



МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

11 КЛАСС. Вариант 3



1. [3 балла] Найдите все тройки натуральных чисел $(A; B; C)$ такие, что:
 - A — четырёхзначное число, составленное из одинаковых цифр,
 - B — трёхзначное число, хотя бы одна из цифр которого равна 6,
 - C — двузначное число, хотя бы одна из цифр которого равна 3,
 - произведение $A \cdot B \cdot C$ является квадратом некоторого натурального числа.
2. [3 балла] Положительные числа x и y таковы, что значение выражения $K = \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{5}{xy}$ не изменяется, если x уменьшить на 2, а y — увеличить на 2. Найдите все возможные значения выражения $M = x^3 - y^3 - 6xy$.
3. [5 баллов] а) Найдите все пары действительных чисел $(x; y)$ такие, что $(\sin \pi x + \sin \pi y) \sin \pi x = (\cos \pi x - \cos \pi y) \cos \pi x$.
б) Сколько пар целых чисел (x, y) удовлетворяют одновременно этому уравнению и неравенству

$$\arcsin \frac{x}{6} + \arcsin \frac{y}{2} < \pi?$$

4. [4 балла] В начале месяца было выделено 4 билета на праздничный концерт, которые планировалось случайным образом распределить между одиннадцатиклассниками. В конце месяца выяснилось, что будет выделено больше 4 билетов. Одиннадцатиклассники Петя и Вася вычислили, что вероятность им обоим вместе попасть на концерт в начале месяца была в 6 раз меньше, чем оказалась в конце месяца. Сколько всего было выделено билетов на концерт в конце месяца, если количество одиннадцатиклассников не изменилось?
5. [5 баллов] Точка O — центр окружности ω_1 , описанной около остроугольного треугольника ABC . Окружность ω_2 , описанная около треугольника BOC , пересекает отрезок AB в точке P . Найдите площадь треугольника ABC , если $AP = 25$, $BP = 5$, $AC = 35$.
6. [6 баллов] На координатной плоскости изображена фигура $\Phi(\alpha)$, состоящая из всех точек, координаты $(x; y)$ которых удовлетворяют системе неравенств

$$\begin{cases} (x + 5\sqrt{2} \cos \alpha) (y + 5\sqrt{2} \sin \alpha) \leq 0, \\ x^2 + y^2 \leq 169. \end{cases}$$

Найдите максимальное значение M периметра (длины границы) фигуры $\Phi(\alpha)$ и укажите все значения α , при которых оно достигается.

7. [6 баллов] Шар Ω касается всех рёбер правильной усечённой пирамиды, а шар ω касается всех её граней. Пусть сторона верхнего основания меньше, чем сторона нижнего. Найдите отношение площади верхнего основания пирамиды к площади её боковой поверхности.



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.



СТРАНИЦА

1 из 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Задача 1

Ответ: $(2222; 606; 33); (8888; 606; 33)$

Пусть $A = \overline{aaaa} = a \cdot 1111$, где a — некая цифра. Заметим, что $1111 = 11 \cdot 101$, где 11 и 101 — простые числа. По условию, $A \cdot B \cdot C$ является квадратом. Поскольку $A : 101$, их произведение тоже кратно 101 , а, поскольку их произведение — точный квадрат, их произведение должно делиться на 101^2 . Поскольку $a < 101$, $11 < 101$ и $C < 101$ (т.к. a — цифра, а C — двузначное число), на 101 обязано делиться B . Среди всех трехзначных чисел, кратных 101 , только 606 имеет в записи цифру 6 (среди $101, 202, 303, 404, 505, 606, 707, 808, 909$ 6 содержит только 6), B обязано равняться 606 .

Поскольку 11 — простое, $A \cdot B \cdot C$, кратное 11 (т.к. $A : 11$), которое является точным квадратом, обязано делиться на 11^2 . Поскольку 101 не делится на 11 , $a < 11$, $B = 606$ не делится на 11 , на 11 обязано делиться число C . Среди двузначных чисел, кратных 11 , в своей записи цифру 3 имеет только 33 (среди $11, 22, 33, 44, 55, 66, 77, 88, 99$ цифру 3 содержит только 33), тогда C обязано быть равным 33 . Тогда:

$$A \cdot B \cdot C = a \cdot 1111 \cdot 606 \cdot 33 = a \cdot 101 \cdot 11 \cdot 6 \cdot 3 \cdot 11 = a \cdot 11^2 \cdot 101^2 \cdot 3^2 \cdot 2, \text{ а,}$$

поскольку $A \cdot B \cdot C$ является точным квадратом, $2a$ должно быть и $2a$.

