2 \beta + 4)$$

$$\text{Периметр } M = \cup BE + \cup DC + DE + BC = 5\pi + DE + BC$$

$\Rightarrow$ Найдём максимум $DE + BC$ или ~~или $DE + BC$~~

$$(DE + BC)^2 = DE^2 + BC^2 + 2DE \cdot BC \leq DE^2 + BC^2 + DE^2 + BC^2 = 2(DE^2 + BC^2) = 8(18 \sin^2 \beta + 18 \cos^2 \beta + 14) = 8 \cdot 32$$

$$\Rightarrow DE + BC \leq 16 \text{ равенство при } DE^2 + BC^2 = 2DE \cdot BC$$

$$\Rightarrow DE = BC \Rightarrow DE^2 = BC^2 \Rightarrow \sin^2 \beta = \cos^2 \beta$$

$$\Rightarrow \cos 2\beta = 0 \Rightarrow 2\beta = \frac{\pi}{2} + \pi k \Rightarrow \beta = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi k}{2} \Rightarrow \frac{\pi}{2} - \alpha = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi k}{2} \quad k \in \mathbb{Z}$$

$$\Rightarrow \alpha = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi k}{2}$$

Ответ: $\mathbb{R}^+$ Максимум $M = 16 + 5\pi$ при $\alpha = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi k}{2} \quad k \in \mathbb{Z}$.

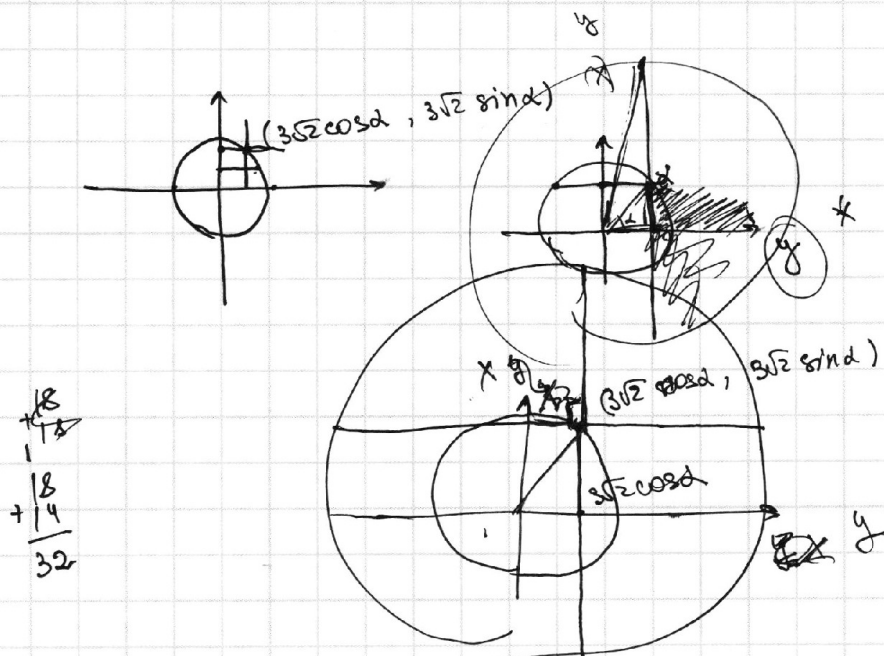


На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



$$\frac{18}{1+18}$$

$$\frac{18}{1+18}$$

$$\frac{18}{32}$$

$$y \leq x = 3\sqrt{2} \cos \alpha \quad y = \pi$$

$$x = 3\sqrt{2} \sin \alpha$$

$$8 \cdot 8 \cdot 4$$

$$y = 3\sqrt{2} \cos \alpha$$

$$x^2 \quad 18 \sin^2 \alpha + y^2 = 25$$

$$y^2 = 18 \cos^2 \alpha + 4 \quad x^2 = 3\sqrt{2} \sin \alpha$$

$$4+4=8$$

$$2\sqrt{18 \cos^2 \alpha + 4} + 2\sqrt{18 \sin^2 \alpha + 4} \rightarrow \max$$

$$\cos^2 \alpha = \sin^2 \alpha$$

$$\sqrt{25 - 18 \sin^2 \alpha} + \sqrt{18 \sin^2 \alpha + 4} \rightarrow \max$$

$$\sqrt{a} + \sqrt{b}$$

$$\sqrt{a} + \sqrt{32 - a} \rightarrow \max$$

$$\cos 2\alpha = 0$$

$$8\sqrt{2}$$

$$a + b = 18 + 14 = 32$$

$$2\alpha = \frac{\pi}{2} + \pi k$$

$$a + 32 - a + 2\sqrt{(32 - a)a} \leq 32 + \frac{32}{2} + \frac{18}{2} =$$

$$\alpha = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi k}{2}$$

$$a = 32 - a \quad \underline{a = 16}$$

1



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1
☐

2
☐

3
☐

4
☐

5
☐

6
☐

7
☐

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Поместим ось координат, теперь Ox ордината,
Oy абсцисса.

