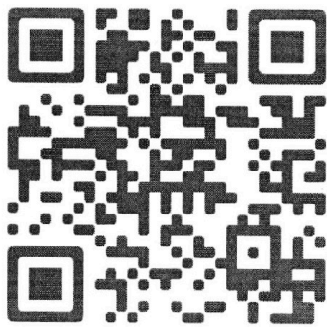




МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

11 КЛАСС. Вариант 2



1. [3 балла] Найдите все тройки натуральных чисел $(A; B; C)$ такие, что:

- A — четырёхзначное число, составленное из одинаковых цифр,
- B — трёхзначное число, хотя бы одна из цифр которого равна 1,
- C — двузначное число, хотя бы одна из цифр которого равна 5,
- произведение $A \cdot B \cdot C$ является квадратом некоторого натурального числа.

2. [3 балла] Положительные числа x и y таковы, что значение выражения $K = \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{xy}$ не изменяется, если x уменьшить на 3, а y — увеличить на 3. Найдите все возможные значения выражения $M = x^3 - y^3 - 9xy$.

3. [5 баллов] а) Найдите все пары действительных чисел $(x; y)$ такие, что $(\sin \pi x - \sin \pi y) \sin \pi x = (\cos \pi x + \cos \pi y) \cos \pi x$.

б) Сколько пар целых чисел (x, y) удовлетворяют одновременно этому уравнению и неравенству

$$\arccos \frac{x}{4} + \arccos \frac{y}{9} < 2\pi?$$

4. [4 балла] В начале месяца было выделено 4 билета на праздничный концерт, которые планировалось случайным образом распределить между одиннадцатиклассниками. В конце месяца выяснилось, что будет выделено больше 4 билетов. Одиннадцатиклассники Петя и Вася вычислили, что вероятность им обоим вместе попасть на концерт в начале месяца была в 3,5 раза меньше, чем оказалась в конце месяца. Сколько всего было выделено билетов на концерт в конце месяца, если количество одиннадцатиклассников не изменилось?

5. [5 баллов] Точка O — центр окружности ω_1 , описанной около остроугольного треугольника ABC . Окружность ω_2 , описанная около треугольника BOC , пересекает отрезок AB в точке P . Найдите площадь треугольника ABC , если $AP = \frac{16}{5}$, $BP = 2$, $AC = 4$.

6. [6 баллов] На координатной плоскости изображена фигура $\Phi(\alpha)$, состоящая из всех точек, координаты $(x; y)$ которых удовлетворяют системе неравенств

$$\begin{cases} (x - 2 \cos \alpha)(y - 2 \sin \alpha) \geq 0, \\ x^2 + y^2 \leq 9. \end{cases}$$

Найдите максимальное значение M периметра (длины границы) фигуры $\Phi(\alpha)$ и укажите все значения α , при которых оно достигается.

7. [6 баллов] Шар Ω касается всех рёбер правильной усечённой пирамиды, а шар ω касается всех её граней. Найдите угол наклона бокового ребра пирамиды к плоскости её основания.



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

1 ☒ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА
1 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

n!

$A, B, C \in \mathbb{N}$; $A = \overline{aaaa}$ — *составлено из одинаковых цифр по условию*

$$A = \overline{aaaa} = 1000a + 100a + 10a + a = 1111a = 101 \cdot 11a, \text{ где } a - \text{цифра, } \begin{cases} a \in \mathbb{Z} \\ a \in \{0, 9\} \end{cases}$$

По условию. $A \cdot B \cdot C = k^2$, где $k \in \mathbb{N}$

$$A \cdot B \cdot C = 101 \cdot 11a \cdot B \cdot C = k^2 \Rightarrow k^2 : 101 : 11$$

так как $k^2 : 101$, то оно должно *содержать* в себе по крайней мере 2 *простых* множителя равных 101

$$(101 - \text{простое число}) \Rightarrow a \cdot B \cdot C : 101,$$

но $a < 10$, $C < 100$, значит они не могут

делиться на 101 $\Rightarrow B : 101$, учитывая, что

$$99 < B < 1000 \text{ — предположим: } \begin{cases} B = 101 \\ B = 202 \\ \dots \\ B = 909 \end{cases}$$

