



МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ



11 КЛАСС. Вариант 1

- [3 балла] Найдите все тройки натуральных чисел $(A; B; C)$ такие, что:
 - A — четырёхзначное число, составленное из одинаковых цифр,
 - B — трёхзначное число, хотя бы одна из цифр которого равна 2,
 - C — двузначное число, хотя бы одна из цифр которого равна 3,
 - произведение $A \cdot B \cdot C$ является квадратом некоторого натурального числа.
- [3 балла] Положительные числа x и y таковы, что значение выражения $K = \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{2}{xy}$ не изменяется, если x уменьшить на 1, а y — увеличить на 1. Найдите все возможные значения выражения $M = x^3 - y^3 - 3xy$.
- [5 баллов] а) Найдите все пары действительных чисел $(x; y)$ такие, что $(\sin \pi x + \sin \pi y) \sin \pi x = (\cos \pi x + \cos \pi y) \cos \pi x$.
б) Сколько пар целых чисел (x, y) удовлетворяют одновременно этому уравнению и неравенству

$$\arcsin \frac{x}{5} + \arccos \frac{y}{4} < \frac{3\pi}{2}?$$

- [4 балла] В начале месяца было выделено 4 билета на праздничный концерт, которые планировалось случайным образом распределить между одиннадцатиклассниками. В конце месяца выяснилось, что будет выделено больше 4 билетов. Одиннадцатиклассники Петя и Вася вычислили, что вероятность им обоим вместе попасть на концерт в начале месяца была в 2,5 раза меньше, чем оказалась в конце месяца. Сколько всего было выделено билетов на концерт в конце месяца, если количество одиннадцатиклассников не изменилось?
- [5 баллов] Точка O — центр окружности ω_1 , описанной около остроугольного треугольника ABC . Окружность ω_2 , описанная около треугольника BOC , пересекает отрезок AB в точке P . Найдите площадь треугольника ABC , если $AP = \frac{15}{2}$, $BP = 5$, $AC = 9$.
- [6 баллов] На координатной плоскости изображена фигура $\Phi(\alpha)$, состоящая из всех точек, координаты $(x; y)$ которых удовлетворяют системе неравенств

$$\begin{cases} (x - 3\sqrt{2} \sin \alpha)(y - 3\sqrt{2} \cos \alpha) \leq 0, \\ x^2 + y^2 \leq 25. \end{cases}$$

Найдите максимальное значение M периметра (длины границы) фигуры $\Phi(\alpha)$ и укажите все значения α , при которых оно достигается.

- [6 баллов] Шар Ω касается всех рёбер правильной усечённой пирамиды, а шар ω касается всех её граней. Пусть сторона верхнего основания меньше, чем сторона нижнего. Найдите отношение площади боковой поверхности пирамиды к площади её нижнего основания.



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

1

2

3

4

5

6

7

СТРАНИЦА
1 из 4

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по **каждой из задач** нумеруются **отдельно**. Порча QR-кода недопустима!

№1

П.к. A можно представить в виде $aabb$ -
(двоичная запись), то $A = a \cdot 1111 = 11 \cdot 101 \cdot a$.

Поскольку $A \cdot B \cdot C$ - пятизначный квадрат, то $A \cdot B \cdot C \vdash 101^2 \cdot 11^2 \cdot a^2$,

т.к. $A \vdash 11 \cdot 101 \cdot a$, то получаем, что $B \cdot C \vdash 101 \cdot 11 \cdot a$,

т.к. 101 и 11 -простые, то это возможно только
если $B = 101 \cdot k$, $C = 11 \cdot c$, т.к. кроме этих единиц
не будут соответствовать условия, и тогда

B и C получим однозначно: $B = 101 \cdot 101$, $C = 11 \cdot 11 \Rightarrow$

$$\Rightarrow A \cdot B \cdot C \geq a \cdot 101^2 \cdot 11^2 \cdot 2 \cdot 3 \neq 101^2 \cdot 11^2$$

