МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

11 КЛАСС. Вариант 3

1. [3 балла] Найдите все тройки натуральных чисел $(A; B; C)$ такие, что:
   - A — четырёхзначное число, составленное из одинаковых цифр,
   - B — трёхзначное число, хотя бы одна из цифр которого равна 6,
   - C — двузначное число, хотя бы одна из цифр которого равна 3,
   - произведение $A \cdot B \cdot C$ является квадратом некоторого натурального числа.

2. [3 балла] Положительные числа x и y таковы, что значение выражения $K = \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{5}{xy}$ не изменяется, если x уменьшить на 2, а y — увеличить на 2. Найдите все возможные значения выражения $M = x^3 - y^3 - 6xy$.

3. [5 баллов] а) Найдите все пары действительных чисел $(x; y)$ такие, что $(\sin \pi x + \sin \pi y) \sin \pi x = (\cos \pi x - \cos \pi y) \cos \pi x$.

   б) Сколько пар целых чисел (x, y) удовлетворяют одновременно этому уравнению и неравенству
$$\arcsin \frac{x}{6} + \arcsin \frac{y}{2} < \pi?$$

4. [4 балла] В начале месяца было выделено 4 билета на праздничный концерт, которые планировалось случайным образом распределить между одиннадцатиклассниками. В конце месяца выяснилось, что будет выделено больше 4 билетов. Одиннадцатиклассники Петя и Вася вычислили, что вероятность им обоим вместе попасть на концерт в начале месяца была в 6 раз меньше, чем оказалась в конце месяца. Сколько всего было выделено билетов на концерт в конце месяца, если количество одиннадцатиклассников не изменилось?

5. [5 баллов] Точка O — центр окружности ω_1, описанной около остроугольного треугольника ABC. Окружность ω_2, описанная около треугольника BOC, пересекает отрезок AB в точке P. Найдите площадь треугольника ABC, если $AP = 25$, $BP = 5$, $AC = 35$.

6. [6 баллов] На координатной плоскости изображена фигура $\Phi(\alpha)$, состоящая из всех точек, координаты $(x; y)$ которых удовлетворяют системе неравенств
$$\begin{cases} \left(x + 5\sqrt{2}\cos\alpha\right)\left(y + 5\sqrt{2}\sin\alpha\right) \leqslant 0, \\ x^2 + y^2 \leqslant 169. \end{cases}$$
   Найдите максимальное значение M периметра (длины границы) фигуры $\Phi(\alpha)$ и укажите все значения α, при которых оно достигается.

7. [6 баллов] Шар Ω касается всех рёбер правильной усечённой пирамиды, а шар ω касается всех её граней. Пусть сторона верхнего основания меньше, чем сторона нижнего. Найдите отношение площади верхнего основания пирамиды к площади её боковой поверхности.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

1	2	3	4	5	6	7
☒	☐	☐	☐	☐	☐	☐

СТРАНИЦА 1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. **Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно.** Порча QR-кода недопустима!

Задача 1

Ответ: $(2222; 606; 33)$; $(8888; 606; 33)$

Пусть $A = \overline{aaaa} = a \cdot 1111$, где a - некая цифра. Заметим, что $1111 = 11 \cdot 101$, где 11 и 101 – простые числа. По условию, $A \cdot B \cdot C$ является квадратом. Поскольку $A \vdots 101$, их произведение тоже кратно 101, а, поскольку их произведение – точный квадрат, их произведение должно делиться на 101^2. Поскольку $a < 101$, $11 < 101$ и $C < 101$ (т.к. a – цифра, а C – двузначное число) на 101 обязано делиться B. Среди всех трехзначных чисел, кратных 101, только 606 имеет в записи цифру 6 (среди $101, 202, 303, 404, 505, 606, 707, 808, 909$ 6 содержит только 6), B обязано равняться 606.

Поскольку 11 – простое, $A \cdot B \cdot C$, кратное 11 (т.к. $A \vdots 11$), которое является точным квадратом, обязано делиться на 11^2. Поскольку 101 не делится на 11, $a < 11$, $B = 606$ не делится на 11, на 11 обязано делиться число C. Среди двузначных чисел, кратных 11, в своей записи цифру 3 имеет только 33 (среди $11, 22, 33, 44, 55, 66, 77, 88, 99$ цифру 3 содержит только 33), тогда C обязано быть равным 33. Тогда:

$$A \cdot B \cdot C = a \cdot 1111 \cdot 606 \cdot 33 = a \cdot 101 \cdot 11 \cdot 6 \cdot 3 \cdot 11 = a \cdot \underline{11^2 \cdot 101^2 \cdot 3^2} \cdot 2,$$

а, поскольку $A \cdot B \cdot C$ является точным квадратом, таковым должно быть и $2a$.

С учетом того, что a – цифра, причем ненулевая, получаем

$$\left.\begin{aligned}
&2 \cdot 1 = 2 \text{ – не квадрат}\\
&\underline{2 \cdot 2 = 4 = 2^2 \text{ – квадрат}}\\
&2 \cdot 3 = 6 \text{ – не квадрат}\\
&2 \cdot 4 = 8 \text{ – не квадрат}\\
&2 \cdot 5 = 10 \text{ – не квадрат}\\
&2 \cdot 6 = 12 \text{ – не квадрат}\\
&2 \cdot 7 = 14 \text{ – не квадрат}\\
&\underline{2 \cdot 8 = 16 = 4^2 \text{ – квадрат}}\\
&2 \cdot 9 = 18 \text{ – не квадрат}
\end{aligned}\right\} \Rightarrow a = 2 \text{ или } a = 8$$

Тогда либо $A = 2222, B = 606, C = 33$, либо $A = 8888, B = 606, C = 33$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

1 ☐ 2 ☒ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА 1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. **Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно.** Порча QR-кода недопустима!

