



МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ



11 КЛАСС. Вариант 4

- [3 балла] Найдите все тройки натуральных чисел $(A; B; C)$ такие, что:
 - A — четырёхзначное число, составленное из одинаковых цифр,
 - B — трёхзначное число, хотя бы одна из цифр которого равна 7,
 - C — двузначное число, хотя бы одна из цифр которого равна 1,
 - произведение $A \cdot B \cdot C$ является квадратом некоторого натурального числа.
- [3 балла] Положительные числа x и y таковы, что значение выражения $K = \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{3}{xy}$ не изменяется, если x уменьшить на 4, а y — увеличить на 4. Найдите все возможные значения выражения $M = x^3 - y^3 - 12xy$.
- [5 баллов] а) Найдите все пары действительных чисел $(x; y)$ такие, что $(\sin \pi y - \sin \pi x) \sin \pi y = (\cos \pi y + \cos \pi x) \cos \pi y$.
б) Сколько пар целых чисел (x, y) удовлетворяют одновременно этому уравнению и неравенству
$$\arccos \frac{x}{7} - \arcsin \frac{y}{4} > -\frac{\pi}{2}?$$
- [4 балла] В начале месяца было выделено 4 билета на праздничный концерт, которые планировалось случайным образом распределить между одиннадцатиклассниками. В конце месяца выяснилось, что будет выделено больше 4 билетов. Одиннадцатиклассники Петя и Вася вычислили, что вероятность им обоим вместе попасть на концерт в начале месяца была в 11 раз меньше, чем оказалась в конце месяца. Сколько всего было выделено билетов на концерт в конце месяца, если количество одиннадцатиклассников не изменилось?
- [5 баллов] Точка O — центр окружности ω_1 , описанной около остроугольного треугольника ABC . Окружность ω_2 , описанная около треугольника BOC , пересекает отрезок AB в точке P . Найдите площадь треугольника ABC , если $AP = 16$, $BP = 8$, $AC = 22$.
- [6 баллов] На координатной плоскости изображена фигура $\Phi(\alpha)$, состоящая из всех точек, координаты $(x; y)$ которых удовлетворяют системе неравенств
$$\begin{cases} (x + 4 \sin \alpha)(y - 4 \cos \alpha) \leq 0, \\ x^2 + y^2 \leq 36. \end{cases}$$

Найдите максимальное значение M периметра (длины границы) фигуры $\Phi(\alpha)$ и укажите все значения α , при которых оно достигается.

- [6 баллов] Шар Ω касается всех рёбер правильной усечённой пирамиды, а шар ω касается всех её граней. Найдите угол наклона боковой грани пирамиды к плоскости её основания.



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении **каждой** задачи **отдельно**.

- | | | | | | | |
|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

СТРАНИЦА
1 из 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач **нумеруются отдельно**. Порча QR-кода недопустима!

Заметим, что $A = 101 \cdot 11 \cdot a$, где a -какое-то однозначное число. 101 -простое. Если $A \cdot B \cdot C$ -квадрат, то каждый простой множитель числа имеет чётное кол-во раз.

$$\Rightarrow A \cdot B \cdot C : 11^2 \cdot a \neq 101 \text{ (т.к. оно однозначное)}$$

$$\Rightarrow B : 101 \text{ или } C : 101. C \neq 101, \text{ т.к. } C \text{ однозначное}$$

$\Rightarrow B : 101$. Тогда B имеет вид $\overline{x0x}$, где x -какое-то цифра. Из условия, чтобы одна цифра $B - 7$

$$\Rightarrow x = 7 \Rightarrow B = 7 \cdot 101. A : 11, B \neq 11, A \cdot B \cdot C - \text{квадрат} \Rightarrow A \cdot B \cdot C : 11^2 \Rightarrow C : 11, C - \text{однозначное}$$

$$\Rightarrow C = \underline{\overline{yy}}, \text{ где } y - \text{цифра, но } y \neq 1 \text{ (чтобы одна цифра} - 1 \Rightarrow y = 1 \Rightarrow C = 11. \text{ Тогда:}$$

$$A = 101 \cdot 11 \cdot 9$$

$$B = 7 \cdot 101$$

$$C = 11$$

$$\Rightarrow A \cdot B \cdot C = 101^2 \cdot 11^2 \cdot 7 \cdot a,$$

где a -однозначное нечетное число и $A \cdot B \cdot C$ -квадрат.