Заметим $A(3\sqrt{2}\cos\alpha, 3\sqrt{2}\sin\alpha)$

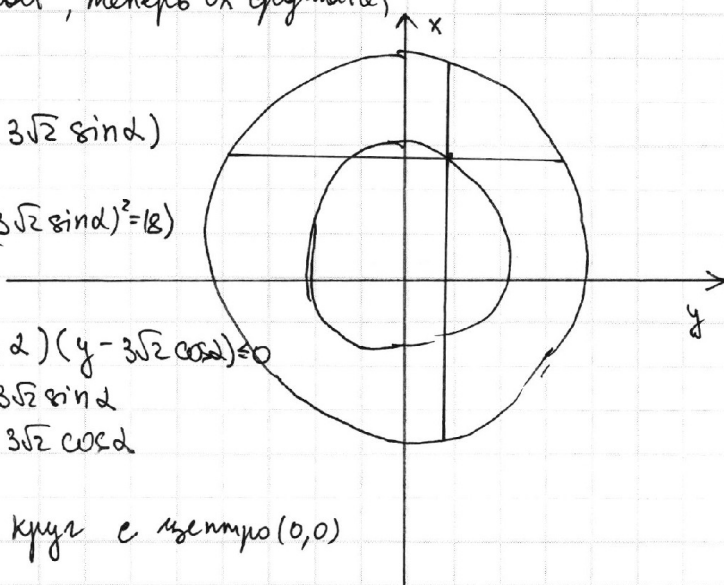
лежит на окружности

$$x^2 + y^2 = 18 \quad ((3\sqrt{2}\cos\alpha)^2 + (3\sqrt{2}\sin\alpha)^2 = 18)$$

Решение $(x - 3\sqrt{2}\sin\alpha)(y - 3\sqrt{2}\cos\alpha) = 0$

$$\begin{cases} x \leq 3\sqrt{2}\sin\alpha \\ y \geq 3\sqrt{2}\cos\alpha \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} x \geq 3\sqrt{2}\sin\alpha \\ y \leq 3\sqrt{2}\cos\alpha \end{cases}$$

Решение $x^2 + y^2 \leq 25$ круг с центром $(0,0)$
и радиусом 5.