Задача 2

Ответ: $M=8$

$K=\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{5}{xy}=\frac{y+x+5}{xy}$. По условию, если x уменьшить на 2, а y увеличить на 2, ~~к~~ значение K не изменится $\Rightarrow \frac{(x-2)+(y+2)+5}{(x-2)(y+2)}=\frac{x+y+5}{xy}\Rightarrow$
$\frac{x+y+5}{xy-2y+2x-4}=\frac{x+y+5}{xy}\Rightarrow xy=xy-2y+2x-4\Rightarrow \underline{x-y-2=0}$

Для любых a,b,c верно, что $a^3+b^3+c^3-3abc=(a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-ac-bc)$, тогда при $a=x$, $b=-y$, $c=-2$ получаем:

$$x^3-y^3-8-3x(-y)(-2)=\underline{(x-y-2)}(x^2+y^2+4+xy+2x-2y)=0$$

$$\underbrace{x^3-y^3-6xy}_{M}-8=0\Rightarrow M-8=0\Rightarrow M=8$$ (это значение достигается при $x=3$ и $y=1$: для них $3-1-2=0$ и $3^3-1^3-6\cdot3\cdot1=27-1-18=8$)

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☒ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА 1 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. **Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно.** Порча QR-кода недопустима!

Задача 3

~~Ответ: а)~~

а) Ответ: все x и y, такие, что $x+y=2k, k\in\mathbb{Z}$ или $3x-y=2l, l\in\mathbb{Z}$

$(\sin\pi x+\sin\pi y)\sin\pi x=(\cos\pi x-\cos\pi y)\cos\pi x$ $\cdot\sin\pi x$

$2\cdot\sin\frac{\pi x+\pi y}{2}\cdot\cos\frac{\pi x-\pi y}{2}\sqrt{}=-2\cdot\sin\frac{\pi x+\pi y}{2}\sin\frac{\pi x-\pi y}{2}\cos\pi x$

$\sin\frac{\pi x+\pi y}{2}\left(\sin\pi x\cdot\cos\frac{\pi x-\pi y}{2}+\cos\pi x\cdot\sin\frac{\pi x-\pi y}{2}\right)=0$

$\sin\frac{\pi x+\pi y}{2}\cdot\sin\frac{3\pi x-\pi y}{2}=0$

$\left[\begin{array}{l}\frac{\pi x+\pi y}{2}=\pi k\\ \frac{3\pi x-\pi y}{2}=\pi l\\ k,l\in\mathbb{Z}\end{array}\right.\Rightarrow\left[\begin{array}{l}x+y=2k\\ 3x-y=2l\\ k,l\in\mathbb{Z}\end{array}\right.$, итого, либо $x+y=2k$, либо $3x-y=2l$, где k и $l\in\mathbb{Z}$

~~б) $\arcsin\frac{x}{6}+\arcsin\frac{y}{2}<\pi$~~

~~$\arcsin\frac{x}{6}<\pi-\arcsin\frac{y}{2}$ $|\sin(\ldots)$~~

~~$\frac{x}{6}<\sin(\pi-\arcsin\frac{y}{2})=\sin(\arcsin\frac{y}{2})=\frac{y}{2}$~~

~~$\frac{x}{6}<\frac{y}{2}$~~

~~$x<3y$, где $\begin{cases}-1\le\frac{x}{6}\le1\\ -1\le\frac{y}{2}\le1\end{cases}$ при $x,y\in\mathbb{Z}$ $\Leftrightarrow$~~

~~$\begin{cases}-6\le x\le6\\ -2\le y\le2\end{cases}$. Для $y=2$ таких x равно 12 (все от -6 до 5)~~

~~Для $y=1$ таких x равно 9 (все от -6 до 2)~~

~~Для $y=0$ таких x равно 6 (все от -6 до -1)~~

~~Для $y=-1$ таких x равно 3 (все от -6 до -4)~~

~~Для $y=-2$ $x<-6$ — таких x при ограничениях нет~~

~~Итого, всего пар $12+9+6+3=30$~~

~~б) Ответ: 30 пар~~

См. сл. лист

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☒ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА 2 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. **Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно.** Порча QR-кода недопустима!

Задача 3

б) Ответ: 32

Заметим, что $\arcsin\frac{x}{6} \le \frac{\pi}{2}$ по определению и $\arcsin\frac{y}{2} \le \frac{\pi}{2}$, тогда их сумма всегда не больше π, причем $-1 \le \frac{x}{6} \le 1$ и $-1 \le \frac{y}{2} \le 1$

Равенство достигается при $\frac{x}{6} = 1$ и $\frac{y}{2} = 1$, т.е $x=6$ и $y=2$.

Посчитаем кол-во пар $(x;y)$, таких, что x и y – целые, $x \in [-6;6]$ и $y \in [-2;2]$ и либо их сумма четна, либо $3x-y$ четно. Заметим, что $3x-y \underset{2}{\equiv} x+y \Rightarrow$ достаточно найти кол-во пар, таких, что $x+y$ – четно. Это возможно, если x и y одной четности

на $[-6;6]$ 7 четных чисел и 6 нечетных, а на $[-2;2]$ – 3 четных и 2 нечетных. Тогда кол-во пар равно

$7 \cdot 3 + 6 \cdot 2 = 21 + 12 = 33$,

Тогда ответ в задаче – это 32, т.е. кол-во таких пар при исключенной паре $(6;2)$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☒ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА 1 ИЗ 3

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. **Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно.** Порча QR-кода недопустима!