$$\text{Тогда } a = 7 \Rightarrow A, B, C = 101 \cdot 11 \cdot 7, 7 \cdot 101, 11$$

\Rightarrow Ответ: такая тройка есть: $(7777, 707, 11)$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

- | | | | | | | |
|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

СТРАНИЦА
1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{3}{xy} = \frac{1}{x-4} + \frac{1}{y+4} + \frac{3}{(x-4)(y+4)} \Leftrightarrow$$

$$\frac{x+y+3}{xy} = \frac{x+y+3}{(x-4)(y+4)} \quad \text{Можно подобрать}$$

() $x+y+3 \neq 0$, т.к. $x > 0, y > 0 \Rightarrow x+y+3 > 0 \Rightarrow$
 $xy = (x-4)(y+4) \Leftrightarrow$

$$xy = xy + 4x - 4y - 16 \Leftrightarrow 4x - 4y - 16 = 0 \Leftrightarrow x - y - 4 = 0 \Rightarrow$$

$y = x - 4$. Но при этом можно заметить, что k при этом не изменится только 1 раз, т.к. $x+y+3 = \text{const}$
 ~~$\forall (x-4) = (x-4)x$, и $(x-4)x \neq \begin{cases} (x-8)(x+4) \\ (x-12)(x+8) \end{cases}$~~
~~то значит, $\exists k = 0$~~

$$M = x^3 - (x-4)^3 - 12x(x-4) = x^3 - (x^3 - 12x^2 + 48x - 64) - 12x^2 + 48x = x^3 - x^3 + 12x^2 - 48x + 64 - 12x^2 + 48x = 64 \Rightarrow$$

только
 M может принимать значение 64
 (так, это принимает, если, например, $x=8, y=4$)

Отв: $M=64$.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

СТРАНИЦА
1 из 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач **нумеруются отдельно**. Порча QR-кода недопустима!

$$a) (\sin \pi y - \sin \pi x) \sin \pi y = (\cos \pi y + \cos \pi x) \cos \pi y \Leftrightarrow$$

$$\cancel{\sin \frac{\pi(y-x)}{2} \cos \frac{\pi(y+x)}{2}} \sin \pi y = \cancel{\cos \frac{\pi(y+x)}{2} \cos \frac{\pi(y-x)}{2}} \cos \pi y$$

1 способ $\cos \frac{\pi(y+x)}{2} = 0 \Leftrightarrow \frac{\pi(y+x)}{2} = \frac{\pi}{2} + \pi k$ (здесь и
дальше $k \in \mathbb{Z}$) $\Leftrightarrow x+y = 1+2k \Leftrightarrow x+y = \text{какое-то}$
нечётное число}.

2 способ $\sin \frac{\pi(y-x)}{2} \sin \pi y = \cos \frac{\pi(y+x)}{2} \cos \pi y \Leftrightarrow$
 $\Leftrightarrow \cos \left(\frac{\pi(y-x)}{2} + \pi y \right) = 0 \Leftrightarrow$

$$\frac{\pi(y-x)}{2} + \pi y = \frac{\pi}{2} + \pi k \Leftrightarrow y-x+2y = 1+2k$$

$$\Leftrightarrow 3y - x = 1+2k \Leftrightarrow \underline{3y - x = \text{какое-то нечётное число.}}$$

б) $\arccos \frac{x}{7} - \arcsin \frac{y}{4} > -\frac{\pi}{2}$

Минимальное значение аркосинуса = 0, а
максимально арксинуса = $\frac{\pi}{2} \Rightarrow$

$\arccos \frac{x}{7} - \arcsin \frac{y}{4} \geq 0 - \frac{\pi}{2} = -\frac{\pi}{2}$, при этом
равенство достигается $\Leftrightarrow \arccos \frac{x}{7} = 0$

$$\arcsin \frac{y}{4} = \frac{\pi}{2}$$

Тогда $\frac{x}{7} = 1, \frac{y}{4} = 1 \Rightarrow x = 7, y = 4$. При этом
эти числа удобны. а), т.к. $x+y = 7+4 = 11$ - нечетное