По условию B содержит ровно одну "1", из численных вариантов возможно только $B = 101$

$$\Rightarrow B = 101; A \cdot B \cdot C = 11 \cdot 101 \cdot 101 \cdot C \cdot a = 101^2 \cdot 11 \cdot C \cdot a$$

Аналогично, чтобы произведение было полным квадратом,

нужно, чтобы $11 \cdot C \cdot a : 11^2$; $C \cdot a : 11$, но



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☒ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА
2 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$a < 10, a \text{ 11-значное} \Rightarrow a:11 \Rightarrow C:11$$

возможные варианты для C , учитывая, что оно делится на 11:

$$\begin{cases} C=11 \\ C=22 \\ \dots \\ C=99 \end{cases}$$

По условию C содержит "5", из перечисленных вариантов подходит только $C=55$, получаем:

$$A \cdot B \cdot C = 101 \cdot 11 \cdot a \cdot 101 \cdot 55 = 101^2 \cdot 11^2 \cdot 5a = k^2$$

$$\text{Отсюда } k^2 : 5 \Rightarrow k : 5 \Rightarrow k^2 : 25, \text{ значит } a : 5$$

$$\text{Учитывая, что } a \in [0, 9] : a=5.$$

$$\Rightarrow \begin{cases} A = 101 \cdot 11 \cdot 5 = 5555 \\ B = 101 \\ C = 55 \end{cases}$$

$$\text{Ответ: } (A; B; C) = (5555; 101; 55)$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1	2	3	4	5	6	7
☐	☒	☐	☐	☐	☐	☐

СТРАНИЦА
1 из 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$A = \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{xy} ; x, y > 0$$

по условию: $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{xy} = \frac{1}{x-3} + \frac{1}{y+3} + \frac{1}{(x-3)(y+3)}$

$$\frac{x+y+1}{xy} = \frac{x-3+y+3+1}{(x-3)(y+3)}$$

$$\frac{x+y+1}{xy} = \frac{x+y+1}{(x-3)(y+3)} \quad |||$$

по условию $x, y > 0 \Rightarrow x+y+1 > 0$, значит

$$||| \Leftrightarrow \frac{1}{xy} = \frac{1}{(x-3)(y+3)}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} xy = (x-3)(y+3) ; xy = xy - 3y + 3x - 9 \\ x, y \neq 0 \\ x \neq 3 ; y \neq -3 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x, y \neq 0 ; x \neq 3 ; y \neq -3 \\ y = x - 3 \end{cases}$$

$$M = x^3 - y^3 - 9xy ; x^3 - y^3 - 9xy = x^3 - (x-3)^3 - 9x(x-3) =$$

$$= (x - x + 3)(x^2 + x(x-3) + (x-3)^2) - 9x(x-3) =$$

$$= 3x^2 + 3x^2 - 9x + 3x^2 - 18x + 27 - 9x^2 + 27x =$$

$$= 27$$

$\Rightarrow M(x) = 27$ — при любых x , удовлетворяющих ОДЗ.
Ответ: 27



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☒ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА
1 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

№3

$$a) \quad (\sin \pi x - \sin \pi y) \sin \pi x = (\cos \pi x + \cos \pi y) \cos \pi x$$

$$\Leftrightarrow \sin \frac{\pi x - \pi y}{2} \cos \frac{\pi x + \pi y}{2} \cdot \sin \pi x = 2 \cos \frac{\pi x + \pi y}{2} \cos \frac{\pi x - \pi y}{2} \cos \pi x$$