Задача 4

Ответ: в конце месяцев билетов хотя бы 11 (т.е. любое число, не меньшее 11)

Пусть в ~~классе~~ всего было n одиннадцатиклассников, ~~тогда~~ а потом, дополнительно к 4 билетам, добавили k билетов. Найдем вероятность того, что Пете и Васе оба получат билет.

В начале месяца кол-во способов распределить 4 билета по n людям равно C_n^4, а кол-во способов распределить 2 билета Пете и Васе, а остальные 2 билета другим, равно C_n^2.

~~В~~ Тогда $p_0 = \frac{C_n^2}{C_n^4}$ (p_0 – вероятность в начале месяца получить по билету и Пете, и Васе).

В конце месяца кол-во способов $4+k$ билетов распределить между школьниками равно C_n^{k+4}, а кол-во способов так их распределить, что 2 билета достанутся Пете и Васе (т.е. остальные $2+k$ билетов распределены как-нибудь) равно C_n^{k+2},

тогда $p = \frac{C_n^{k+2}}{C_n^{k+4}}$ (p – вероятность в ~~начале~~ конце месяца получить по билету и Пете, и Васе)

По условию $6p_0 = p$, тогда

$$6 \cdot \frac{C_n^2}{C_n^4} = \frac{C_n^{k+2}}{C_n^{k+4}} \Rightarrow 6 \cdot \frac{\frac{n!}{2!(n-2)!}}{\frac{n!}{4!(n-4)!}} = \frac{\frac{n!}{(k+2)!(n-k-2)!}}{\frac{n!}{(k+4)!(n-k-4)!}} \Rightarrow$$

$$6 \cdot \frac{4!}{2!} \cdot \frac{(n-4)!}{(n-2)!} = \frac{(k+4)!}{(k+2)!} \cdot \frac{(n-k-4)!}{(n-k-2)!}$$

$$\frac{6 \cdot 3 \cdot 4}{(n-3)(n-2)} = \frac{(k+3)(k+4)}{(n-k-3)(n-k-2)}$$

$$\frac{72}{(n-3)(n-2)} = \frac{(k+3)(k+4)}{(n-k-3)(n-k-2)} \rightarrow$$ т.е. справа – возрастающая функция

Заметим, что ~~в числителях и знаменателях~~ при увеличении k числитель правой части растет, а знаменатель – уменьшается. При $k=5$ $(k+3)(k+4) = 8 \cdot 9 = 72$, а знаменатель меньше $(n-3)(n-2)$, т.е. при $k \geq 5$ правая часть больше левой, тогда $k=1$, $k=2$, $k=3$ или $k=4$

См. сл. стр.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно.**

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☒ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА 2 ИЗ 3

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. **Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно.** Порча QR-кода недопустима!

Задача 4

При $k=1$: $\frac{72}{(n-3)(n-2)} = \frac{20}{(n-4)(n-3)} \Rightarrow 72(n-4) = 20(n-2) \Rightarrow$

$52n = 72\cdot 4 - 20\cdot 2 = 288 - 40 = 248 \Rightarrow n = \frac{248}{52} = 4 + \frac{40}{52} \notin \mathbb{Z}$ – невозможно.

$k=2$: $\frac{72}{(n-3)(n-2)} = \frac{30}{(n-5)(n-4)} \Rightarrow 72(n-4)(n-5) = 30(n-2)(n-3) \Rightarrow$

$\Rightarrow 72n^2 - 9\cdot 72n + 72\cdot 20 = 30n^2 - 30\cdot 5n + 30\cdot 6 \Rightarrow$

$42n^2 - (9\cdot 72 - 30\cdot 5)n + 72\cdot 20 - 30\cdot 6 = 0$

$14n^2 - (3\cdot 72 - 10\cdot 5)n + 24\cdot 20 - 10\cdot 6 = 0$ $\quad D = (-47)^2 - 4\cdot 7\cdot 210 <$

$7n^2 - (3\cdot \overset{72+25}{24} - 5\cdot 5)n + \overset{240-30}{24\cdot 10 - 10\cdot 3} = 0$ $\quad < 2500 - 5880 < 0$ – решений нет

$7n^2 - \cancel{9}7n + 210\cancel{n} = 0$

~~$D = (-47)^2 - 210\cdot 7\cdot 4 = 3529,\ 59 < \sqrt{D} < 60 \Rightarrow$ целых решений нет~~

$k=3$: $\frac{72}{(n-2)(n-3)} = \frac{42}{(n-6)(n-5)}$

$12(n-6)(n-5) = 7(n-3)(n-2)$

$12n^2 - 11\cdot 12n + 12\cdot 30 = 7n^2 - 7\cdot 5n + 7\cdot 6$

$5n^2 - (132 - 35)n + 360 - 42 = 0$

$5n^2 - 97n + 318 = 0$

$D = (-97)^2 - 4\cdot 5\cdot 318 = 9409 - 6360 = 3249 = 57^2$

$n_1 = \frac{97+57}{10}$; $n_2 = \frac{97-57}{10} \Rightarrow n_1 = 15{,}4$; $n_2 = 4 \Rightarrow$ при $k=3$ и $n=4$. Заметим, что в этом случае 5 билетов распределили между 4 одиннадцатиклассниками, в этом случае $p=1 \Rightarrow$ $p_0 = \frac{1}{6} \Rightarrow \frac{12}{(n-3)(n-2)} = \frac{1}{6} \Rightarrow 72 = n^2 - 5n + 6 \Rightarrow n^2 - 5n - 66 = 0 \Rightarrow$ $n = 11$ или $n = -6$, но не $4 \Rightarrow$ это не верно.