и $3y - x = 12 - 7 = 5$ - нечетное. \Rightarrow такая пара

беско огра

На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

- | | | | | | | |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

СТРАНИЦА
1 из 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Рассмотрим вероятность в начале месяца.
Всего одиннадцати классиков k . Тогда распределить все билеты можно C_k^4 способами. Если и Петя, и Вася получили билет, то тогда нужно оставшиеся 2 билета распределить между оставшимися $k-2$ учениками, таких способов C_{k-2}^2 .
Тогда вероятность равна:

$$\frac{C_{k-2}^2}{C_k^4} = \frac{(k-2)! \cdot 4! \cdot (k-4)!}{2! \cdot (k-4)! \cdot k!} = \frac{3 \cdot 4}{k \cdot (k-1)}$$

Теперь рассмотрим вероятность в конце месяца. 3 билетов стало тишук. Тогда аналогично тому, как мы считали вероятность в начале месяца, в конце месяца вероятность будет

$$\frac{C_{k-2}^{m-2}}{C_k^m} = \frac{(k-2)! \cdot m! \cdot (k-m)!}{(m-2)! \cdot (k-m)! \cdot k!} = \frac{(m-1)m}{(k-1) \cdot k}$$

Из условия первая вероятность в 11 раз меньше, чем вторая. Тогда:

$$\frac{3 \cdot 4 \cdot 11}{k \cdot (k-1)} = \frac{m(m-1)}{k(k-1)} \Rightarrow 3 \cdot 4 \cdot 11 = m(m-1)$$

Корними данного уравнения являются 12 и -11,

крайне билетов в конце больше 4 $\Rightarrow m=12$

Ответ: 12.



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

- 1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
2 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. **Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно.** Порча QR-кода недопустима!

$$S_{PBC} = \frac{h \cdot PB}{2} = \frac{33\sqrt{15} \cdot 8}{8 \cdot 2} = \frac{33\sqrt{15}}{2}$$

$$S_{ABC} = S_{APC} + S_{PBC} = 33\sqrt{15} + \frac{33\sqrt{15}}{2} = \frac{99\sqrt{15}}{2}$$

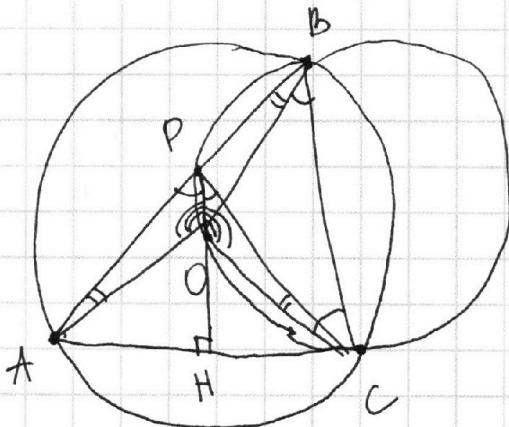


На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и **суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно**.

1	2	3	4	5	6	7
---	---	---	---	---	---	---

СТРАНИЦА
1 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



$OB = OC$, как радиусы \Rightarrow
 $\Rightarrow \triangle OBC - \text{р.с.} \Rightarrow \angle OBC = \angle OCB$
 $= \alpha$. $\angle OBC = \angle OBC = \alpha$, как опир.
 на одну сторону (окружн. o_2)
 и 3 вписанных углы такие же
 $\angle OCB = \angle APO = \alpha$.

$$\begin{aligned} \text{Since } \omega_2 < OCP = \angle OBP, OB = OA \Rightarrow \\ \angle AOB - \mu/\delta &\Rightarrow \angle A + \angle B = \angle OBP = \angle OCP. \text{ Then } \angle AOP = \\ &= 180^\circ - \angle OAP - \angle APO = 180^\circ - OCP - \angle OPC = \angle COP, \Rightarrow \end{aligned}$$

$\triangle AOP \cong \triangle COP$ по II признаку $\Rightarrow AP = PC = 16, \Rightarrow$
 $\angle APC - \pi/3 \Rightarrow PO$ не только бис., но и биссектриса
 прямого PO пересекает AC в точке H , т.к. $\angle PHA = \pi/3$

$$S_{APC} = \frac{PM \cdot AC}{2} = \frac{3\sqrt{157} \cdot 22}{2} = 33\sqrt{157}.$$

По т.косинусов $\angle A \Rightarrow APC$: ~~$AC^2 = AP^2 + PC^2 -$~~

$$-2 \cdot AP \cdot PC \cos 2\alpha \Leftrightarrow 484 = 512 - 512 \cos 2\alpha \Leftrightarrow \cos 2\alpha = \frac{28}{512} =$$