$$\cos \frac{\pi x + \pi y}{2} (\sin \frac{\pi x - \pi y}{2} \sin \pi x - \cos \frac{\pi x - \pi y}{2} \cos \pi x) = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \cos \frac{\pi x + \pi y}{2} = 0 \\ \sin \frac{\pi x - \pi y}{2} \sin \pi x - \cos \frac{\pi x - \pi y}{2} \cos \pi x = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \cos \frac{\pi}{2} (x+y) = 0 \\ \cos \left(\frac{\pi x - \pi y}{2} + \pi x \right) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \cos \frac{\pi}{2} (x+y) = 0 \\ \cos \frac{\pi}{2} (3x-y) = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \frac{\pi}{2} (x+y) = \frac{\pi}{2} + \pi n \\ \frac{\pi}{2} (3x-y) = \frac{\pi}{2} + \pi k \end{cases} \quad (n, k \in \mathbb{Z}) \Leftrightarrow \begin{cases} x+y = 1+2n \\ 3x-y = 1+2k \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y = 1+2n-x \\ y = 3x-1-2k \end{cases} \Rightarrow (x; 1+2n-x); (x; 3x-1-2k)$$

решение уравнения $\begin{cases} x \in \mathbb{R} \\ k, n \in \mathbb{Z} \end{cases}$

$$c) \quad \arccos \frac{x}{4} + \arccos \frac{y}{9} \leq 2\pi, \quad x, y \in \mathbb{Z}$$

$$\arccos x \in [0; \pi] \text{ при } x \in [-1; 1]$$

$\Rightarrow$ неравенство будем решать в два случая

$$\text{случай 1: } \begin{cases} \arccos \frac{x}{4} = \pi \\ \arccos \frac{y}{9} = \pi \end{cases} \quad (\text{т.к. } \arccos \frac{x}{4} + \arccos \frac{y}{9} \leq 2\pi)$$

~~решение~~



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☒	☐	☐	☐	☐

СТРАНИЦА
2 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \frac{x}{4} = -1 \\ \frac{y}{9} = -1 \end{cases} \quad \begin{cases} x = -4 \\ y = -9 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = -4 \\ 2n = -4 \\ 2k = -9 \end{cases}$$

при таких x, y решение неравенств нет, значит
при всех остальных значениях x, y неравенство верно,

$$\begin{cases} y = 1 + 2n - x \\ y = 3x - 1 - 2k \end{cases} \in \mathbb{Z} \quad \begin{matrix} \text{— для } n \\ \text{— для } k \end{matrix} \quad \text{Бесконечно много}$$

Ответ: а) $(x; 1 + 2n - x; 3x - 1 - 2k)$
при $x \in \mathbb{R}; n, k \in \mathbb{Z}$
б) Бесконечно много.



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☒	☐	☐	☐

СТРАНИЦА

1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

№4

A_1 - ~~оба~~ Теня и Вася играют шахматы по их условию

A_2 - Теня и Вася играют шахматы по их условию

$$P(A_1) = \frac{4}{n} \cdot \frac{3}{n-1}, \text{ где } n - \text{ кол-во школьников}$$

$$P(A_2) = \frac{k}{n} \cdot \frac{k-1}{n-1}, \text{ где } k - \text{ кол-во шахматистов по условию}$$

по условию $\frac{P(A_2)}{P(A_1)} = 3,5$

$$\frac{k(k-1)}{4 \cdot 3} = 3,5; \quad k^2 - k = 42$$

$$k^2 - k - 42 = 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} k = -6 \\ k = 7 \end{cases} \Rightarrow k = 7 \quad (\text{числов все может быть отрицательное число})$$

Ответ: 7



На одной странице можно оформлять **только одну задачу**. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☒ 7 ☐