Умножение $A \cdot B \cdot C$ было пятизначным квадратом
тогда $a \cdot 2 \cdot 3$ тоже было пятизначным квадратом,
так как $101^2 \cdot 11^2 = (101 \cdot 11)^2$. Учесть пятизначный квадрат можно
получим, что $a = 6$, тогда единственными
могут быть $(666; 101; 33)$

Ответ: $(666; 101; 33)$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

- | | | | | | | |
|----------------------------|---------------------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|
| <input type="checkbox"/> 1 | <input checked="" type="checkbox"/> 2 | <input type="checkbox"/> 3 | <input type="checkbox"/> 4 | <input type="checkbox"/> 5 | <input type="checkbox"/> 6 | <input type="checkbox"/> 7 |
|----------------------------|---------------------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|

СТРАНИЦА
2 из 4

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по **каждой из задач** нумеруются **отдельно**. Порча QR-кода недопустима!

N2

$$k = \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{2}{xy} = \frac{y+x+2}{xy}$$

Поэтому, по условию:

$$\begin{aligned} \frac{x+y+2}{xy} &= \frac{x-1+y+1+2}{(x-1)(y+1)} \Leftrightarrow (x+y+2) \left(\frac{1}{xy} - \frac{1}{(x-1)(y+1)} \right) = 0 \\ \Leftrightarrow \begin{cases} xy \neq 0, (x-1)(y+1) \neq 0 \\ x+y+2 = 0 \end{cases} &\quad \Leftrightarrow \begin{cases} xy \neq 0, (x-1)(y+1) \neq 0 \\ y = -(2+x) \end{cases} \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{1}{xy} - \frac{1}{xy-y+x-1} = 0 \\ x+y+2 = 0 \end{cases} &\quad \frac{xy - y + x - 1 - xy}{xy(xy-y+x-1)} = 0 \\ \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq 0 \\ y \neq 0 \\ x \neq 1 \\ y \neq -1 \\ y = -(2+x) \\ x-y-1 = 0 \end{cases} &\quad \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq 0 \\ y \neq 0 \\ x \neq 1 \\ y \neq -1 \\ y = -(2+x) \\ y = x-1 \end{cases} \end{aligned}$$

Если $y = -(2+x)$, то по условию $2+x > 0 \Rightarrow y < 0$, что противоречие с $y > 0$ по условию,

значит $y = x-1$, и $x \neq 1 \Rightarrow$

$$\Rightarrow M = x^3 - y^3 - 3xy = x^3 - (x-1)^3 - 3x(x-1) = 1$$

Получаем, что единственное возможное значение $M = 1$, которое удовлетворяет при $x > 1$.

Ответ: $M = 1$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

1

2

3

4

5

6

7

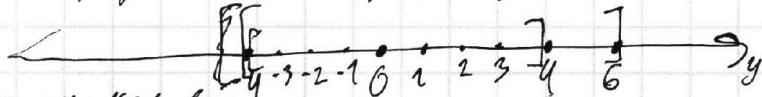
СТРАНИЦА
4 из 7

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач **нумеруются отдельно**. Порча QR-кода недопустима!

$$\left\{ \begin{array}{l} x = y - 1 + 2k \\ y - 1 + 2k \in [5; 5] \\ y \in E[4; 4] \\ x = -\frac{y+1}{3} + \frac{2n}{3}, n, k \in \mathbb{Z} \\ -\frac{y+1}{3} + \frac{2n}{3} \in [5; 5] \\ y \in E[4; 4] \\ (x; y) \neq (5; 4) \end{array} \right. \quad (1)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} x = y - 1 + 2k \\ y \in [-4 - 2k; 6 - 2k] \\ y \in E[4; 4] \\ x = -\frac{y+1}{3} + \frac{2n}{3} \\ y \in [16 + \frac{2n}{3}; 14 + \frac{2n}{3}] \\ y \in E[4; 4] \\ (x; y) \neq (5; 4) \end{array} \right. \quad (2)$$

Для системы (1), решением будут все x, y такие, что $x = y - 1 + 2k$, т.е. у её общих решений, необходимо, чтобы отрезки $[-4 - 2k; 6 - 2k]$ имели ненулевое пересечение, при этом будем при $k \in \{-4; -3; \dots; 4; 5\}$, т.к. для изменения k мы передвигаем отрезок длины 10 по числовой прямой



при этом все 6 решений симметрично для $k=0$ — k , когда решения разбиваются на пары, но при этом нужно учесть повторение решений.