$= \frac{7}{128}$. Тогда $2x$ -основа.] h -ширина высоты

$\triangle PBC$, онын $\angle 3$ биримескин C . Толг $h = PC \cdot \sin \angle 2$

$$= \frac{16 \cdot \sqrt{128^2 - 7^2}}{128} = \frac{16 \cdot 33\sqrt{15}}{128} = \frac{33\sqrt{15}}{8}$$

На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

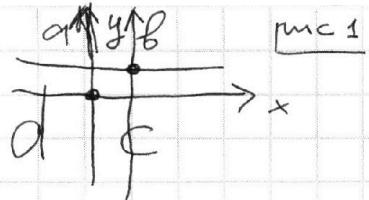


- | | | | | | | |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|
| <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|

СТРАНИЦА
1 из 3

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\begin{cases} ① (x + 4 \sin \alpha)(y - 4 \cos \alpha) \leq 0 \\ ② x^2 + y^2 \leq 36 \end{cases}$$



Рассмотрим ②. Это круг с радиусом 6 и центром в начале координат.

Теперь рассмотрим ①.

Если провести $x = -4 \sin \alpha$ и $y = 4 \cos \alpha$, то

плоскость разделяется на

4 части: а, б, в, г (См. рис. 1)

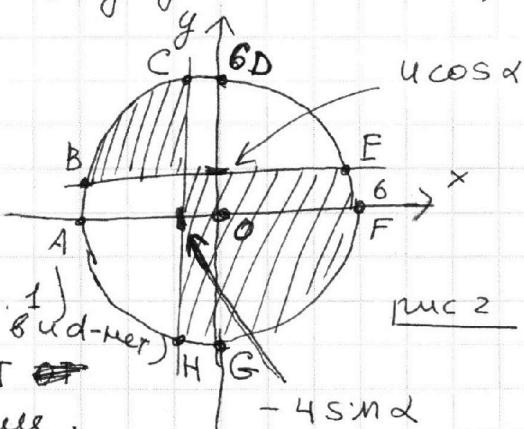
(а и в содержат уравнения, а в и г нет)

б часть а ① принимает ~~ненулевое значение~~ ненулевое значение.

в части б ① принимает ~~ненулевое значение~~ ненулевое значение

г части в ① принимает ненулевое значение.

В части д ① принимает ненулевое значение.



Значит нам подходят только части а и в.

Итого $\Phi(\alpha) \rightarrow$ это зона трех. Фигура на рис. 2.

Заметим, что $\cap AB = \cap EF$ (из симметрии), а также $\cap CD = \cap HG$ (аналогично) $\Rightarrow \cap HE +$
 $+ \cap BC = \cap AD + \cap GF = \cancel{\pi R^2} - \frac{\pi R^2}{2} = 6\pi$.

Тогда $M = 6\pi + CH + BE$

$$] \sin \alpha = a \Rightarrow a \in [-1; 1]$$

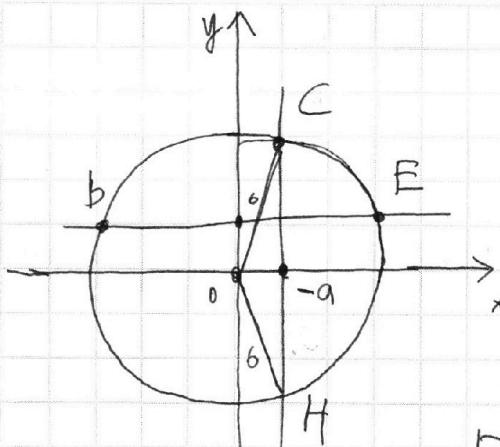


На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

- | | | | | | | |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|
| <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|

СТРАНИЦА
2 ИЗ 3

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



$$CH = 2\sqrt{36 - 16a^2} \text{ (по т. Пифагора).}$$

$$\cos \alpha = \pm \sqrt{1-a^2}. \text{ Тогда по т. Пифагора}$$

$$BE = 2\sqrt{36 - 16(1-a^2)} = \\ = 2\sqrt{20 + 16a^2}.$$

$$\text{Рассмотрим функцию } f(a) = \\ = 2\sqrt{36 - 16a^2} + 2\sqrt{20 + 16a^2} = CH + BE.$$