СТРАНИЦА
1 из 4

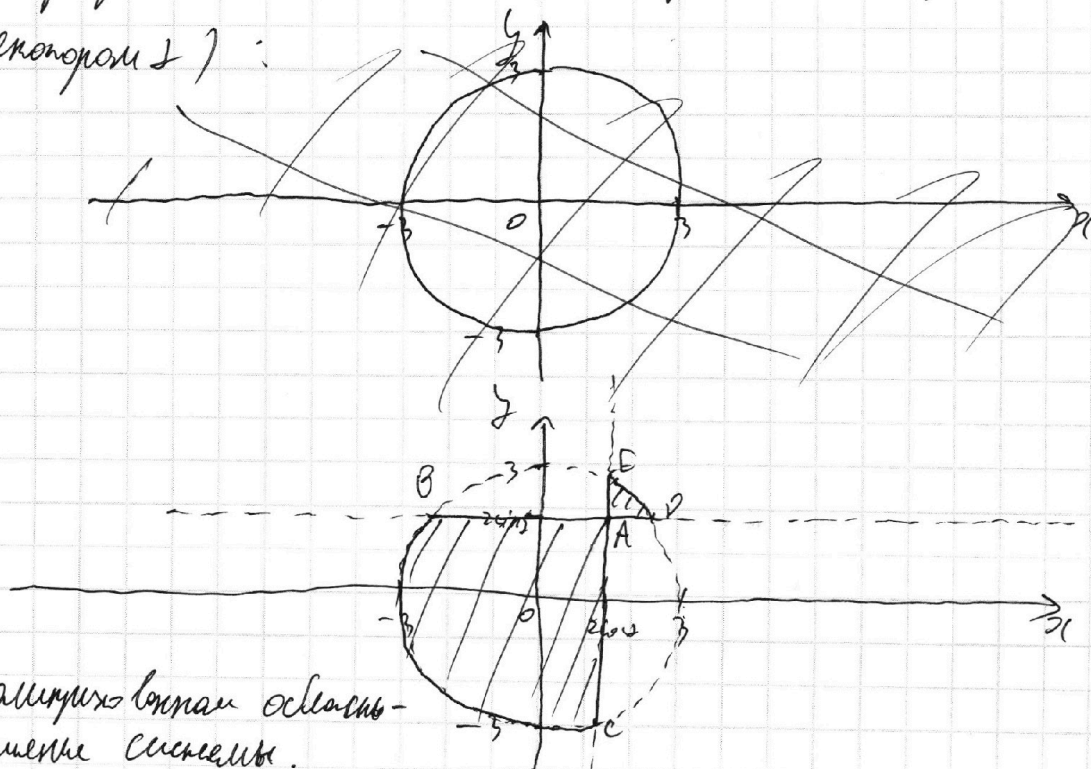
Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

№6

$$\begin{cases} (x-2\cos 2)(y-2\sin 2) \geq 0 & (1) \\ x^2 + y^2 \leq 9 & (2) \end{cases}$$

Построим график. Изр-во (2) задаёт круг радиуса 3 с центром в $(0;0)$. При определении значений параметра 2 прямые $x=2\cos 2$ и $y=2\sin 2$ разделим плоскость на 4 четверти. Невенские ил строгие, потому $x=2\cos 2$ и $y=2\sin 2$ — решения (1)

График системы будет выглядеть как (при некотором 2):



заштрихованная область — решение системы.



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☒ 7 ☐

СТРАНИЦА
2 ИЗ 4

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Периметр этой фигуры будет равен сумме длин окружностей. Рассмотрим ГМТ A — пересечение кривых $2\cos t$ и $2\sin t$. Значит, что $x = 2\cos t$ и $y = 2\sin t$ — пересечение на круговом параметризации — окружности с центром $(0; 0)$ и радиусом 2.

Тогда ГМТ точек A — окружность с центром $(0; 0)$ и радиусом 2.

$$\text{Имеем: } A(x; y) = A(2\cos t; 2\sin t)$$

$$x^2 + y^2 = 4\cos^2 t + 4\sin^2 t = 4 \Rightarrow x^2 + y^2 = 4.$$

$\Rightarrow$ точка A всегда будет находиться на окружности (2).

$$\angle BAC = \frac{\angle BOC + \angle EOD}{2} \Rightarrow \angle BOC + \angle EOD = 2\angle BAC = 2 \cdot 90^\circ = 180^\circ$$

$\Rightarrow \angle BOC + \angle EOD$ не зависит от точки A .