С учетом того, что a — цифра, можем перебрать, получаем

$$2 \cdot 1 = 2 \text{ — не квадрат}$$

$$2 \cdot 2 = 4 = 2^2 \text{ — квадрат}$$

$$2 \cdot 3 = 6 \text{ — не квадрат}$$

$$2 \cdot 4 = 8 \text{ — не квадрат}$$

$$2 \cdot 5 = 10 \text{ — не квадрат}$$

$$2 \cdot 6 = 12 \text{ — не квадрат}$$

$$2 \cdot 7 = 14 \text{ — не квадрат}$$

$$2 \cdot 8 = 16 = 4^2 \text{ — квадрат}$$

$$2 \cdot 9 = 18 \text{ — не квадрат}$$

$$\Rightarrow a = 2 \text{ или } a = 8$$

Тогда либо $A = 2222, B = 606, C = 33$,
либо $A = 8888, B = 606, C = 33$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении **каждой задачи отдельно**.

1	2	3	4	5	6	7
☐	☒	☐	☐	☐	☐	☐

СТРАНИЦА
1 из 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Ответ: $M=8$

Задача 2

$K = \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{5}{xy} = y + \frac{x+5}{xy}$. По условию, если x уменьшится на 2, а y увеличится на 2, значение K не изменится $\Rightarrow \frac{(x-2)+(y+2)+5}{(x-2)(y+2)} = \frac{x+y+5}{xy} \Rightarrow$
 $\frac{x+y+5}{xy-2y+2x-4} = \frac{x+y+5}{xy} \Rightarrow xy = xy-2y+2x-4 \Rightarrow x-y-2=0$

Для любых a, b, c верно, что $a^3+b^3+c^3-3abc = (a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-ac-bc)$, тогда при $a=x, b=-y, c=-2$ получаем:

$$x^3-y^3-8-3x(-y)(-2) = (x-y-2)(x^2+y^2+4+xy+2x-2y) = 0$$

$$\underbrace{x^3-y^3-6xy-8}_M = 0 \Rightarrow M-8=0 \Rightarrow M=8 \quad (\text{это значение}$$

достигается при $x=3$ и $y=1$: где $3-1-2=0$ и $3^3-1^3-6 \cdot 3 \cdot 1 = 27-1-18=8$)



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☒ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА

1 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Задача 3

а) Ответ: все x и y , такие, что $x+y=2k, k \in \mathbb{Z}$ или $3x-y=2l, l \in \mathbb{Z}$

$$(\sin \pi x + \sin \pi y) \sin \pi x = (\cos \pi x - \cos \pi y) \cos \pi x$$

$$2 \cdot \sin \frac{\pi x + \pi y}{2} \cdot \cos \frac{\pi x - \pi y}{2} = -2 \cdot \sin \frac{\pi x + \pi y}{2} \sin \frac{\pi x - \pi y}{2} \cos \pi x$$

$$\sin \frac{\pi x + \pi y}{2} \left(\sin \pi x \cdot \cos \frac{\pi x - \pi y}{2} + \cos \pi x \cdot \sin \frac{\pi x - \pi y}{2} \right) = 0$$

$$\sin \frac{\pi x + \pi y}{2} \cdot \sin \frac{3\pi x - \pi y}{2} = 0$$

$$\begin{cases} \frac{\pi x + \pi y}{2} = \pi k \\ \frac{3\pi x - \pi y}{2} = \pi l \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x + y = 2k \\ 3x - y = 2l \end{cases} \quad \text{итого, либо } x + y = 2k, \text{ либо } 3x - y = 2l, \text{ где } k, l \in \mathbb{Z}$$

б) $\arcsin \frac{x}{6} + \arcsin \frac{y}{2} < \pi$

$$\arcsin \frac{x}{6} < \pi - \arcsin \frac{y}{2} \quad | \sin(\dots)$$

$$\frac{x}{6} < \sin(\pi - \arcsin \frac{y}{2}) = \sin(\arcsin \frac{y}{2}) = \frac{y}{2}$$

$$\frac{x}{6} < \frac{y}{2} \quad \begin{cases} -1 \leq \frac{x}{6} \leq 1 \\ -1 \leq \frac{y}{2} \leq 1 \end{cases} \quad \text{при } x, y \in \mathbb{Z} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} -6 \leq x \leq 6 \\ -2 \leq y \leq 2 \end{cases} \quad \begin{array}{ll} \text{Для } y=2 \text{ таких } x & \text{ровно } 12 \text{ (все от } -6 \text{ до } 5) \\ \text{Для } y=1 \text{ таких } x & \text{ровно } 9 \text{ (все от } -6 \text{ до } 2) \\ \text{Для } y=0 \text{ таких } x & \text{ровно } 6 \text{ (все от } -6 \text{ до } -1) \\ \text{Для } y=-1 \text{ таких } x & \text{ровно } 3 \text{ (все от } -6 \text{ до } -4) \\ \text{Для } y=-2 & x < -6 \text{ — таких } x \text{ нет} \end{array}$$

Итого, всего пар $12 + 9 + 6 + 3 = 30$

в) Ответ: 30 пар

см. см. см.