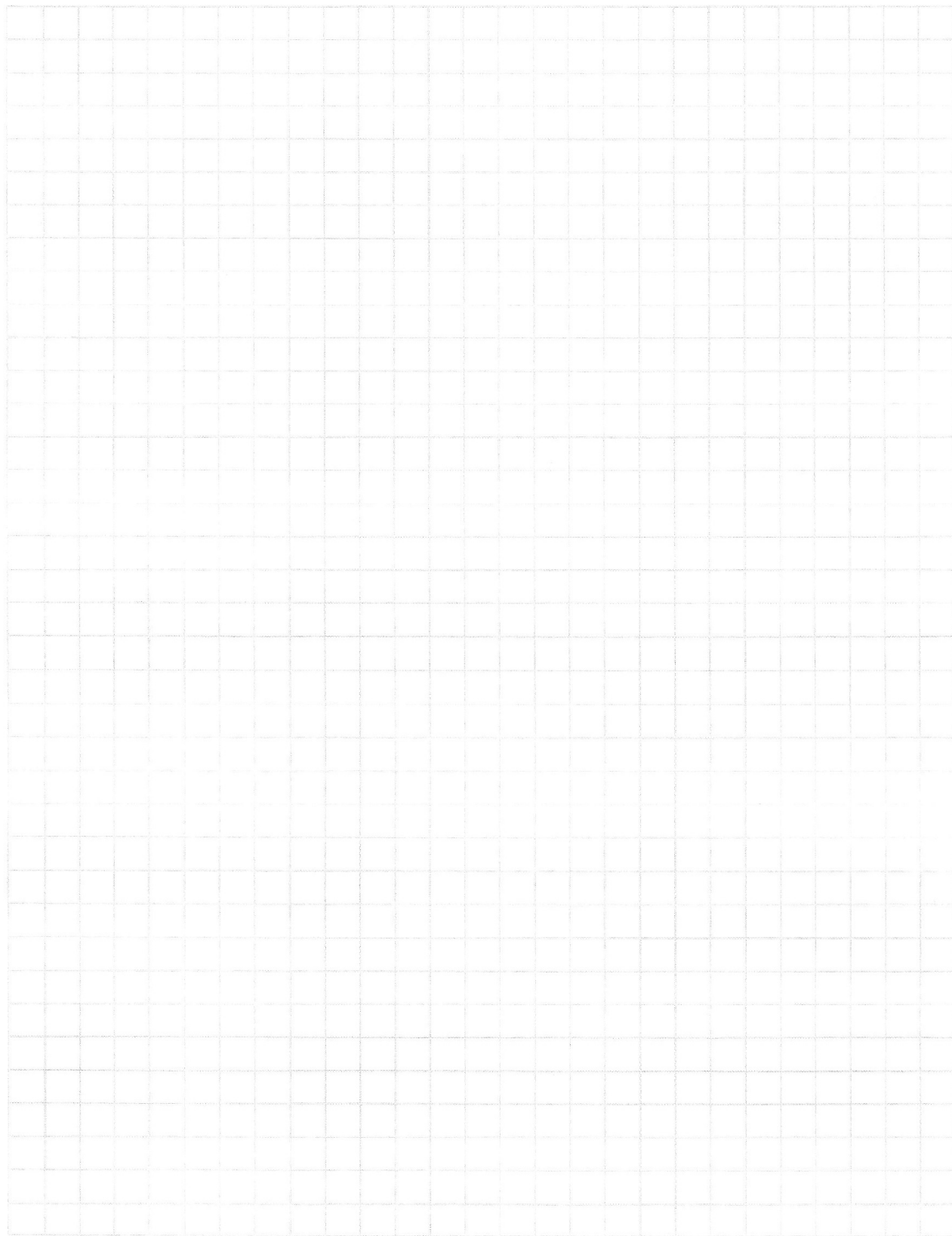


На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!





На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$A = aaaa = 1111a = 101 \cdot 11 \cdot a$$

$$B = \text{---} : 101 \quad \underline{202}$$

$$C = \text{---} : 2 \cdot 11 = 22b$$

$$\begin{array}{r} 1111 \overline{) 11} \\ - 11 \\ \hline 011 \end{array} \quad 101 \overline{) 43} \times 4 \quad 43 \cdot$$

$$\begin{array}{r} \underline{aaa} \quad r \\ 101 \quad 303 \\ 202 \quad 404 \end{array}$$

$$101^2 \cdot 11^3 \cdot 2 \cdot 22b \cdot a = \underline{ab}$$

$$a=1 \quad b=4, b=9$$

$$a=2 \quad b=2, b=8$$

$$a=3$$

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{2}{xy} = \frac{1}{x+1} + \frac{1}{y-1} + \frac{2}{(x+1)(y-1)}$$

$$\frac{1}{x(x+1)} + \frac{y-1-y}{y(y-1)} + 2 \frac{(x+1)(y-1) - xy}{xy(x+1)(y-1)} = 0$$

$$\frac{1}{x(x+1)} + \frac{1}{y(y-1)} + 2 \cdot \frac{-x+y-1}{xy(x+1)(y-1)} = 0 \quad x^3 - y^3 - 3xy$$

$$y(y-1) - x(x+1) + 2(-x+y-1) = 0$$

$$y^2 - y - x^2 - x + 2y - 2x - 2 = 0$$

$$y^2 + y = x^2 + 3x + 2 \quad (x-y)(x^2 + xy + y^2)$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7
☐ ☐ ☐ ☐ ☐ ☐ ☐