$k=4$: $\frac{72}{(n-3)(n-2)} = \frac{56}{(n-6)(n-7)}$

$9(n-6)(n-7) = 7(n-3)(n-2)$

$9n^2 - 9\cdot 13n + 9\cdot 56 = 7n^2 - 7\cdot 5n + 42$

$2n^2 - (9\cdot 13 - 5\cdot 7) + 9\cdot 56 - 42 = 0$

$n^2 - 41n + 231 = 0$

$D = (-41)^2 - 4\cdot 231 = 1681 - 924 = 757$; $\quad 27 < \sqrt{D} < 28$ – целых решений нет

см. сл. лист.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☒ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА 3 ИЗ 3

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. **Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно.** Порча QR-кода недопустима!

Задача 4

Итого, если билетов добавили меньше, чем $n-2$, то такого быть не могло $\Rightarrow k \geq n-2$ и $p=1 \Rightarrow p_0 = \frac{1}{6}$

$\frac{12}{(n-3)(n-2)} = \frac{1}{6} \Rightarrow 72 = n^2-5n+6 \Rightarrow n^2-5n-66=0 \Rightarrow \left[\begin{array}{l} n_1=-6 \\ n_2=11 \end{array}\right. \Rightarrow$

$n=11$, тогда k – это любое число, которое хотя бы 9, тогда в конце месяца билетов было хотя бы 11.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

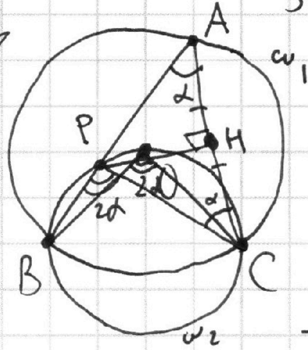
1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☒ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА 1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. **Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно.** Порча QR-кода недопустима!

Задача 5

~~Ответ:~~



Ответ: $S_{\triangle ABC} = \frac{105\sqrt{51}}{2}$

Пусть $\angle A = \alpha$. Поскольку $\triangle ABC$ — остроугольный, O лежит внутри $\triangle ABC$ и $\angle BOC = 2\alpha$ как центральный в ω_1

Точки B, P, O, C лежат на ω_2 $\Rightarrow \angle BPC = \angle BOC = 2\alpha$ как вписанные, опирающиеся на $\overset{\smile}{BC}$, не содержащей O в ω_2. В $\triangle APC$ $\angle BPC$ — внешний $\Rightarrow \angle BPC = \angle PAC + \angle PCA \Rightarrow \angle PCA = \angle BPC - \angle PAC = 2\alpha - \alpha = \alpha \Rightarrow \triangle APC$ — равнобедренный, $AP = PC = 25$. Пусть PH — высота в $\triangle APC$, тогда, поскольку $\triangle APC$ — равнобедренный, H — середина AC, тогда $AH = HC = \frac{AC}{2} = \frac{35}{2}$. Тогда, в $\triangle APH$

$\cos\alpha = \frac{AH}{AP} = \frac{\frac{35}{2}}{25} = \frac{35}{50} = \frac{7}{10} = 0{,}7$. По основному тригонометрическому тождеству $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1 \Rightarrow \sin\alpha = \sqrt{1-\cos^2\alpha}$ (со знаком "+", т.к. α — острый угол) $\Rightarrow \sin\alpha = \sqrt{1-\frac{49}{100}} = \sqrt{\frac{51}{100}} = \frac{\sqrt{51}}{10}$

$S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2}\cdot AB\cdot AC\cdot \sin\alpha = \frac{1}{2}(AP+PB)\cdot AC\cdot\sin\alpha = \frac{1}{2}(25+5)\cdot 35\cdot\frac{\sqrt{51}}{10} =$

$= \frac{1}{2}\cdot 30\cdot 35\cdot\frac{\sqrt{51}}{10} = \frac{105\sqrt{51}}{2}$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☒ 7 ☐

СТРАНИЦА 1 ИЗ 3

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. **Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно.** Порча QR-кода недопустима!

Задача 6

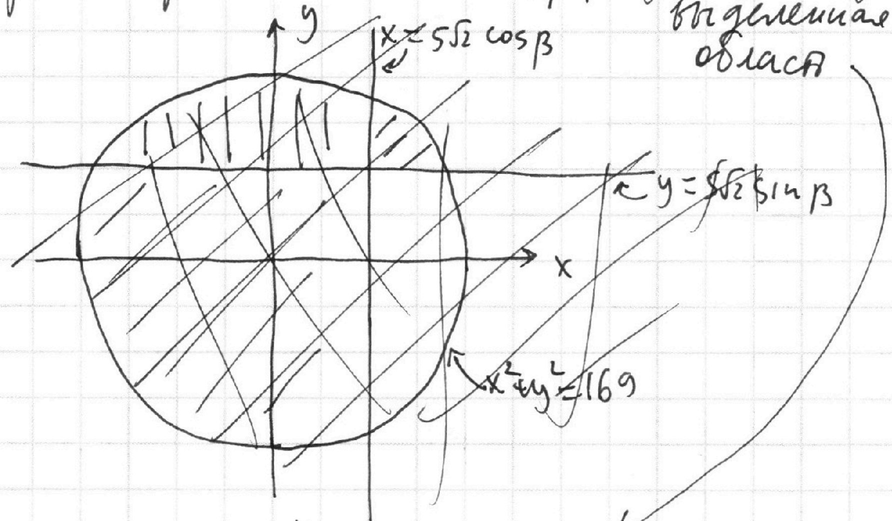
Ответ: $M_{max} = 13\pi + 48$ при $\alpha = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi k}{2}, k \in \mathbb{Z}$ ($\beta = \alpha - \pi$)