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7
☐ ☐ ☒ ☐ ☐ ☐ ☐

СТРАНИЦА
2 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Задача 3

б) Ответ: 32

Заметим, что $\arcsin \frac{x}{6} \leq \frac{\pi}{2}$ по определению и

$\arcsin \frac{y}{2} \leq \frac{\pi}{2}$, тогда их сумма всегда не больше π , причем $-1 \leq \frac{x}{6} \leq 1$ и $-1 \leq \frac{y}{2} \leq 1$

Равенство достигается при $\frac{x}{6} = 1$ и $\frac{y}{2} = 1$, т.е. $x=6$ и $y=2$.

Подсчитаем кол-во пар (x, y) , таких, что x и y — целые,
 $x \in [-6; 6]$ и $y \in [-2; 2]$ и либо их сумма четна, либо

$3x-y$ кратно 2. Заметим, что $3x-y \equiv x+y \pmod{2} \Rightarrow$ достаточно
найти кол-во пар, таких, что $x+y$ — четно. Это возможно,
если x и y одной четности

на $[-6; 6]$ 7 четных чисел и 6 нечетных, а на
 $[-2; 2]$ — 3 четных и 2 нечетных. Тогда кол-во пар равно

$$7 \cdot 3 + 6 \cdot 2 = 21 + 12 = 33,$$

Тогда ответ в задаче — это 32, т.е. кол-во таких пар
при исключении пары $(6; 2)$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☒ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА

1 ИЗ 3

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Задача 4
Ответ: в конце месяцев билетов хотя бы 11 (т.е. любое число, не меньше) 11

Пусть в классе всего было n одиннадцатиклассников, тогда а Петю, дополнительно к 4 билетом, добавили к билетом. Найдем вероятность того, что Петя и Вася оба получат билет. В начале месяца кол-во способов распределить 4 билета по n людям равно C_n^4 , а кол-во способов распределить 2 билета Петю и Васю, а остальные 2 билета другим, равно C_n^2 . Тогда $P_0 = \frac{C_n^2}{C_n^4}$ (P_0 - вероятность в начале месяца получить по билету и Петю, и Васю).

В конце месяца кол-во способов $4+k$ билетов распределить между учащимися равно C_n^{k+4} , а кол-во способов так их распределить, что 2 билета достанутся Петю и Васю (т.е. остальные $2+k$ билетов распределены как-нибудь) равно C_n^{k+2} . Тогда $P = \frac{C_n^{k+2}}{C_n^{k+4}}$ (P - вероятность в конце месяца получить по билету и Петю, и Васю).

По условию $6P_0 = P$, тогда

$$6 \cdot \frac{C_n^2}{C_n^4} = \frac{C_n^{k+2}}{C_n^{k+4}} \Rightarrow 6 \cdot \frac{\frac{n!}{2!(n-2)!}}{\frac{n!}{4!(n-4)!}} = \frac{\frac{n!}{(k+2)!(n-k-2)!}}{\frac{n!}{(k+4)!(n-k-4)!}} \Rightarrow$$

$$6 \cdot \frac{4!}{2!} \cdot \frac{(n-4)!}{(n-2)!} = \frac{(k+4)!}{(k+2)!} \cdot \frac{(n-k-4)!}{(n-k-2)!}$$

$$\frac{6 \cdot 3 \cdot 4}{(n-3)(n-2)} = \frac{(k+3)(k+4)}{(n-k-3)(n-k-2)}$$

$$\frac{72}{(n-3)(n-2)} = \frac{(k+3)(k+4)}{(n-k-3)(n-k-2)}$$

т.е. справа - возрастающая функция

Заметим, что в числителе и знаменателе при увеличении k числитель правой части растет, а знаменатель - уменьшается. При $k=5$ $(k+3)(k+4) = 8 \cdot 9 = 72$, а знаменатель меньше $(n-3)(n-2)$, т.е. при $k \geq 5$ правая часть больше левой, тогда $k=1, k=2, k=3$ или $k=4$

см. см. стр.



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.



СТРАНИЦА
2 из 3

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

при $k=1$: $\frac{72}{(n-3)(n-2)} = \frac{20}{(n-4)(n-3)} \Rightarrow 72(n-4) = 20(n-3) \Rightarrow$
 $52n = 42 \cdot 4 - 20 \cdot 2 = 288 - 40 = 248 \Rightarrow n = \frac{248}{52} = 4 + \frac{40}{52} \notin \mathbb{Z}$ -
 невозможно:

$k=2$: $\frac{72}{(n-3)(n-2)} = \frac{30}{(n-5)(n-4)} \Rightarrow 72(n-4)(n-5) = 30(n-2)(n-3) \Rightarrow$

$\Rightarrow 72n^2 - 9 \cdot 72n + 72 \cdot 20 = 30n^2 - 30 \cdot 5n + 30 \cdot 6 \Rightarrow$