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

- | | | | | | | |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|
| <input type="checkbox"/> 1 | <input type="checkbox"/> 2 | <input type="checkbox"/> 3 | <input type="checkbox"/> 4 | <input type="checkbox"/> 5 | <input type="checkbox"/> 6 | <input type="checkbox"/> 7 |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|

СТРАНИЦА
3 из 7

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

N3

$$\begin{aligned}
 & a) (\sin \pi x + \sin \pi y) \sin \pi x = (\cos \pi x + \cos \pi y) \cos \pi x \Leftrightarrow \\
 & \Leftrightarrow \sin^2 \pi x + \sin \pi x \cdot \sin \pi y = \cos^2 \pi x + (\cos \pi x \cdot \cos \pi y) \Leftrightarrow \\
 & \Leftrightarrow -(\cos^2 \pi x - \sin^2 \pi x) = \cos \pi x \cdot \cos \pi y - \sin \pi x \cdot \sin \pi y \Leftrightarrow \\
 & \Leftrightarrow \cos(2\pi x + \pi) = \cos(\pi x + \pi y) \Leftrightarrow \\
 & \Leftrightarrow \begin{cases} 2\pi x + \pi = \pi x + \pi y + 2\pi k \\ 2\pi x + \pi = -\pi x - \pi y + 2\pi n \end{cases} \xrightarrow{n, k \in \mathbb{Z}} \begin{cases} x = y - 1 + 2k \\ 3x = -y + 2n \end{cases} \xrightarrow{n, k \in \mathbb{Z}} \\
 & \Leftrightarrow \begin{cases} x = y - 1 + 2k \\ x = -\frac{y+1}{3} + \frac{2n}{3} \end{cases} \xrightarrow{n, k \in \mathbb{Z}}
 \end{aligned}$$

Ответ: a) $(y - 1 + 2k; y), (-\frac{y+1}{3} + \frac{2n}{3}; y) \quad y \in \mathbb{R}; n, k \in \mathbb{Z}$

б) по определению $\arcsin \frac{\sqrt{3}}{2} \in [-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}], \arccos \frac{\sqrt{3}}{2} \in [0; \pi] \Rightarrow$
 $\Rightarrow \arcsin \frac{\sqrt{3}}{2} + \arccos \frac{\sqrt{3}}{2} \leq \frac{3\pi}{2} \Rightarrow$ исходное нер-во
 будем рассматривать при всех (x, y) , при которых
 нер-во существует, и $\arcsin \frac{x}{5}$ вместе с $\arccos \frac{y}{4}$ не
 равны своим макс. значениям одновременно, поэтому
 (x, y) такие что $\arccos \frac{y}{4} \geq \pi$, $\arcsin \frac{x}{5} \geq \frac{\pi}{2}$:
 $\arcsin \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\pi}{2} \Rightarrow \begin{cases} \frac{x}{5} = 1 \\ \frac{y}{4} = -1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 5 \\ y = -4 \end{cases}$, тогда
 получаем систему:

$$\begin{cases} x = y - 1 + 2k \\ x = -\frac{y+1}{3} + \frac{2n}{3} \end{cases} \xrightarrow{n, k \in \mathbb{Z}} \begin{cases} x = y - 1 + 2k \\ x = -\frac{y+1}{3} + \frac{2n}{3} \end{cases} \xrightarrow{n, k \in \mathbb{Z}} \begin{cases} x \in [-5; 5] \\ y \in [-4; 4] \\ (x; y) \neq (5; -4) \end{cases} \Rightarrow$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении **каждой задачи отдельно**.

- 1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
5 из 7

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач **нумеруются отдельно**. Порча QR-кода недопустима!