$M = f(a) + 6\pi$. Нужно найти максимальное значение $M \Rightarrow$ нужно найти максимальное значение $f(a)$. Для этого найдём производную $f'(a)$:

$$f'(a) = 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{-32a}{\sqrt{36-16a^2}} + 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{32a}{\sqrt{20+16a^2}} = \\ = -\frac{32a}{\sqrt{36-16a^2}} + \frac{32a}{\sqrt{20+16a^2}}. \text{ Тогда } f'(a) = 0 \Leftrightarrow$$

$$\frac{32a}{\sqrt{36-16a^2}} = \frac{32a}{\sqrt{20+16a^2}}. \text{ при } a=0 \text{ подходит. Теперь} \\ \text{рассмотрим } a \neq 0. \text{ Тогда } \cancel{32a} + 36 - 16a^2 = \\ = 20 + 16a^2 \Leftrightarrow 16 = 32a^2 \Leftrightarrow a = \pm \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

$$\text{т.е. } f'(a) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} a = 0 \\ a = \pm \frac{\sqrt{2}}{2} \end{cases}$$

$$\text{Если } a = \pm 1, \text{ то } f(a) = 2\sqrt{20} + 2\sqrt{36}.$$

$$\text{Если } a = \pm \frac{\sqrt{2}}{2}, \text{ то } f(a) = 2\sqrt{28} + 2\sqrt{28}.$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

 1 2 3 4 5 6 7СТРАНИЦА
3 ИЗ 3

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Если $a = 0$, то $f(a) = 2\sqrt{36} + 2\sqrt{28}$.

Заметим, что $2\sqrt{20} + 2\sqrt{36} < 2\sqrt{28} + 2\sqrt{28} \Leftrightarrow$

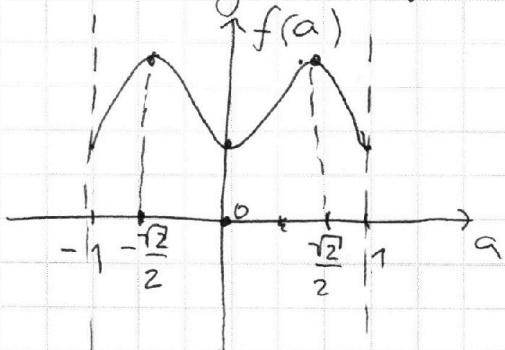
$$\Leftrightarrow 20 + 36 + 2\sqrt{20 \cdot 36} < 4 \cdot 28 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2\sqrt{20 \cdot 36} < 56 \Leftrightarrow 4 \cdot 20 \cdot 36 < 56 \cdot 56$$

$$\Leftrightarrow 4 \cdot 5 \cdot 9 < \cancel{28} \cdot \cancel{28} 14 \cdot 14 \Leftrightarrow 5 \cdot 9 < 7^2$$

$\Leftrightarrow 45 < 49$. Тогда наша функция $f(a)$

формирует так:

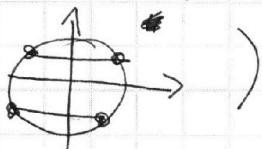


Тогда $f(a) \leq 2\sqrt{28}$, и при этом $f(a) = 2\sqrt{28} \Leftrightarrow a = \pm \frac{\sqrt{2}}{2}$.

Это значит, что $M \leq$

$$\leq 6\pi + 2\sqrt{28} \quad (\text{равенство} \Leftrightarrow a = \pm \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow)$$

$$\alpha = \frac{\pi k}{4}, k \in \mathbb{Z}$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

1

2

3

4

5

6

7

СТРАНИЦА
_ ИЗ _



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач **нумеруются отдельно**. Порча QR-кода недопустима!

$$(\sin \pi y - \sin \pi x) \sin \pi y = (\cos \pi y + \cos \pi x) \cos \pi y$$

$$\cancel{\sin \frac{\pi(y-x)}{2} \cos \frac{\pi(x+y)}{2}} \sin \pi y = \cancel{\cos \frac{\pi(y+x)}{2} \cos \frac{\pi(y-x)}{2}} \cos \pi y$$

$$\textcircled{1} \quad \cos \frac{\pi(x+y)}{2} = 0$$

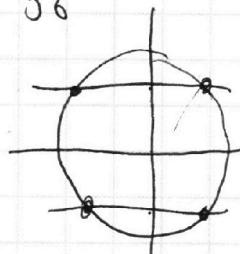
$$\frac{\pi(x+y)}{2} = \frac{\pi}{2} + \cancel{\pi k}, k \in \mathbb{Z}$$

$$\begin{array}{r} x^2 \\ \cancel{y} \\ \hline 112 \\ - 56 \\ \hline 56 \end{array}$$