$42n^2 - (9 \cdot 72 - 30 \cdot 5)n + 72 \cdot 20 - 30 \cdot 6 = 0$

$42n^2 - (3 \cdot 72 - 10 \cdot 5)n + 24 \cdot 20 - 10 \cdot 6 = 0$

$7n^2 - (3 \cdot 24 - 5 \cdot 5)n + 24 \cdot 10 - 10 \cdot 3 = 0$

$7n^2 - 7n + 210 = 0$

$D = (-7)^2 - 4 \cdot 7 \cdot 210 < 0$
 $< 2500 - 5880 < 0$ -
 решений нет

$k=3$: $\frac{72}{(n-2)(n-3)} = \frac{42}{(n-6)(n-5)}$

$12(n-6)(n-5) = 7(n-3)(n-2)$

$12n^2 - 11 \cdot 12n + 12 \cdot 30 = 7n^2 - 7 \cdot 5n + 7 \cdot 6$

$5n^2 - (132 - 35)n + 360 - 42 = 0$

$5n^2 - 97n + 318 = 0$

$D = (-97)^2 - 4 \cdot 5 \cdot 318 = 9409 - 6360 = 3049 = 55^2$

$n_1 = \frac{97+55}{10}; n_2 = \frac{97-55}{10} \Rightarrow n_1 = 15,4; n_2 = 4 \Rightarrow$ при $k=3$ и

$n=4$. Заметим, что в этом случае 5 билетов распределены между 4 одноклассниками, в этом случае $p=1 \Rightarrow$

$p_0 = \frac{1}{6} \Rightarrow \frac{12}{(n-3)(n-2)} = \frac{1}{6} \Rightarrow 72 = n^2 - 5n + 6 \Rightarrow n^2 - 5n - 66 = 0 \Rightarrow$
 $n = 11$ или $n = -6$, но

не 4 $\Rightarrow$ это не верно.

$k=4$: $\frac{72}{(n-3)(n-2)} = \frac{56}{(n-6)(n-7)}$

$9(n-6)(n-7) = 7(n-3)(n-2)$

$9n^2 - 9 \cdot 13n + 9 \cdot 56 = 7n^2 - 7 \cdot 5n + 7 \cdot 12$

$2n^2 - (9 \cdot 13 - 5 \cdot 7)n + 9 \cdot 56 - 7 \cdot 12 = 0$

$n^2 - 41n + 231 = 0$

$D = (-41)^2 - 4 \cdot 231 = 1681 - 924 = 757$; $27 < \sqrt{D} < 28$
 решений нет
 см. с. 1. лист.



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

☐☐☐☒☐☐☐

СТРАНИЦА
3 ИЗ 3

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Итого, если билетов ^{Задача 4} убудем меньше, чем $n-2$, то
такого быть не может $\Rightarrow k \geq n-2$ и $p=1 \Rightarrow p_0 = \frac{1}{6}$
 $\frac{12}{(n-3)(n-2)} = \frac{1}{6} \Rightarrow 72 = n^2 - 5n + 6 \Rightarrow n^2 - 5n - 66 = 0 \Rightarrow \begin{cases} n_1 = -5 \\ n_2 = 11 \end{cases}$
 $n=11$, тогда k — это любое число, которое хотя бы
9, тогда в конце месяца билетов было хотя бы 11.

1 2 3 4 5 6 7

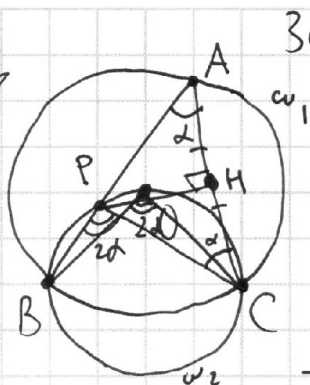
☐ ☐ ☐ ☐ ☒ ☐ ☐

СТРАНИЦА

1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Решение:



Задача 5

Ответ: $S_{\Delta ABC} = \frac{105\sqrt{51}}{2}$

Пусть $\angle A = \alpha$. Поскольку ΔABC — остроугольный, O лежит внутри ΔABC и $\angle BOC = 2\alpha$ как центральный в ω_1 .

Точки B, P, O, C лежат на $\omega_2 \Rightarrow \angle BPC =$

$= \angle BOC = 2\alpha$ как вписанные, опирающиеся на $\overset{\frown}{BC}$, и содержащий O в ω_2 . В ΔAPC $\angle BPC$ — внешний $\Rightarrow \angle BPC = \angle PAC + \angle PCA \Rightarrow \angle PCA = \angle BPC - \angle PAC = 2\alpha - \alpha = \alpha \Rightarrow \Delta APC$ — равнобедренный, $AP = PC = 25$. Пусть PH — высота в ΔAPC , тогда, поскольку ΔAPC — равнобедренный, H — середина AC , тогда $AH = HC = \frac{AC}{2} = \frac{35}{2}$. Тогда, в ΔAPH