№

Рассмотрим все способы выиграть в биномах, и на них было выделено k биномов ($k \geq 1$). Тогда, поскольку всего способов выиграть k из n равно C_n^k , а способов выбрать $k-1$ из $n-2$, т.е. можно взять в k биномах равна C_{n-2}^{k-2} , то вероятность равна $\frac{C_{n-2}^{k-2}}{C_n^k} = \frac{\frac{(n-1)!}{(k-2)!(n-k)!}}{\frac{n!}{k!(n-k)!}} = \frac{k(k-1)}{n(n-1)}$.

Тогда, если в конце счёта x биномов ($x \geq 4$), то получаем уравнение:

$$\frac{4(4-1)}{n(n-1)} \cdot 2,5 = \frac{x(x-1)}{n(n-1)} \stackrel{\text{УД}}$$
$$\Leftrightarrow x^2 - x - 30 = 0 \stackrel{x \geq 4}{\Leftrightarrow} x = 6$$

Ответ: В конце матча на концерте было выделено 6 биномов.



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

- | | | | | | | |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|---------------------------------------|----------------------------|
| <input type="checkbox"/> 1 | <input type="checkbox"/> 2 | <input type="checkbox"/> 3 | <input type="checkbox"/> 4 | <input type="checkbox"/> 5 | <input checked="" type="checkbox"/> 6 | <input type="checkbox"/> 7 |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|---------------------------------------|----------------------------|

СТРАНИЦА
7 из 7

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Покажем, что $M = AB + CD + CA + DB$,
и в силу симметрии $CA + DB$ будем всегда
равно произведению длин окружности $x^2 + y^2 = 25$,
т.е. $CA + DB = 5\pi$, тогда, т.к. $AB = 2\sqrt{25 - 18\cos^2\alpha}$,
а $CD = 2\sqrt{25 - 18\sin^2\alpha}$, тогда:

$$\begin{aligned} M &= 2\sqrt{25 - 18\sin^2\alpha} + 2\sqrt{25 - 18\cos^2\alpha} + 5\pi = \\ &= 2\sqrt{25 - 18\cos^2\alpha} + 2\cdot\sqrt{25 - 18\sin^2\alpha} + 5\pi = \\ &= 2\sqrt{4\cos^2\alpha} + 2\sqrt{25 - 18\sin^2\alpha} + 5\pi \end{aligned}$$

Поскольку 5π не изменяется, то задача сводится к
найдению максимума выражения

M , нужно максимизировать $f(\alpha) = \sqrt{4\cos^2\alpha} + \sqrt{25 - 18\sin^2\alpha}$,

тогда $\sin^2\alpha = t$, ^{т.к. $t \in [0; 1]$} нужно максимизировать

$$g(t) = \sqrt{4t + 18} + \sqrt{25 - 18t}, \text{ при } t \in [0; 1].$$

$$g'(t) = \frac{18}{2\sqrt{4t + 18}} - \frac{18}{2\sqrt{25 - 18t}} = \frac{9(25 - 18t) - \sqrt{4t + 18}}{\sqrt{4t + 18}\sqrt{25 - 18t}}$$

Конечно производной при $\sqrt{25 - 18t} = \sqrt{4t + 18} (\Leftrightarrow) t = \frac{1}{2}$

$$g'(t) \begin{cases} + & t < \frac{1}{2} \\ - & t > \frac{1}{2} \end{cases} \Rightarrow t = \frac{1}{2} - \text{ точка максимума,}$$

$$\text{тогда } M = \sqrt{4\cdot\frac{1}{2} + 18} + 5\pi = 20 + 5\pi, \cos^2\alpha = \frac{1}{4} (\Leftrightarrow)$$

$$(\Leftrightarrow) \alpha = \pm \frac{\pi}{4} + \pi k, k \in \mathbb{Z}$$

Ответ: Максимум $M = 20 + 5\pi$, при
 $\alpha = \pm \frac{\pi}{4} + \pi k, k \in \mathbb{Z}$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

- | | | | | | | |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|
| <input type="checkbox"/> 1 | <input type="checkbox"/> 2 | <input type="checkbox"/> 3 | <input type="checkbox"/> 4 | <input type="checkbox"/> 5 | <input type="checkbox"/> 6 | <input type="checkbox"/> 7 |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|

СТРАНИЦА
6 ИЗ 4

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач **нумеруются отдельно**. Порча QR-кода недопустима!