$$\angle BOC + \angle EOD = \frac{3\pi}{180} \cdot 2\angle BOC + \frac{3\pi}{180} \cdot 2\angle EOD = \frac{3\pi}{180} (\angle BOC + \angle EOD) =$$

$$= \frac{3\pi}{180} \cdot 180 = 3\pi. \text{ — сумма длин дуг } \angle BOC \text{ и } \angle EOD.$$

Осталось найти $BP + EC$.

$$\text{Находим координаты } E \text{ и } C: \begin{cases} x = 2\cos t \\ x^2 + y^2 = 9 \end{cases} \Rightarrow 4\cos^2 t + y^2 = 9$$

$$y = \pm \sqrt{9 - 4\cos^2 t} \Rightarrow E(2\cos t; \sqrt{9 - 4\cos^2 t}); C(2\cos t; -\sqrt{9 - 4\cos^2 t})$$

$$\Rightarrow EC = \sqrt{(2\cos t - 2\cos t)^2 + (\sqrt{9 - 4\cos^2 t} + \sqrt{9 - 4\cos^2 t})^2} = 2\sqrt{9 - 4\cos^2 t}$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☒ 7 ☐

СТРАНИЦА
3 из 4

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Аналогично находим координаты B и D — пересечение

лучей $y = 2 \sin 2t$ окружности $x^2 + y^2 = 9$

Найдем $D(\sqrt{5+4\cos^2 2t}; 2 \sin 2t)$
 $B(-\sqrt{5+4\cos^2 2t}; 2 \sin 2t)$

$$L_{BD} = 2\sqrt{5+4\cos^2 2t}$$

M -периметр фигуры, найденная из системы (1) и (2).

$$M = BD + EC + L_{BC} + L_{ED} = BD + EC + 3\pi$$

M — зависит от $BD + EC$, что максимизировать нужно

Максимизируем $BD + EC$, для этого $f(t) = BD + EC$

$$f(t) = 2\sqrt{5+4\cos^2 2t} + 2\sqrt{5+4\sin^2 2t}$$

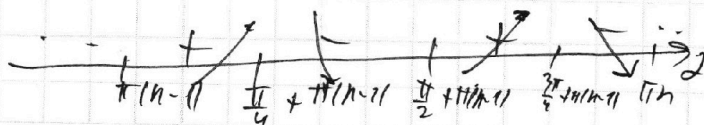
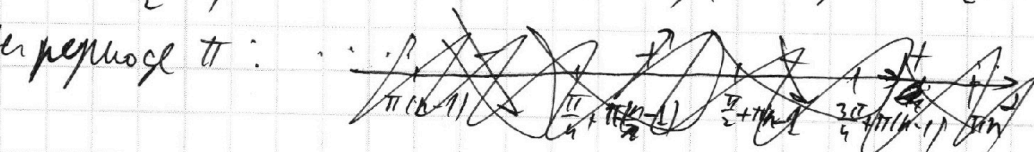
$$f'(t) = 2 \left(\frac{-2\cos 2t \sin 2t}{2\sqrt{5+4\cos^2 2t}} + \frac{2 \sin 2t \cos 2t}{2\sqrt{5+4\sin^2 2t}} \right) =$$

$$= 2 \cos 2t \sin 2t \cdot \frac{-\sqrt{5+4\sin^2 2t} + \sqrt{5+4\cos^2 2t}}{\sqrt{5+4\cos^2 2t} \sqrt{5+4\sin^2 2t}}$$

$$f'(t) = 0 \text{ при } \begin{cases} \cos 2t = 0 \\ \sin 2t = 0 \end{cases} \quad \begin{matrix} 2t = \frac{\pi}{2} + \pi n \\ 2t = \pi n \end{matrix} \quad (n \in \mathbb{Z})$$

$$\frac{1-\cos 2t}{2} = \frac{1+\cos 2t}{2}, \quad 2\cos 2t > 0; \quad 2t = \frac{\pi}{2} + \pi n; \quad (n \in \mathbb{Z}) \quad t = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi n}{2}$$

не пропускаем π :