$\cos \alpha = \frac{AH}{AP} = \frac{\frac{35}{2}}{25} = \frac{35}{50} = \frac{7}{10} = 0,7$. По основному тригонометрическому тождеству $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1 \Rightarrow \sin \alpha = \sqrt{1 - \cos^2 \alpha}$ (со знаком "+", т.к. α — острый угол) $\Rightarrow \sin \alpha = \sqrt{1 - \frac{49}{100}} = \sqrt{\frac{51}{100}} = \frac{\sqrt{51}}{10}$

$$S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2} \cdot AB \cdot AC \cdot \sin \alpha = \frac{1}{2} (AP + PB) \cdot AC \cdot \sin \alpha = \frac{1}{2} (25 + 5) \cdot 35 \cdot \frac{\sqrt{51}}{10} = \frac{1}{2} \cdot 30 \cdot 35 \cdot \frac{\sqrt{51}}{10} = \frac{105\sqrt{51}}{2}$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☒ 7 ☐

СТРАНИЦА
1 из 3

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

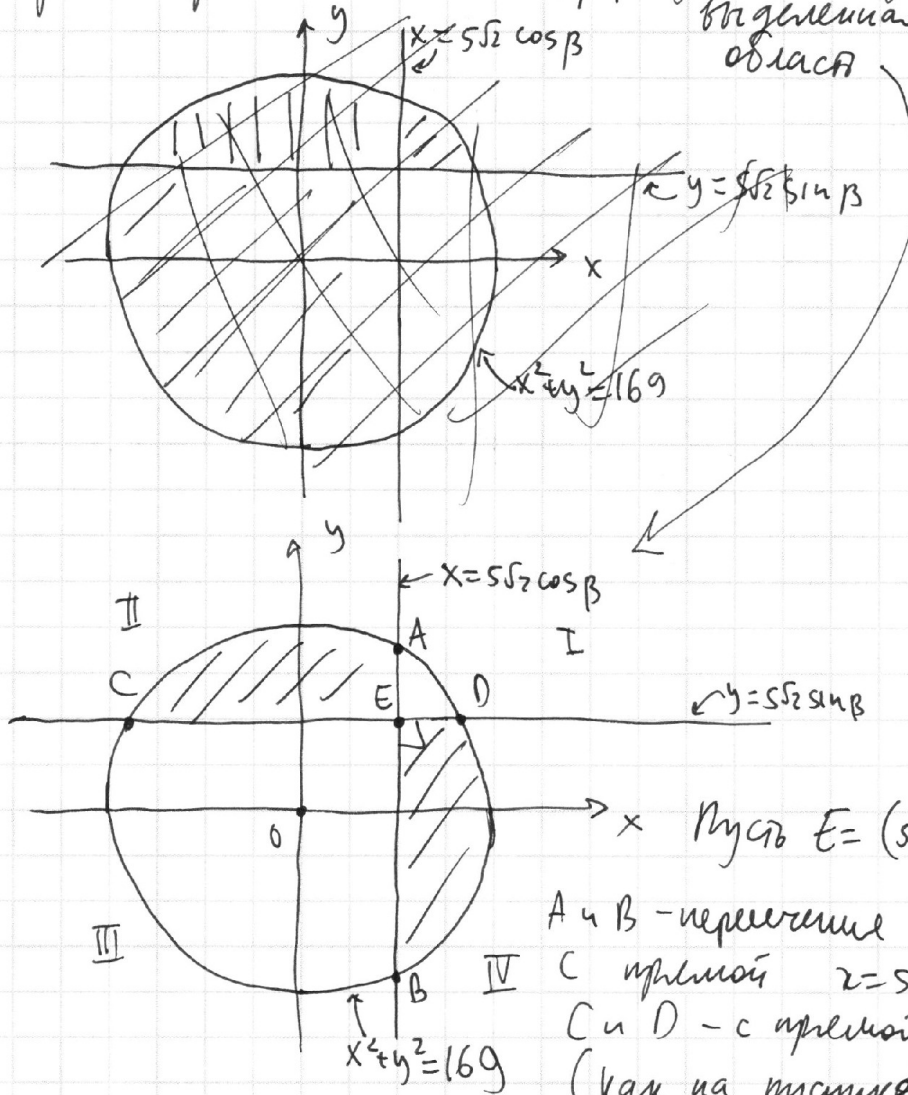
Задача 6
Ответ: $M_{\max} = 13\pi + 48 \frac{\pi}{2}$ $\alpha = \frac{\pi}{2} + \frac{\pi k}{2}, k \in \mathbb{Z}$

Пусть $\alpha = \beta + \pi$, тогда $\cos \alpha = \cos(\beta + \pi) = -\cos \beta$ и $\sin \alpha = \sin(\beta + \pi) = -\sin \beta$, тогда

$$\begin{cases} (x - 5\sqrt{2} \cos \beta)(y - 5\sqrt{2} \sin \beta) \leq 0 \\ x^2 + y^2 \leq 169 \end{cases}$$

Второе неравенство — это все точки, лежащие внутри круга с центром $(0; 0)$ и радиусом 13.