$$\frac{x+y}{2} = \frac{1}{2} + k$$

$$\sin x = \pm \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$x+y = 1+2k$$



$$\textcircled{2} \quad \sin \frac{\pi(y-x)}{2} \sin \pi y = \cos \frac{\pi(y-x)}{2} \cos \pi y$$

$$\cos \frac{\pi(y-x)}{2} \cos \pi y - \sin \frac{\pi(y-x)}{2} \sin \pi y = 0$$

$$2\sqrt{20} + 2\sqrt{36} \quad \cos \left(\frac{\pi(y-x)}{2} + \pi y \right) = 0$$

$$2\sqrt{28} + 2\sqrt{28} \quad \frac{\pi(y-x)}{2} + \pi y = \frac{\pi}{2} + \pi k$$

$$\begin{array}{r} 16335 \\ 1815 \\ 363 \\ 121 \\ \hline 3^2 \\ 5 \\ 3 \\ 11^2 \end{array}$$

$$\sqrt{20} + \sqrt{36} \quad \sqrt{2-28}$$

$$20+36+2\sqrt{20}\cdot\sqrt{36} \quad \sqrt{4\cdot28}$$

~~7~~

$$56 + 2\sqrt{20\cdot36} \quad \sqrt{112}$$

$$2\sqrt{20\cdot36} \quad \sqrt{56}$$

$$\sqrt{20\cdot36} \quad \sqrt{28}$$

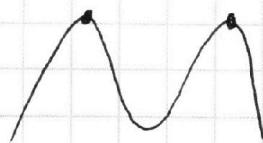
$$\frac{y-x}{2} + y = \frac{1}{2} + k$$

$$y-x+2y=1+2k$$

$$3y-x=1+2k$$

$$\begin{array}{r} 20 \\ 36 \\ \hline 5 \end{array} \quad \begin{array}{r} 9 \\ 28 \\ \hline 7 \end{array} \quad \begin{array}{r} 7 \\ 28 \\ \hline 7 \end{array}$$

$$45 \quad \sqrt{49}$$





На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

- | | | | | | | |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|
| <input type="checkbox"/> 1 | <input type="checkbox"/> 2 | <input type="checkbox"/> 3 | <input type="checkbox"/> 4 | <input type="checkbox"/> 5 | <input type="checkbox"/> 6 | <input type="checkbox"/> 7 |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|

СТРАНИЦА
ИЗ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по **каждой из задач** **нумеруются отдельно**. Порча QR-кода недопустима!

$$\begin{array}{r|l} 1 & 1 \\ 1 & 1 \\ \hline 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{array}$$

$$2222 = 2 \cdot 11 \cdot 101$$

$$3333 = 3 \cdot 11 \cdot 101$$

$$A = 11 \cdot 101 \cdot P$$

$$B = 707 = 7 \cdot 101$$

$$\begin{array}{r} 101 \\ - 7 \\ \hline 3 \\ - 7 \\ \hline 0 \end{array}$$

$$101$$

$$202$$

$$303$$

$$404$$

$$505$$

$$606$$

$$707$$

$$C : 11$$

$$\Rightarrow C : 11$$

$$\textcircled{1} \quad 11 \cdot 101 \cdot 1$$

$$7 \cdot 101$$

$$C : 11 \quad C : 7 \Rightarrow C : 77$$

$$\textcircled{2} \quad 11 \cdot 101 \cdot 2$$

$$7 \cdot 101$$

$$C : 11 \quad C : 2 \quad C : 7$$

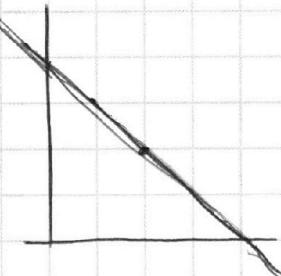
$$C : 2 \cdot 7 \cdot 11 =$$

$$\textcircled{3} \quad 11 \cdot 101 \cdot 3$$

$$7 \cdot 101$$

$$C$$

$$K = \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{3}{xy}$$



$$x^3 - y^3 - 12xy$$

$$x(x^2 - 6y) - y(y^2 + 6x)$$

$$x^3 - 12xy - y^3$$

$$\cancel{y} \quad \cancel{-12xy}$$

$$(x-y)(x^2 + xy + y^2) -$$

$$-12xy$$

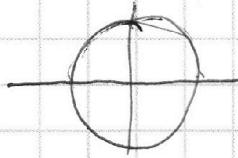


На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

 1 2 3 4 5 6 7СТРАНИЦА
_ ИЗ _

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по **каждой из задач** нумеруются **отдельно**. Порча QR-кода недопустима!