N6

$$\begin{cases} (x - 3\sqrt{2}\sin\alpha)(y - 3\sqrt{2}\cos\alpha) \leq 0 \\ x^2 + y^2 \leq 25 \end{cases}$$

Для удобства сделаем замену $\varphi = \frac{\pi}{2} - \alpha$, тогда:

$$\begin{cases} (x - 3\sqrt{2}\cos\varphi)(y - 3\sqrt{2}\sin\varphi) \leq 0 \\ x^2 + y^2 \leq 25 \end{cases}$$

График $x^2 + y^2 \leq 25$ — круг радиуса 5 с центром $(0; 0)$

График $(x - 3\sqrt{2}\cos\varphi)(y - 3\sqrt{2}\sin\varphi) \leq 0$ — 2 четверти
пересечения ненулевые прямые $x = 3\sqrt{2}\cos\varphi$, $y = 3\sqrt{2}\sin\varphi$,
т.е. вспомогательная точка $(x_0; y_0)$, так, что $x_0^2 + y_0^2 = 18$,
а спроектированная прямая $x = x_0$, $y = y_0$ (см. график).

Чтобы решить задачу
пересечением этих
графиков, найдем
точки пересечения
 $x = 3\sqrt{2}\cos\varphi$, $y = 3\sqrt{2}\sin\varphi$
 $x^2 + y^2 = 25$:

$$\begin{cases} x = 3\sqrt{2}\cos\varphi \\ x^2 + y^2 = 25 \end{cases} \Leftrightarrow$$

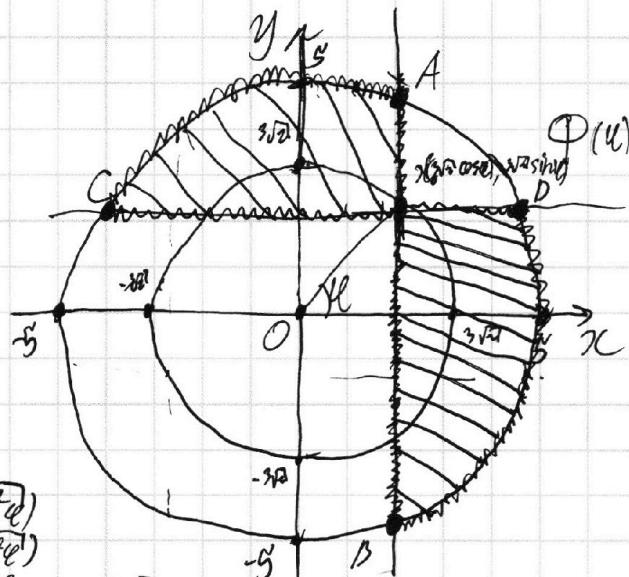
$$\begin{aligned} &\Leftrightarrow \begin{cases} x = 3\sqrt{2}\cos\varphi \\ y = \pm\sqrt{25 - 18\cos^2\varphi} \end{cases} \Rightarrow \\ &\Rightarrow A = (3\sqrt{2}\cos\varphi; \sqrt{25 - 18\cos^2\varphi}) \end{aligned}$$

$$B = (3\sqrt{2}\cos\varphi; -\sqrt{25 - 18\cos^2\varphi})$$

$$\begin{cases} y = 3\sqrt{2}\sin\varphi \\ x^2 + y^2 = 25 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = 3\sqrt{2}\sin\varphi \\ x = \pm\sqrt{25 - 18\sin^2\varphi} \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow C = (-\sqrt{25 - 18\sin^2\varphi}; 3\sqrt{2}\sin\varphi)$$

$$D = (\sqrt{25 - 18\sin^2\varphi}; 3\sqrt{2}\sin\varphi)$$





На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении **каждой задачи** отдельно.