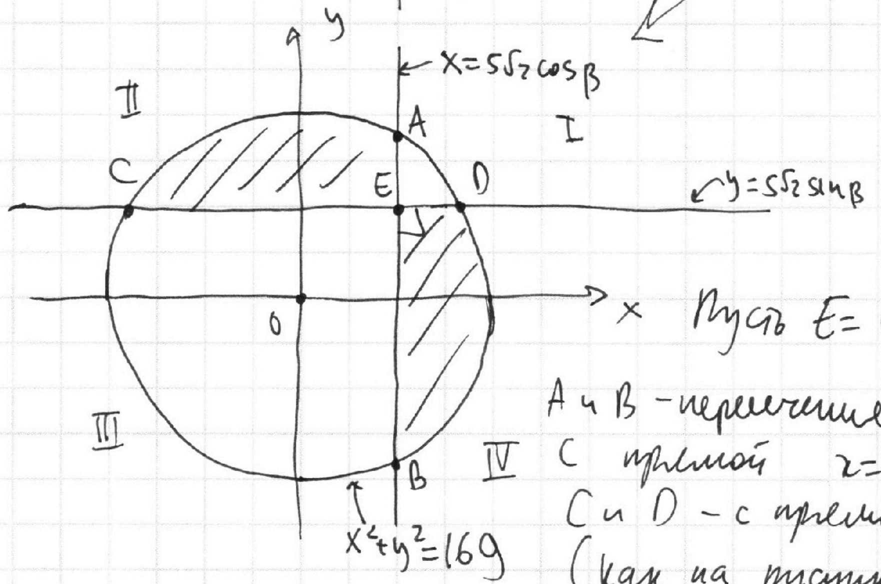
Пусть $\alpha = \beta + \pi$, тогда $\cos\alpha = \cos(\beta+\pi) = -\cos\beta$ и $\sin\alpha = \sin(\beta+\pi) = -\sin\beta$, тогда

$$\begin{cases} (x - 5\sqrt{2}\cos\beta)(y - 5\sqrt{2}\sin\beta) \leq 0 \\ x^2 + y^2 \leq 169 \end{cases}$$

Второе неравенство — это все точки, лежащие внутри окружности с центром $(0;0)$ и радиусом 13.

Правое неравенство — это все точки, которые лежат не ниже прямой $y = 5\sqrt{2}\sin\beta$ и не ~~выше~~ левее $x = 5\sqrt{2}\cos\beta$ или не выше $y = 5\sqrt{2}\sin\beta$ и не правее прямой $x = 5\sqrt{2}\cos\beta$, тогда нам подходит выделенная на графике область





Пусть $E = (5\sqrt{2}\cos\beta, 5\sqrt{2}\sin\beta)$

A и B — пересечение окружности с прямой $x = 5\sqrt{2}\cos\beta$, а C и D — с прямой $y = 5\sqrt{2}\sin\beta$ (как на рисунке)

см. сл. страницу

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☒ 7 ☐

СТРАНИЦА 2 ИЗ 3

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. **Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно.** Порча QR-кода недопустима!

Задача 6

Найдем координаты ~~этих~~ точек:

Для точек A и B верно, что $x=5\sqrt{2}\cos\beta$ и $x^2+y^2=169 \Rightarrow$

$50\cos^2\beta+y^2=169 \Rightarrow y^2=119+\sin^2\beta$ (т.к. $50\cos^2\beta=50-50\sin^2\beta$) $\Rightarrow$

$A=(5\sqrt{2}\cos\beta, \sqrt{119+\sin^2\beta})$ и $B=(5\sqrt{2}\cos\beta; -\sqrt{119+\sin^2\beta})$ (т.к. A в I четверти, а B — в IV)

Аналогично для точек C и D, $y=5\sqrt{2}\sin\beta$, $x^2+y^2=169 \Rightarrow$

$x^2=169-50\sin^2\beta=119+50\cos^2\beta \Rightarrow C=(-\sqrt{119+50\cos^2\beta}; 5\sqrt{2}\sin\beta)$,

а $D=(\sqrt{119+50\cos^2\beta}; 5\sqrt{2}\sin\beta)$ (т.к. C в II четверти, а D в I)

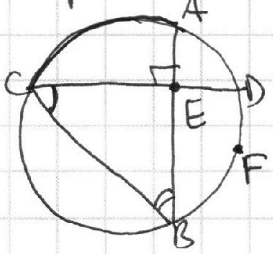
На самом деле точки A, B, C, D могут располагаться по-другому, однако, поскольку окружность симметрична относительно Ox и Oy, мы можем считать, что β находится в I четверти, для остальных β осуществим симметрии относительно Ox и Oy ~~Ф(α)~~ периметр $Ф(\alpha)$ будет неизменным. Более того, при вычислениях считать, что β лежит в I четверти не обязательно.

Найдем длину отрезка AB: их координаты по оси X равны, а по оси Y противоположны $\Rightarrow AB=2\sqrt{119+50\sin^2\beta}$.

Аналогично для CD, их координаты по оси X противоположны, а по оси y — одинаковые $\Rightarrow CD=2\sqrt{119+50\cos^2\beta}$

Периметр M фигуры $Ф(\alpha)$ состоит из отрезков AE, EC, EB, ED и дуг AC и BD, лежащих внутри углов AEC и DEB соответственно.

Мы знаем, что прямые AB и CD перпендикулярны, а радиус окружности фиксирован. Докажем, что сумма дуг AC и BD фиксирована. $\angle ABC+\angle DCB=90^\circ$, т.к $AB \perp CD$. Пусть F такая, что $\breve{AF}=\breve{BD}$,



тогда $\breve{AC}+\breve{BD}=2(\angle ABC+\angle DCB)=180^\circ$ и $\breve{AC}+\breve{BD}=\breve{AC}+\breve{AF}=\breve{CF} \Rightarrow \breve{CF}=180^\circ \Rightarrow CF$ — диаметр, тогда CF — полуокружность, и длина дуги $CF=\pi\cdot 13=13\pi \Rightarrow |\breve{AC}|+|\breve{BD}|=|\breve{CF}|=13\pi$ — величина, не зависящая от угла α или β

см. сл. стр.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☒ 7 ☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. **Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно.** Порча QR-кода недопустима!