$$\arccos \frac{x}{7} - \arcsin \frac{y}{4} > -\frac{\pi}{2}$$

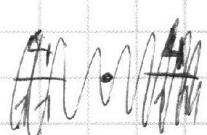
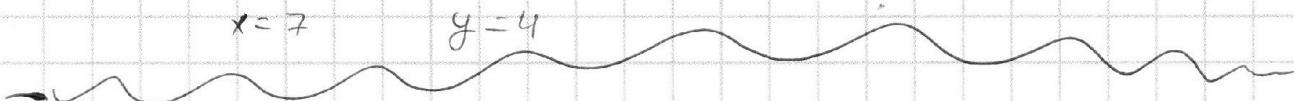


$$\frac{x}{7} = 1$$

$$\frac{y}{4} = 1$$

$$x = 7$$

$$y = 4$$



$$\frac{C_9^2}{C_{11}^4} = \frac{9! \cdot 4! \cdot 7!}{2! \cdot 7! \cdot 11!} = \frac{3 \cdot 4^2}{5 \cdot 10 \cdot 11} =$$

$$= \frac{6}{55}$$

$$\frac{C_9^{k-2} \cdot 11 \cdot 5}{C_{11}^k \cdot 6} = 11 \cdot \frac{C_9^{k-2}}{C_{11}^k} = \frac{6}{5}$$

$$\frac{2 \cdot 11 \cdot 3}{11 \cdot 10 \cdot 5} = \frac{6}{55}$$

$$\frac{C_{k-2}^2}{C_k^4} = \frac{(k-2) \cdot 1 \cdot 4 \cdot (k-4)!}{2 \cdot (k-4)! \cdot k \cdot (k-1) \cdot k}$$

$$\frac{4 \cdot 3 \cdot 11}{k \cdot (k-1)} = \frac{m(m-1)}{k(k-1)}$$

$$m \cdot (m-1) = 4 \cdot 3 \cdot 11 \Rightarrow m = 12$$

$$m^2 - m - 3 \cdot 4 \cdot 11 = 0$$

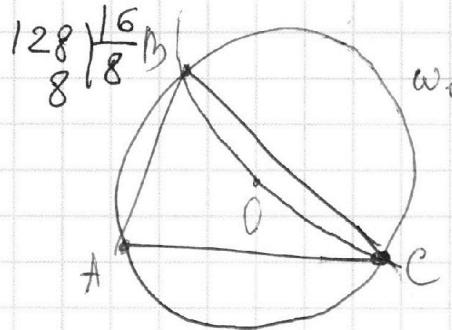
$$12 \quad u - 11$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

- | | | | | | | |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|
| <input type="checkbox"/> 1 | <input type="checkbox"/> 2 | <input type="checkbox"/> 3 | <input type="checkbox"/> 4 | <input type="checkbox"/> 5 | <input type="checkbox"/> 6 | <input type="checkbox"/> 7 |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|

СТРАНИЦА
_ ИЗ _

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач **нумеруются отдельно**. Порча QR-кода недопустима!



$$16 \cdot 22 = x^\circ \cdot 22$$

$$x = \frac{16 \cdot 12}{11}$$

$$484 = 512 - 512 \cos 22$$

$$\begin{array}{r} x \\ \times 22 \\ \hline 44 \\ \hline 22 \\ \hline 44 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} -512 \\ 484 \\ \hline 28 \end{array}$$

$$12 + 16 = 28$$

$$\begin{array}{r} 28 \\ \times 14 \\ \hline 512 \\ 256 \\ \hline 128 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 16335 \\ 3267 \\ 363 \\ 121 \\ \hline 52 \\ 11^2 \end{array}$$

$$\sqrt{1 - \frac{49}{128^2}} =$$

$$\begin{array}{r} x \\ \times 16 \\ \hline 96 \\ \hline 16 \\ \hline 256 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} x \\ \times 128 \\ \hline 128 \\ \hline 4 \end{array}$$

$$2^{14} = 1024 \cdot 16$$

$$256 - 121 = \begin{array}{r} 135 \\ 135 \\ \hline 3^2 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 84 \\ -49 \\ \hline 35 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 1024 \\ 16384 \\ \hline 16384 \end{array}$$

$$AC = 22$$

$$16384 - 49 = 16335$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1

2

3

4

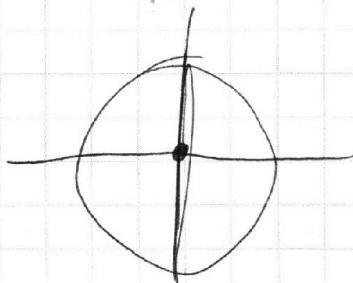
5

6

СТРАНИЦА
_ ИЗ _

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7
~~1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7~~
V | V | V | V | V | V | -