Первое неравенство — это все точки, которые лежат не ниже прямой $y = 5\sqrt{2} \sin \beta$ и не выше $x = 5\sqrt{2} \cos \beta$ или не выше $y = 5\sqrt{2} \sin \beta$ и не на правой прямой $x = 5\sqrt{2} \cos \beta$. Тогда нам подходит выделенная на графике область.



Пусть $E = (5\sqrt{2} \cos \beta, 5\sqrt{2} \sin \beta)$

A и B — пересечение окружности с прямой $x = 5\sqrt{2} \cos \beta$, а C и D — с прямой $y = 5\sqrt{2} \sin \beta$ (как на рисунке) см. сл. страницу



1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☒ 7 ☐

СТРАНИЦА
2 ИЗ 3

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Задача 6

Найдем координаты этих точек:

Для точек A и B верно, что $x = 5\sqrt{2} \cos \beta$ и $x^2 + y^2 = 169 \Rightarrow$

$$50 \cos^2 \beta + y^2 = 169 \Rightarrow y^2 = 119 + \sin^2 \beta \quad (\text{т.к. } 50 \cos^2 \beta = 50 - 50 \sin^2 \beta) \Rightarrow$$

$$A = (5\sqrt{2} \cos \beta, \sqrt{119 + \sin^2 \beta}) \text{ и } B = (5\sqrt{2} \cos \beta; -\sqrt{119 + \sin^2 \beta}) \quad (\text{т.к. } A \text{ в I четверти, а } B \text{ - в IV})$$

Аналогично для точек C и D, $y = 5\sqrt{2} \sin \beta$, $x^2 + y^2 = 169 \Rightarrow$

$$x^2 = 169 - 50 \sin^2 \beta = 119 + 50 \cos^2 \beta \Rightarrow C = (-\sqrt{119 + 50 \cos^2 \beta}; 5\sqrt{2} \sin \beta),$$

$$\text{а } D = (\sqrt{119 + 50 \cos^2 \beta}; 5\sqrt{2} \sin \beta) \quad (\text{т.к. } C \text{ в II четверти, а } D \text{ в I})$$

На самом деле точки A, B, C, D могут располагаться по-другому, однако, поскольку фигура симметрична относительно OX и OY, мы можем считать, что все находится в I четверти, где остальных в осевом симметричны относительно OX и OY. ~~Фигура~~ периметр $P(\alpha)$ будет неизменным. Более того, мы все же можем считать, что все в I четверти не обязательно.

Найдем длину отрезка AB ~~и~~ их координаты по

оси X равны, а по оси Y противоположны $\Rightarrow AB = 2\sqrt{119 + \sin^2 \beta}$.

Аналогично для CD, их координаты по оси X противоположны,

а по оси Y — одинаковы $\Rightarrow CD = 2\sqrt{119 + 50 \cos^2 \beta}$

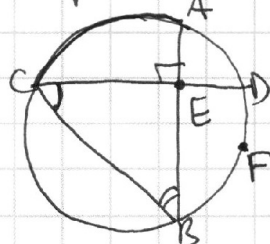
Периметр M фигуры $P(\alpha)$ состоит из отрезков AE, EC, EB, ED и

дуг AC и BD, лежащих внутри углов AEF и DEB соответственно.

Мы знаем, что прямые AB и CD перпендикулярны, а радиус

окружности фиксирован. Докажем, что сумма дуг AC и BD

фиксированна. $\angle ABC + \angle DCB = 90^\circ$, т.к. $AB \perp CD$. Пусть F такое, что $AF = BD$,



тогда $\angle ACF + \angle BDF = 2(\angle ABC + \angle DCB) = 180^\circ$ и $\angle ACF + \angle BDF = \angle ACF + \angle AEF =$

$\angle CEF \Rightarrow \angle CEF = 180^\circ \Rightarrow CF$ — диаметр, тогда CF —

полуокружность, и длина дуги CF = $\pi \cdot 13 = 13\pi \Rightarrow$

$|AC| + |BD| = |CF| = 13\pi$ — величина, не зависящая от угла α или β см. см. стр.



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☒ 7 ☐

СТРАНИЦА
3 ИЗ 3

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Тогда ~~А =~~ Задача 6

Тогда:
 $M = AE + EB + CE + ED + |AC| + |BC| = AB + CD + 13\pi =$

$$= 2\sqrt{119 + 50\sin^2\beta} + 2\sqrt{119 + 50\cos^2\beta} + 13\pi.$$

Докажем, что для любых m и n $\frac{\sqrt{m} + \sqrt{n}}{2} \leq \sqrt{\frac{m+n}{2}}$. Действительно, возведем в квадрат (это является равносильным переходом при m и $n \geq 0$) получим $\frac{m+n+2\sqrt{mn}}{4} \leq \frac{m+n}{2} \Rightarrow \frac{2\sqrt{mn}}{4} \leq \frac{m+n}{4} \Rightarrow$

$$\Rightarrow 0 \leq \frac{(\sqrt{m} - \sqrt{n})^2}{4} - \text{верно для любых } m \text{ и } n \geq 0 \text{ (равенство при } \sqrt{m} = \sqrt{n})$$