- | | | | | | | |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| <input type="checkbox"/> |

СТРАНИЦА
_ ИЗ _

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

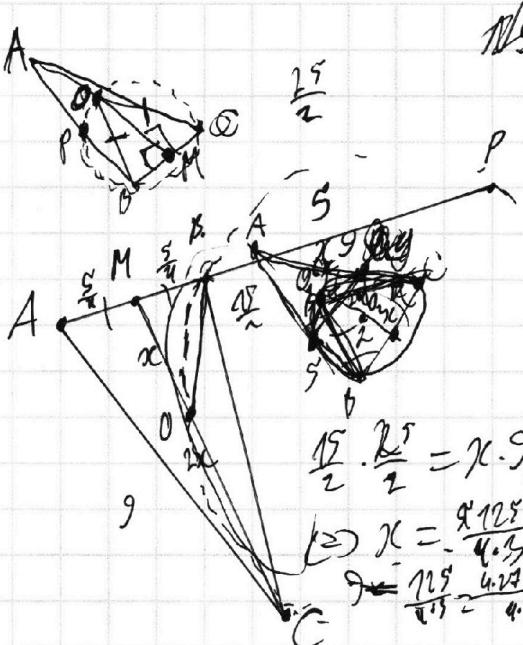


На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

- | | | | | | | |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|
| <input type="checkbox"/> 1 | <input type="checkbox"/> 2 | <input type="checkbox"/> 3 | <input type="checkbox"/> 4 | <input type="checkbox"/> 5 | <input type="checkbox"/> 6 | <input type="checkbox"/> 7 |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|

СТРАНИЦА
_ из _

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по **каждой из задач** нумеруются **отдельно**. Порча QR-кода недопустима!



1) Продолжим CO до пересечения с AB , пусть CO это точка M , тогда т.к. O -центр описанной окружности, то CM -медиана, а также $CO:OM=2:1$, пусть $OM=x$, тогда $CO=2x$.

$$\frac{15}{2} \cdot \frac{5}{2} = x \cdot 9 \quad (?)$$

$$x = \frac{125}{4 \cdot 3}$$

$$x = \frac{125}{12} = \frac{125}{4 \cdot 3} = \frac{125}{12} = \frac{125}{12}$$

т.к. $B, P, O, C \in W_2$, ~~то~~ $OB \perp OC$ и $M, B, P \in MP$; $M, O, C \in MC$, то справедливо, что:

$$MB \cdot MP = MO \cdot MC \quad (\text{по теореме касательной}), \text{ т.к. } AB = AP - BP = \frac{5}{2}, \text{ то}$$

$$\text{получаем: } \frac{5}{2} \cdot \left(\frac{5}{2} + x \right) = 9 \cdot 3x \quad (?)$$

$$(?) \Rightarrow MC^2 = 9x^2 = \frac{3 \cdot 125}{4^2}$$

$$2) \text{По т. косинусов в } \triangle MAC: \cos \angle MAC = \frac{AM^2 + AC^2 - MC^2}{2 \cdot AM \cdot AC} =$$

$$= \frac{\frac{5^2}{4} + 9^2 - \frac{3 \cdot 125}{4^2}}{2 \cdot \frac{5}{2} \cdot 9} = \frac{25 + 81 - 125}{36} = \frac{19}{36}, \text{ т.к. } \angle BAC =$$

$$\text{остроголюбов} (\angle MAC = \angle BAC), \text{ то } \sin \angle BAC = \sqrt{1 - \cos^2 \angle MAC} =$$

$$= \Rightarrow S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} AB \cdot AC \cdot \sin \angle BAC = \frac{1}{2} \cdot \frac{5}{2} \cdot 9 =$$

=

Ответ: $S_{\triangle ABC} =$

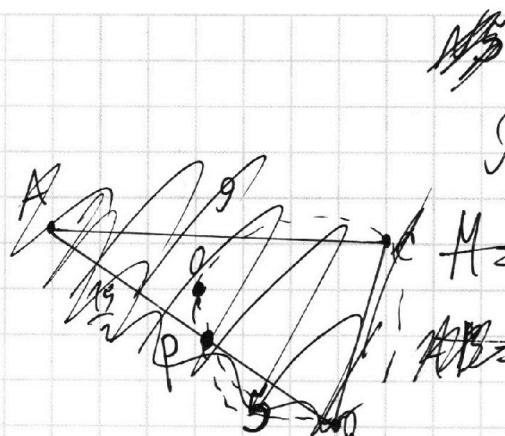


На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

- 1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
_ ИЗ _

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач **нумеруются отдельно**. Порча QR-кода недопустима!