СТРАНИЦА
 _ ИЗ _

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{2}{xy} = \frac{1}{x-1} + \frac{1}{y+1} + \frac{2}{(x-1)(y+1)}$$

$$\frac{x-1+x}{x(x-1)} + \frac{y+1-y}{y(y+1)} + 2 \left(\frac{(x-1)(y+1)-xy}{xy(x-1)(y+1)} \right) = 0$$

$$\cancel{\frac{1}{x(x-1)}} - \frac{1}{x(x-1)} + \frac{1}{y(y+1)} + 2 \cdot \frac{x-y-1}{xy(x-1)(y+1)} = 0$$

$$-(y+1)y + x(x-1) + 2(x-y-1) = 0$$

$$-y^2 - y + x^2 - x + 2x - 2y - 2 = 0$$

$$-y^2 + x^2 - 3y + x - 2 = 0$$

$$x^2 - 2y - 2 = y^2 - x + 4$$

$$x^2 - 3y = y^2 - x + 2$$

$$(x-y)(x-y)$$

$$M = y^2x - x^2 + 2x - y^3 = y^2(x-y) - (x^2 - 2x + 1) + 1 =$$

$$= (x-y)(y^2 - x + y) + 1 = (x-y)(x^2 - 2y - 2) + 1$$

$$x^2 - y^2 + x - y = 2y + 2$$

$$(x-y)(x+y+1) = 2(y+1)$$

$$x^2 + x - y^2 - 3y - 2 = 0$$

$$D = 1 + 4y^2 + 12y + 8 = 2^2y^2 + 2 \cdot 3 \cdot 2y + 3^2 =$$

$$x = \frac{-1 \pm (2y+3)}{2} = \begin{cases} \frac{2y+4}{2} = y+2 \\ \frac{-2y-2}{2} = -y-1 \end{cases}$$

$$(x+y+1)(x-y-2) = 0$$

$$x = -y-1 \mid x = y+2$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$(x+y)^3 = x^3 + 3x^2y + 3xy^2 + y^3$$

$$-(y+1)^3 = -(y^3 + 3y^2 + 3y + 1)$$

$$-y^3 - 3y^2 - 3y - 1 = -y^3 + 3(y+1)y$$

$$-(y^3 + 6y^2 + 12y + 8) - y^3 + 3y^2 + 6y = -$$

$$x^2 + y^2 = 25$$

$$(3\sqrt{2} \sin 2)^2 + (3\sqrt{2} \cos 2)^2 =$$

$$= 18$$

$$x \leq 3\sqrt{2} \cos 2$$

$$y \leq$$

$$-(y+2) > 0$$

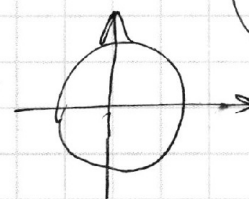
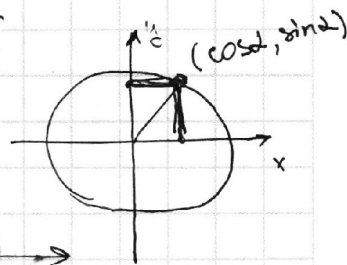
$$y < -2$$

$$2 \sin \frac{\pi x + \pi y}{2} \cos \frac{\pi x - \pi y}{2} \sin \pi x =$$

$$= 2 \cos \frac{\pi x + \pi y}{2} \cos \frac{\pi x - \pi y}{2} \cos \pi x$$

$$\Rightarrow \cos \frac{\pi}{2} \frac{x-y}{2} = 0$$

$$\arcsin 2 - \arcsin 1 \leq \frac{\pi}{2}$$

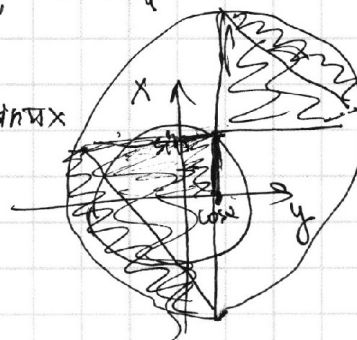


$$\frac{\pi}{2} - \arcsin \frac{y}{4}$$

$$\sin^2 \pi x - \cos^2 \pi x = \cos \pi y \cos \pi x - \sin \pi y \sin \pi x$$

$$- \cos 2\pi x = \cos \pi(y+x)$$

$$\Leftrightarrow \cos \frac{\pi(y+3x)}{2} \cos \frac{\pi(y-x)}{2} = 0$$



$$\frac{\pi(y+3x)}{2} = \frac{\pi}{2} + \pi k$$

$$-1 < \frac{x}{5} < 1 \quad \frac{y}{4} < 1$$

$$y + 3x = 2\pi k$$

$$-5 < x < 5 \quad | \quad -4 < y < 4$$

$$y - x = 2\pi k$$

$$-19 \leq y + 3x \leq 4 + 15 = 19$$

$$\begin{array}{r} 6 \times 315 \\ \times 6 \\ \hline 1890 \end{array}$$

$$2\pi < 4$$

$$4\pi < 12$$

$$6\pi < 18,9$$