Поскольку $119 + 50\sin^2\beta \geq 119 > 0$ и $119 + 50\cos^2\beta \geq 119 > 0$ получаем

$$M = 4 \left(\frac{\sqrt{119 + 50\sin^2\beta} + \sqrt{119 + 50\cos^2\beta}}{2} \right) + 13\pi \leq$$

$$\leq 4 \cdot \sqrt{\frac{119 + 50\sin^2\beta + 119 + 50\cos^2\beta}{2}} + 13\pi = 4\sqrt{\frac{238 + 50}{2}} + 13\pi =$$

$$= 4\sqrt{\frac{288}{2}} + 13\pi = 4\sqrt{144} + 13\pi = 4 \cdot 12 + 13\pi = 13\pi + 48, \text{ то есть}$$

$M \leq 13\pi + 48$, при этом равенство достигается при

$$\sqrt{119 + 50\sin^2\beta} = \sqrt{119 + 50\cos^2\beta} \Rightarrow \sin^2\beta = \cos^2\beta \quad \left(\begin{array}{l} \text{после возведения в} \\ \text{квадрат, сокращение} \\ \text{на } 119 \text{ и деление на } 50 \end{array} \right) \Rightarrow$$

$$\cos^2\beta - \sin^2\beta = 0 \Rightarrow \cos 2\beta = 0 \Rightarrow \cos(2(\alpha - \pi)) = 0 \Rightarrow$$

$$\cos(\alpha - 2\pi) = 0 \Rightarrow \cos 2\alpha = 0$$

$$2\alpha = \frac{\pi}{2} + \pi k, k \in \mathbb{Z}$$

$$\alpha = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi k}{2}, k \in \mathbb{Z}$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