~~Тогда M =~~ Задача 6

Тогда:

$M = AE + EB + CE + ED + |\overset{\frown}{AC}| + |\overset{\frown}{BC}| = AB + CD + 13\pi =$

$= 2\sqrt{119+50\sin^2\beta} + 2\sqrt{119+50\cos^2\beta} + 13\pi$. Докажем, что для любых m и $n \geq 0$ $\frac{\sqrt{m}+\sqrt{n}}{2} \leq \sqrt{\frac{m+n}{2}}$. Действительно, возведя в квадрат (что является равносильным переходом при m и $n \geq 0$) получаем $\frac{m+n+2\sqrt{mn}}{4} \leq \frac{m+n}{2} \Rightarrow \frac{2\sqrt{mn}}{4} \leq \frac{m+n}{4} \Rightarrow$

$\Rightarrow 0 \leq \frac{(\sqrt{m}-\sqrt{n})^2}{4}$ — верно для любых m и $n \geq 0$ (равенство при $\sqrt{m}=\sqrt{n}$)

Поскольку $119+50\sin^2\beta \geq 119 > 0$ и $119+50\cos^2\beta \geq 119 > 0$ получаем

$M = 4\left(\frac{\sqrt{119+50\sin^2\beta}+\sqrt{119+50\cos^2\beta}}{2}\right) + 13\pi \leq$

$\leq 4\cdot\sqrt{\frac{119+50\sin^2\beta+119+50\cos^2\beta}{2}} + 13\pi = 4\sqrt{\frac{238+50}{2}} + 13\pi =$

$= 4\sqrt{\frac{288}{2}} + 13\pi = 4\sqrt{144} + 13\pi = 4\cdot 12 + 13\pi = 13\pi + 48$, то есть

$M \leq 13\pi + 48$, причём равенство достигается при

$\sqrt{119+50\sin^2\beta} = \sqrt{119+50\cos^2\beta} \Rightarrow \sin^2\beta = \cos^2\beta$ (после возведения в квадрат, сокращения на 119 и деления на 50) $\Rightarrow$

$\cos^2\beta - \sin^2\beta = 0 \Rightarrow \cos 2\beta = 0 \Rightarrow \cos(2(\alpha - \pi)) = 0 \Rightarrow$

$\cos(2\alpha - 2\pi) = 0 \Rightarrow \cos 2\alpha = 0$

$2\alpha = \frac{\pi}{2} + \pi k, k \in \mathbb{Z}$

$\alpha = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi k}{2}, k \in \mathbb{Z}$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐

СТРАНИЦА __ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. **Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно.** Порча QR-кода недопустима!

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА __ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. **Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно.** Порча QR-кода недопустима!

$n^2 - 97n + 3\cdot 10\cdot 7 = 0$

$9409 - 7\cdot 210\cdot 4$

$\begin{array}{r} 97 \\ \times 97 \\ \hline 679 \end{array}$ $\qquad \begin{array}{r} 9409 \\ -5880 \\ \hline 3529 \end{array}$ $\qquad \begin{array}{r} 840 \\ \times 7 \\ \hline 5880 \end{array}$

$$\sin\pi x + \sin\pi y = \sin\left(\frac{\pi x+\pi y}{2} + \frac{\pi x-\pi y}{2}\right) + \sin\left(\frac{\pi x+\pi y}{2} - \frac{\pi x-\pi y}{2}\right) = 2\sin\left(\frac{\pi x+\pi y}{2}\right)\cos\left(\frac{\pi x-\pi y}{2}\right)$$

$= \sin\cos + \cos\sin + \sin$

$$\cos\pi x - \cos\pi y = \cos\left(\frac{\pi x+\pi y}{2} + \frac{\pi x-\pi y}{2}\right) - \cos\left(\frac{\pi x+\pi y}{2} - \frac{\pi x-\pi y}{2}\right) = -2\sin\frac{\pi x+\pi y}{2}\sin\frac{\pi x-\pi y}{2}$$

$\cos\cos - \sin\sin - \cos\cos -$

$7n^2 - 47n + 210 = 0$ $\quad 3600 -$

$$\sin\frac{\pi x+\pi y}{2}\cos\frac{\pi x-\pi y}{2}\sin\pi x + \sin\frac{\pi x+\pi y}{2}\sin\frac{\pi x-\pi y}{2}\cos\pi x = 0$$

$$\frac{2\pi x + \pi x - \pi y}{2} = \frac{3\pi x - \pi y}{2}$$

$$\sin\frac{\pi x+\pi y}{2}\left(\sin\pi x\cdot\cos\frac{\pi x-\pi y}{2} + \cos\pi x\cdot\sin\frac{\pi x-\pi y}{2}\right) = 0$$

$$\sin\frac{\pi x+\pi y}{2}\sin\left(\frac{3\pi x-\pi y}{2}\right) = 0$$

$$\left[\begin{array}{l} \frac{\pi x+\pi y}{2} = \pi k \\ \frac{3\pi x-\pi y}{2} = \pi l \end{array}\right. \quad k, l \in \mathbb{Z}$$

$$\begin{cases} x+y = 2k \\ 3x-y = 2l \end{cases}$$

$\arcsin\frac{x}{6} + \arcsin\frac{y}{2}$

$-1 \le \frac{x}{6} \le 1$ $\quad -6 \le x \le 6$ $\quad -1 \le \frac{y}{2} \le 1$ $\quad -2 \le y \le 2$