На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

- | | | | | | | |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| <input type="checkbox"/> |

СТРАНИЦА
ИЗ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{3}{xy}$$

$$M = x^3 - y^3 - 12xy$$

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{3}{xy} = \frac{1}{x-4} + \frac{1}{y+4} + \frac{3}{(x-4)(y+4)}$$

$$\frac{x+y+3}{xy} = \frac{x+y+3}{(x-4)(y+4)}$$

$$(x-4)^3 - y^3 - 12(x-4) \\ x^3 - (x-4)^3 - 12x(x-4)$$

$$xy = (x-4)(y+4)$$

$$xy = xy + 4x - 4y - 16$$

$$4x - 4y - 16 = 0$$

$$x - y = 4$$

$$y = x - 4$$

x

$$y = x - 4$$

$$(x-4)(x-y)(x-y)$$

$$(-3-y)^3 - y^3 - 12(-3-y)y \\ -(y^3 + 9y^2 + 27y + 27) - y^3 + 36y + 12y^2 \\ -y^3 - 9y^2 - 27y + 27 - y^3 + 36y + 12y^2 \\ -2y^3$$

$$x(x-4) = x(x-4)$$

$$x = -3 - y$$

$$y = -x - 4$$

На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

- | | | | | | | |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|
| <input type="checkbox"/> 1 | <input type="checkbox"/> 2 | <input type="checkbox"/> 3 | <input type="checkbox"/> 4 | <input type="checkbox"/> 5 | <input type="checkbox"/> 6 | <input type="checkbox"/> 7 |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|

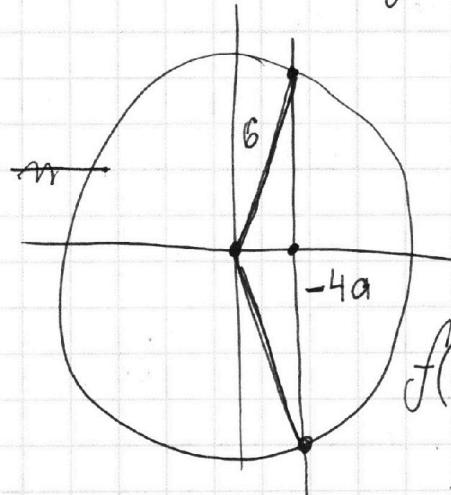
СТРАНИЦА
ИЗ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\begin{cases} (x + 4 \sin \alpha)(y - 4 \cos \alpha) \leq 0 \\ x^2 + y^2 \leq 36 \quad r=6 \end{cases} \quad (0; 0) \quad \text{если } a=0, \quad \text{то } M = 6\pi + 24$$

$$(x + 4 \sin \alpha)(y - 4 \cos \alpha) \leq 0$$

$$|x + 4 \cdot a| \cdot |y - 4 \cdot \sqrt{1-a^2}| \leq$$



$$2\sqrt{36-16a^2}$$

$$2\sqrt{36-16(1-a^2)} = 2\sqrt{20+16a^2}$$

$$36-16+16a^2$$

$$f(a) = 2(36-16a^2)^{\frac{1}{2}} + 2(20+16a^2)^{\frac{1}{2}}$$

$$f'(a) = \cancel{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1 \cdot (-32a)}{\sqrt{36-16a^2}} +$$

~~$$\frac{-32a}{\sqrt{20}} + \frac{32a}{\sqrt{36}} = 0$$~~

$$+ 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{32a}{\sqrt{20+16a^2}} = 0$$

$$\frac{a}{\sqrt{36-16a^2}} = \frac{a}{\sqrt{20+16a^2}}$$

$$36-16a^2 = 20+16a^2$$

$$16 = 32a^2$$

$$\frac{1}{2} = a^2 \quad a = \frac{\pm\sqrt{2}}{2}$$