1
☐

2
☐

3
☐

4
☐

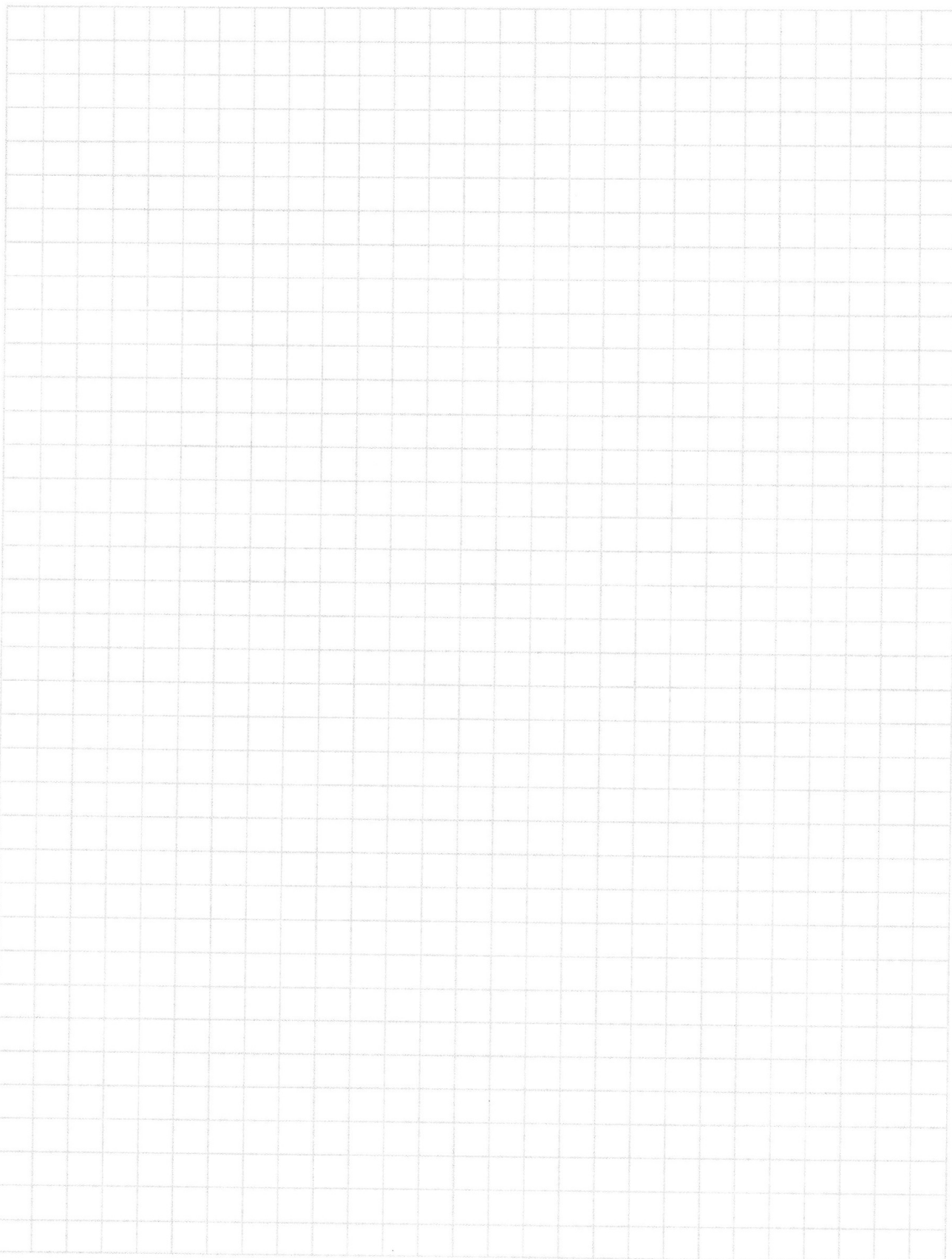
5
☐

6
☐

7
☐

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. **Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно.** Порча QR-кода недопустима!





На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

1 2 3 4 5 6 7
☐ ☐ ☐ ☐ ☐ ☐ ☐

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$K = \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{5}{xy} = \frac{x+y+5}{xy}$$

$$\begin{aligned} x &\rightarrow x-2 \\ y &\rightarrow y+2 \end{aligned}$$

$$K' = \frac{x+y+5}{(x-2)(y+2)}$$

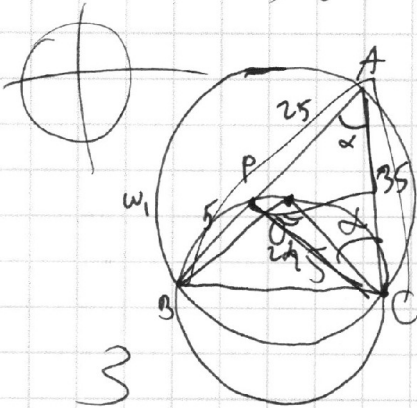
$$\begin{aligned} xy &= (x-2)(y+2) \\ xy &= xy + 2x - 2y - 4 \\ y &= 2x - 2y \\ 2 &= x - y \end{aligned}$$

$$\arcsin x \leq \frac{\pi}{2}$$



$$M+8 = x^3 + (-y)^3 + (-2)^3 - 3 \cdot (-y) \cdot (-2) \cdot x = x - y - 2 = 0$$

$$(\sin \pi x + \sin \pi y) \sin \pi x = (\cos \pi x - \cos \pi y) \cos \pi x$$



$$\frac{90^4 - 1}{9}$$

$$(10^2 - 1)$$

$$\frac{11}{19}$$

$$\frac{11}{19}$$

$$\frac{11}{19}$$

$$\frac{11}{19}$$

$$\frac{11}{19}$$

$$\frac{11}{19}$$

$$\frac{11}{19}$$

$$\frac{11}{19}$$

$$\frac{11}{19}$$

$$\frac{11}{19}$$

$$\frac{11}{19}$$

$$1' \overline{aaaa} \cdot \overline{692} \cdot 3x$$

$$A \cdot B \cdot C \cdot x^2$$

$$a \cdot 1111 \cdot b \cdot c$$

$$a \cdot 11 \cdot 101 \cdot b \cdot c : 101^2$$

$$a \cdot 11 \cdot 101 \cdot 606 \cdot 33$$

$$28$$

$$5 - y - 3$$

$$5 - y - 3$$

$$5 - y - 3$$

$$5 - y - 3$$

$$5 - y - 3$$

$$5 - y - 3$$

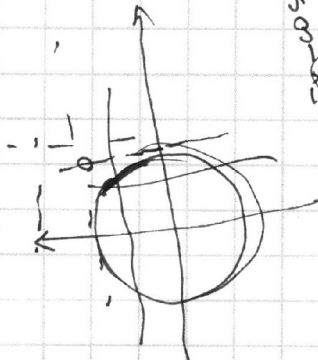
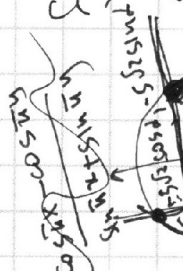
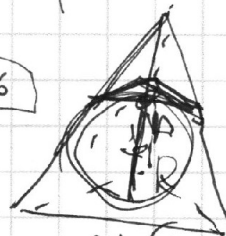
$$5 - y - 3$$

$$5 - y - 3$$

$$5 - y - 3$$

$$5 - y - 3$$

$$5 - y - 3$$



$$\frac{a^2 + 7a + 12}{a^2 + 7a + 12} = \frac{72}{a^2 + 7a + 12}$$

$$= 72 \frac{(a-2)^2 + (a-2)}{(a-2)^2 + (a-2)}$$

$$\sin \alpha \sin \beta \sin \gamma = \cos \alpha \cos \beta \cos \gamma$$

$$x \rightarrow y \rightarrow x$$

$$y \rightarrow x \rightarrow y$$

$$x \rightarrow y \rightarrow x$$

$$y \rightarrow x \rightarrow y$$

$$x \rightarrow y \rightarrow x$$

$$y \rightarrow x \rightarrow y$$

$$x \rightarrow y \rightarrow x$$