$x + y = 2k$ $\quad x+y=8$

$\arccos\frac{x}{6} + \arccos\frac{y}{2} = 0$

$\arccos\frac{x}{6} + \arcsin\frac{y}{2} < \arccos\frac{x}{6}$

$a + b =$ $\quad 132-35$ $\quad 102-5$ $\quad 100-3$

$\sin(a+b) = \frac{x}{3}$

$$\frac{6C_n^2}{C_n^4} = \frac{C_n^{2+x}}{C_n^{4+x}}$$

$$\frac{2!\cdot(n-2)!}{(2+x)!\cdot(n-2-x)!}$$

$$\frac{\frac{n!}{(2+x)!\cdot(n-2-x)!}}{\frac{n!}{2!\cdot(n-2)!}}$$

$6C_{n-4}^x = C_{n-2}^x$

$6 = \frac{C_{n-2}^x}{C_{n-4}^x}$

$\begin{array}{r} 318 \\ \times 20 \\ \hline 6260 \end{array}$ $\qquad \begin{array}{r} 9409 \\ 6260 \\ \hline 3149 \end{array}$ $\qquad \begin{array}{r} 57 \\ \times 57 \\ \hline 399 \\ 285 \\ \hline 3249 \end{array}$ $\qquad \begin{array}{r} 97 \\ \times 97 \\ \hline 679 \\ 873 \\ \hline 9409 \end{array}$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА __ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. **Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно.** Порча QR-кода недопустима!

$K = \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{5}{xy} = \frac{x+y+5}{xy}$

$x \to x-2$
$y \to x+2$

$K' = \frac{x+y+5}{(x-2)(y+2)}$

$xy = (x-2)(y+2)$

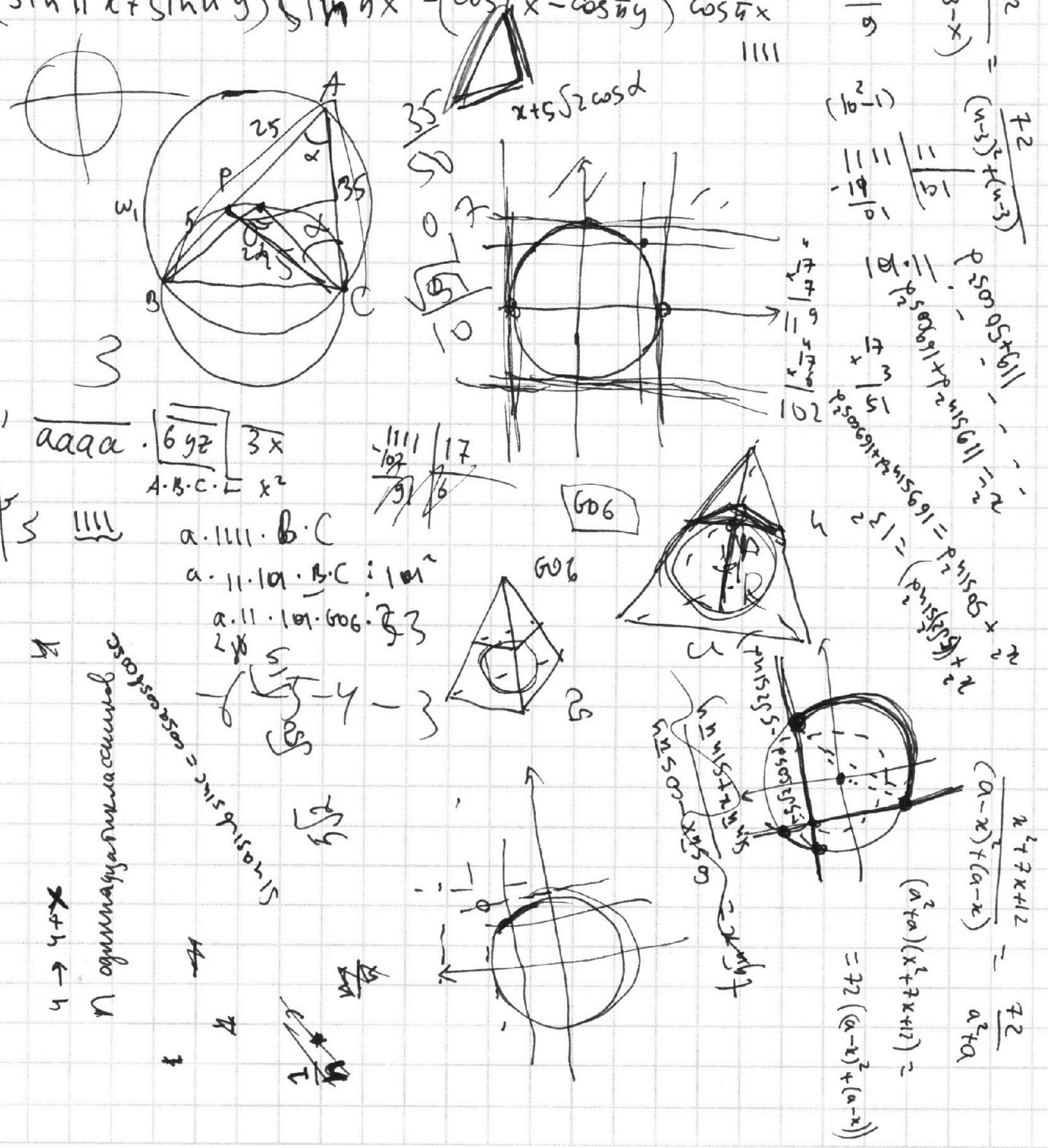
$4 = 2x - 2y$

$2 = x - y$

$\arcsin x \le \frac{\pi}{2}$

$M + 8 = x^3 + (-y)^3 + (-2)^3 - 3 \cdot (-y)(-2) \cdot x = x - y - 2 = 0$

$(\sin \pi x + \sin \pi y) \sin \pi x = (\cos \pi x - \cos \pi y) \cos \pi x$



$\overline{aaaa} \cdot \overline{6yz}$ $\overline{3x}$

$a \cdot 1111 \cdot B \cdot C$

$a \cdot 11 \cdot 101 \cdot B \cdot C$

$a \cdot 11 \cdot 101 \cdot 606$

$\frac{x^2+7x+12}{(a-x)^2+(a-x)} = \frac{72}{a^2+a}$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА __ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. **Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно.** Порча QR-кода недопустима!