Думал, что:

$$M = AB + CD + AC + BD.$$

~~AB~~ Поскольку A и B симметричны

Остались ОУК, а Д иссимметричны относительно
ОУ, то AC и BD будут симметричны



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

- | | | | | | | |
|---------------------------------------|---------------------------------------|----------------------------|---------------------------------------|----------------------------|---------------------------------------|----------------------------|
| <input checked="" type="checkbox"/> 1 | <input checked="" type="checkbox"/> 2 | <input type="checkbox"/> 3 | <input checked="" type="checkbox"/> 4 | <input type="checkbox"/> 5 | <input checked="" type="checkbox"/> 6 | <input type="checkbox"/> 7 |
|---------------------------------------|---------------------------------------|----------------------------|---------------------------------------|----------------------------|---------------------------------------|----------------------------|

СТРАНИЦА
ИЗ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач **нумеруются отдельно**. Порча QR-кода недопустима!

$$(111 \cdot a \cdot 222 \cdot \pi y^2) = 111^2 \cdot 2a \cdot \pi y^2 \quad 310+6-51$$

$$1) B : 111 : \frac{369}{746} = \frac{111^2 \cdot 2a \cdot \pi y^2}{746} = \frac{111^2}{746} = 10$$

$$111^2 \cdot a \cdot 2 \cdot \pi y^2 = 111^2 (a \cdot 2 \cdot \pi y^2)$$

~~установлено~~: Решение $x=3$, тогда: $y \in [-4; 4]$

$$\frac{5^2 + 9^2 + 4^2 - 3 \cdot 125}{2 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 9} a \cdot 2 \cdot \pi y^2 = \pi^2 x \in [-5; 5]$$

$$9 \cdot 4^2 - 14 \cdot 5^2 = 0 \quad a \cdot 2 \cdot (300 + 10y + 2) = \pi^2 \quad 25 + 81 - 16 - 3 \cdot 125$$

$$144 = 34 \cdot 3 \quad y - 1 + 2k \in [-5; 5] \quad \frac{2}{\pi^2}$$

$$\arcsin \frac{x}{\pi} + \arccos \frac{y}{\pi} \Rightarrow \frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{x-1} + \frac{1}{y+1} + \frac{2}{\pi y - y + x - 1}$$

$$\sin(\arcsin \frac{x}{\pi}) \cdot \sin(\arccos \frac{y}{\pi}) + \frac{2}{\pi y} = \frac{x+y+2}{xy} = \frac{\pi x + y + 2}{\pi y}$$

$$x^3 - (x^3 - 3x^2 + 3x - 1) - 3x^2 + 3x = y \in [-4-2k; 6-2k]$$

$$\frac{946}{8} \left| \begin{array}{l} 2x^3 - \pi^3 + 5x^2 - 3x + 1 - 3x^2 + 3x \\ \hline -74 \end{array} \right. = \frac{x}{8}, \frac{y}{4} \in [-1, 1] \quad \frac{81}{x-16} - \frac{1296}{486} - \frac{946}{350}$$

$$\frac{6}{\pi} (\sin \pi x + \sin \pi y) \cdot \sin \pi x \frac{81}{x-16} - \frac{946}{486} - \frac{946}{350}$$

$$\sin^2 \pi x + \sin \pi y \cdot \sin \pi x = \cos^2 \pi x + \cos \pi y \cdot \cos \pi x$$

$$\Leftrightarrow -\cos 2\pi x = \cos \pi(y+x) \quad 2\pi x + \pi = \pi y + \pi x + \pi \\ \cos(2\pi n + \pi) = \cos(\pi y + \pi) \quad \Leftrightarrow 2\pi x + \pi =$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1

2

3

4

5

6

7

СТРАНИЦА
_ ИЗ _

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

УЗА

$$6 - 2k = -4$$

$$k = 5$$

$$-11 - 2k = 4$$

$$-2k = 2 \cdot 9$$

$$k = -9$$

На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.