На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

☐☐☐☐☐☒☐

СТРАНИЦА
4 из 4

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$\Rightarrow$ наибольшее значение достигаем $f(\frac{\pi}{4})$

$$f = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi n}{2}, \text{ где } n \in \mathbb{Z};$$

$$\begin{aligned} f(\frac{\pi}{4}) &= 2\sqrt{5+4\cos^2\frac{\pi}{4}} + 2\sqrt{5+4\sin^2\frac{\pi}{4}} = \\ &= 2\sqrt{5+2} + 2\sqrt{5+2} = 4\sqrt{7} \end{aligned}$$

$\Rightarrow B D + E C = 4\sqrt{7}$ — наибольшее значение

$\hookrightarrow$ наибольшее значение M :

$$M = B D + E C + 3\pi = 4\sqrt{7} + 3\pi$$

$$\text{Ответ: } M_{\text{наибольшее}} = 4\sqrt{7} + 3\pi$$

$$\text{где } f = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi n}{2} \text{ где } n \in \mathbb{Z}$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☒

СТРАНИЦА
1 из 3

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

~ 4

Для красоты рассмотрим расставленный кубический
узелок. ~~В расставленном узелке~~ ~~не будет~~ ~~зависит от~~

Деление не выводится, её "предельная" норма
подходит для n-угольной узелковой структуры, но
она не подходит для n-угольной структуры, где
для узлов n.

Шар Ω касается ребер

пирамиды, значит он вписан

касается ребер A_1A_2 ; A_1A_3 ; A_2A_3 ;

A_2A_3 . По св-ву касательной правильной

пирамиды: $AA_1A_2A_3$ — равносторонняя

треугольная; в этой плоскости сечение Ω —

окружность, вписанная в треугольник.

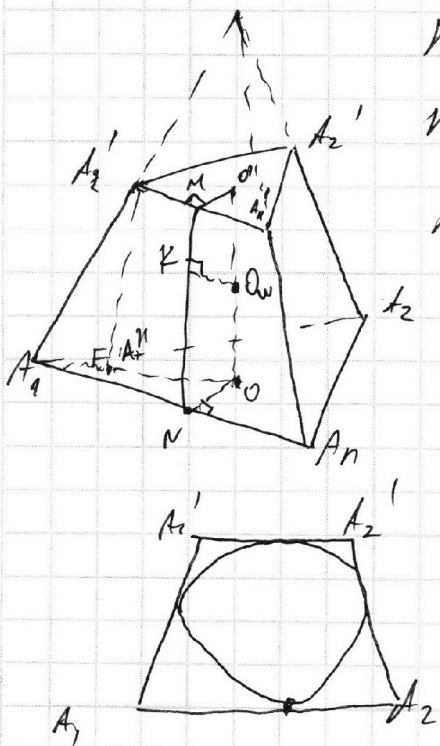
по св-ву впис. окружности:

$$A_1A_1' + A_2A_2' = A_1A_2' + A_2A_1'$$

$$\Rightarrow 2A_1A_1' = 2A_2A_2' = A_1A_2' + A_2A_1'$$

пусть стороны правильного n-угольника: a, сумма b

поэтому общее ребро: $A_1A_1' = \frac{a+b}{2}$





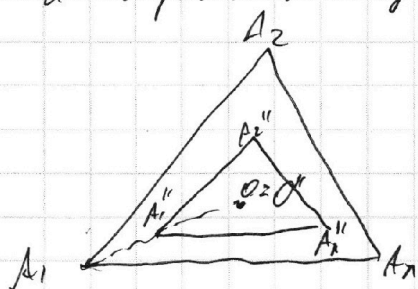
На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☒

СТРАНИЦА
2 из 3

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Отметим перпендикуляры $A_1'A_1''$ на плоскость $(A_1A_2A_3)$.
Спроецируем всю плоскость $(A_1'A_2'A_3'')$ на плоскость $(A_1A_2A_3)$
и получим многоугольник $A_1''A_2''...A_3''$:



Знаем, что $A_1'O' = \frac{\sqrt{3}}{3}a$, тогда

$A_1''O = \frac{\sqrt{3}}{3}a$, также знаем, что

$A_2O = \frac{\sqrt{3}}{3}b \Rightarrow A_1A_1'' = \frac{\sqrt{3}}{3}(b-a)$

$\Rightarrow$ По теореме Пифагора: $A_1'A_1'' = \sqrt{A_1A_1'^2 - A_1A_1''^2} = \sqrt{\left(\frac{b+a}{2}\right)^2 - \left(\frac{\sqrt{3}}{3}(b-a)\right)^2}$

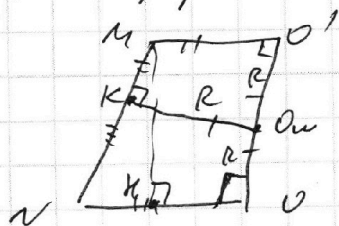
$$A_1'A_1'' = \frac{1}{2\sqrt{3}} \sqrt{-a^2 + 4ab - b^2}$$

$$A_1'A_1'' = \frac{1}{2\sqrt{3}} \sqrt{a^2 + 4ab - b^2} = OO' = 2R, \text{ где } R - \text{ радиус ш.}$$

$$\Rightarrow R = \frac{1}{4\sqrt{3}} \sqrt{-a^2 + 4ab - b^2} \quad (1)$$

Найдем R по-другому: рассмотрим кубик, в который вписаны грань $A_1A_1'A_2'A_3$ (кубок K), проходящая через $O'O$. Тогда мы вписали $(A_1'A_2'A_3')$ в $(A_1A_2A_3)$, то

они - сечения $O'O$, центр ш:



$MO' = \frac{\sqrt{3}}{6}a$, $NO = \frac{\sqrt{3}}{6}b$ - то есть
удвоенного радиуса ш.

$$MN = \frac{\sqrt{3}}{6}a + \frac{\sqrt{3}}{6}b = \frac{\sqrt{3}}{6}(a+b)$$

(ведь, как сумма сечений касательных)

Отметим $MI \perp NO$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☒

СТРАНИЦА
3 из 3

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$NK = \frac{\sqrt{3}}{6}b - \frac{\sqrt{3}}{6}a = \frac{\sqrt{3}}{6}(b-a)$$

$$\Rightarrow \text{по Тл. Пифагора: } MK = \sqrt{NM^2 - NK^2} = \frac{\sqrt{3}}{6} \sqrt{(a+b)^2 - (b-a)^2} =$$

$$= \frac{\sqrt{3}}{6} \sqrt{a^2 + 2ab + b^2 - b^2 + 2ab - a^2} = \frac{\sqrt{3}}{6} \cdot 2 \sqrt{ab} = \frac{\sqrt{3}}{3} \sqrt{ab}$$

$$\Rightarrow OO' = 2R = \frac{\sqrt{3}}{3} \sqrt{ab}; \quad R = \frac{\sqrt{3}}{6} \sqrt{ab} \quad (2)$$

$$\Rightarrow \text{из (1) и (2):}$$

$$\frac{\sqrt{3}}{6} \sqrt{ab} = \frac{1}{4\sqrt{3}} \sqrt{-a^2 + 14ab - b^2}$$

$$4ab = -a^2 + 14ab - b^2$$

$$a^2 - 10ab + b^2 = 0; \quad \left(\frac{a}{b}\right)^2 - 10 \frac{a}{b} + 1 = 0$$

$$\frac{a}{b} = 5 - 2\sqrt{6}; \quad \frac{a}{b} = 5 + 2\sqrt{6}$$

$$\text{max. угол } \angle A_1'AO = \angle$$

$$\cos \angle = \frac{A_1A_1''}{A_1A_1'} = \frac{\frac{1}{\sqrt{3}}(b-a)}{\frac{1}{2}(a+b)} = \frac{2}{\sqrt{3}} \cdot \frac{1 - \frac{a}{b}}{\frac{a}{b} + 1} = \frac{2}{\sqrt{3}} \cdot \frac{1 - 5 + 2\sqrt{6}}{5 - 2\sqrt{6} + 1}$$