$$6\frac{C_n^2}{C_n^4} = \frac{C_n^{2+x}}{C_n^{4+x}}$$

$$72 \cdot \frac{1}{(n-3)(n-2)} = \frac{(x+3)(x+4)}{(n-3-x)(n-2-x)}$$

$$6 \cdot C_{n-4}^{x} = C_{n-2}^{x}$$

$$6C_a^x = C_{a+2}^x$$

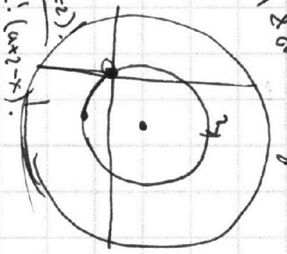
$$6 \cdot \frac{\frac{n!}{2!(n-2)!}}{\frac{n!}{4!(n-4)!}} = 6 \cdot \frac{\frac{n!}{(2+x)!(n-2-x)!}}{\frac{n!}{(4+x)!(n-4-x)!}}$$

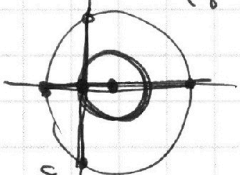
$$6 \cdot \frac{(n-4)!\,4!}{(n-2)!\,2!} = \frac{(4+x)!\,(n-4-x)!}{(2+x)!\,(n-2-x)!}$$

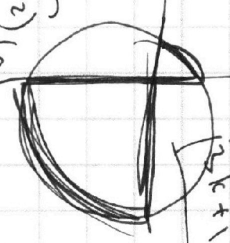
$$4\sqrt{\frac{338+50}{2}} = 4\sqrt{194}$$

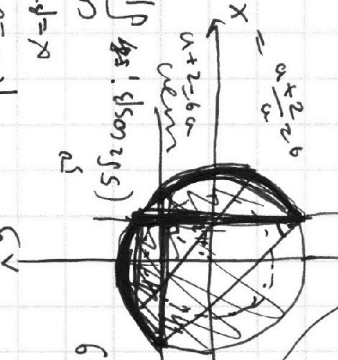
$$119 + 50\sin^2\beta = 4$$

$$169 = 50\cos^2\beta + 4$$









$$\frac{6\,a!}{x!\,(a-x)!} = \frac{(a+2)!}{x!\,(a+2-x)!}$$

$$6 = \frac{(a+1)(a+2)}{(a+2-x)(a+1-x)}$$

$$\frac{t\cdot(t+1)}{(t+x)(t+1-x)} = 6$$

$$x = 2$$

$$\frac{(a+1)(a+2)}{a(a-1)}$$

$$6 = \frac{a^2+3a+2}{a^2-a} = 1 + \frac{4a+2}{a^2-a}$$

$$5 = \frac{4a+2}{a^2-a}$$

$$5a^2-5a = 4a+2$$

$$5a^2-9a-2=0$$

$(a+1)(a+2)$

119 25

144

169

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА __ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. **Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно.** Порча QR-кода недопустима!

$\frac{72}{(n-3)(n-2)}=1$

$6-72=-6$

$72(n-k-3)(n-k-2)=(n-3)(n-2)(k+3)(k+4)$

$n-(k+3) \quad n-(k+2)$

$k^2+7k+12$

$72n^2-72(2k+5)n+72(k+2)(k+3)=(k^2+7k+12)n^2-5(k^2+7k+12)n+6(k^2+7k+12)$

$n^2-5n-66$

$(n-11)(n+6)$

$\frac{72}{(n-3)(n-2)}=4 \quad 64$

$n=11$

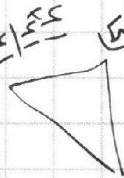
$+\frac{72}{4}$

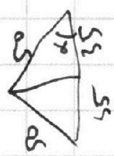
288

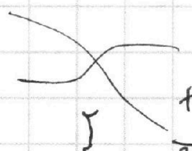
arccos

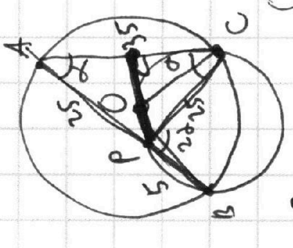
$-\arcsin\frac{5}{2}=\arcsin(-\ldots)$

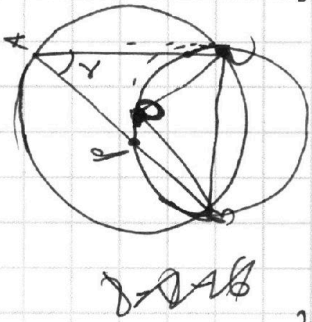
$-\arccos\frac{5}{2}$











$k^2+7k+12=$

140

$x+4=2k$

$5\cdot 6$

27 −1 −18

202

8 − 0 − 0

$\frac{72}{(n-2)(n-3)}=\frac{(k+3)(k+4)}{(n-3-k)(n-2-k)}$