- | | | | | | | |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| <input type="checkbox"/> |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|

СТРАНИЦА
ИЗ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\arcsin \frac{x}{y} + \arccos \frac{y}{x} \leq \frac{3\pi}{2} \Leftrightarrow y \geq -4+2k; \\ \sqrt{y+18\sin^2 a} + \sqrt{25-18\sin^2 a}$$

$$\Rightarrow \sin(\frac{x}{y} + \arcsin \frac{x}{y} + \arccos \frac{y}{x}) < \frac{y+18\sin^2 a + 1}{\sqrt{y+18\sin^2 a} + \sqrt{25-18\sin^2 a}}$$

$$x = y - 4 + 2k \geq -9$$

$$y - 1 + 2k = \frac{-y-1}{3} + \frac{1}{3}k \\ 25 - 18t = y + 18t$$

$$g'(t) = \frac{\frac{18}{3} \cdot y + 1}{\sqrt{y+18t}} + \frac{2u}{3} \in [-5; 5]$$

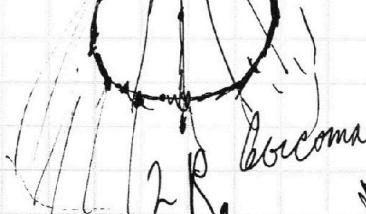
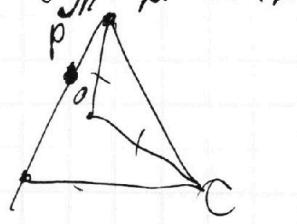
$$\frac{ay}{3} \\ 3y - 3 + 6k = -y - 1 + 2k \\ 25 - 18t = y + 18t$$

$$3 + 3 + 2 + 4 + 6 = -y \in [14 - \frac{2u}{3}; 16 - \frac{2u}{3}]$$

$$36t = 18 \\ t = \frac{1}{2} \\ 4y_1 = 2u - 6k + 2$$

$$= \frac{8u + 18}{18 + 6 + 6 + 1} = \frac{18}{33} \\ \therefore \frac{9}{16} \quad y \in [-16 + \frac{2u}{3}; 14 + \frac{2u}{3}]$$

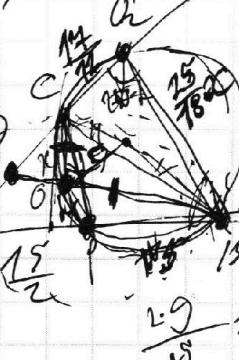
$$25 - 18t = y + 18t$$



$$9. AA = \frac{15 \cdot 25}{2}$$

$$AA \cdot AAC = \frac{15}{2} \cdot \frac{25}{2} = \frac{375}{4}$$

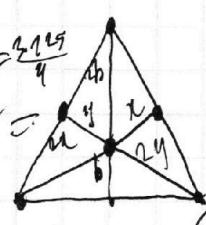
$$\frac{125}{4} = \frac{125}{4}$$



$$AA \cdot AAC = \frac{15}{2} \cdot \frac{25}{2} = \frac{375}{4}$$

$$9 - \frac{50}{3} = 90 + 48 =$$

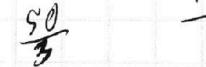
$$\frac{24 - 50}{3} = 6$$



$$\frac{15}{2} \cdot \frac{25}{2} \cdot \frac{50}{3} = \frac{125}{4} = \frac{125}{4}$$

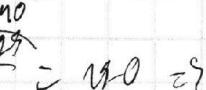
$$= 90 + 16$$

$$AA \cdot AAC = \frac{15}{2} \cdot \frac{25}{2} = \frac{375}{4}$$



$$\frac{125}{4} = \frac{125}{4}$$

$$= 90 + 16$$



$$\frac{125}{4} = \frac{125}{4}$$

$$= 90 + 16$$

$$\frac{125}{4} = \frac{125}{4}$$

$$= 90 + 16$$

$$\frac{125}{4} = \frac{125}{4}$$

$$= 90 + 16$$