$$= \frac{2}{\sqrt{3}} \cdot \frac{2\sqrt{6} - 4}{6 - 2\sqrt{6}} = \frac{2\sqrt{6} - 4}{3\sqrt{3} - 3\sqrt{2}} \cdot \frac{(2\sqrt{6} - 4)(3\sqrt{3} + 3\sqrt{2})}{(24 - 48)} =$$

$$\frac{(2\sqrt{6} - 4) \cdot 3(\sqrt{3} + \sqrt{2})}{6\sqrt{2} - 4\sqrt{3}} = \frac{(2\sqrt{6} - 4)(\sqrt{3} + \sqrt{2})}{3}$$

$$\angle = \arccos \frac{2\sqrt{6} - 4}{3\sqrt{3} - 3\sqrt{2}}$$

$$\text{Ответ: } \arccos \frac{2\sqrt{6} - 4}{3\sqrt{3} - 3\sqrt{2}}$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$x, y > 0$

$$\frac{x+y}{xy} + \frac{1}{xy} = \frac{y+3+x-3}{(y+3)(x-3)} + \frac{1}{(x-3)(y+3)}$$

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{xy} = \frac{1}{x-3} + \frac{1}{y+3} + \frac{1}{(x-3)(y+3)}$$

$$M = x^3 - y^3 - 9xy = (x-y)(x^2 + xy + y^2) - 9xy$$

$$\frac{1}{x} - \frac{1}{x-3} + \frac{1}{y} - \frac{1}{y+3} + \frac{1}{xy} - \frac{1}{(x-3)(y+3)} = 0$$

$$\frac{x-3-2}{x(x-3)} + \frac{y+3-y}{y(y+3)} + \frac{x^2y - 3y + 3x - 9 - xy}{(x-3)(y+3)} = 0$$

$$\frac{3}{y(y+3)} - \frac{3}{x(x-3)} + \frac{3x - 3y - 9}{(x-3)(y+3)} = 0$$

$$3x^2 - 9x - 3y^2 - 9y + 3x^2y - 3xy^2 - 9xy = 0$$

$$\frac{3x^2(1+y) - 3y^2(1+x) + 9 - 9(x+1)(y+1)}{y x (y+3)(x-3)} = 0$$

$$M = x^3 - y^3 - 9xy = (x-y)(x^2 + xy + y^2) - 9xy$$

$$\frac{x+y+1}{xy} = \frac{y+3+x-3+1}{(x-3)(y+3)}$$

$$\begin{cases} x, y \neq 0 \\ x \neq 3 \\ y \neq -3 \end{cases}$$

$$xy - 3y + 3x - 9 = xy$$

$$y = x - 3$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7
☐ ☐ ☐ ☐ ☐ ☐ ☐

СТРАНИЦА
 __ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

~ 1.

$A, B, C \in \mathbb{N}$

$$A = \overline{a_1 a_2 a_3 a_4} \quad A = \overline{a a a a} = 1000a + 100a + 10a + a = 1100a + 11a = 1111a$$

$$B = \overline{b_1 b_2 b_3} \quad \begin{cases} b_1 = 1 \\ b_2 = 1 \\ b_3 = 1 \end{cases}$$

$$C = \overline{c_1 c_2} \quad \begin{cases} c_1 = 5 \\ c_2 = 5 \end{cases}$$

$$A \cdot B \cdot C = k^2 \quad ; \quad \forall k \in \mathbb{N}$$

$$\Rightarrow A \cdot B \cdot C = 11 \cdot 101 \cdot B \cdot C = a$$

$$101\text{-нечное} \Rightarrow B \cdot C : 101, \text{ но } C < 100 \Rightarrow B : 101$$

$$B = K \cdot 101, \text{ причем чик. } B < 1000, \text{ то}$$

$$K \in \{1; 9\} : B = 101; 909$$

$$\text{но чик. } B = 101.$$

$$\Rightarrow A \cdot B \cdot C = 11 \cdot 101 \cdot 101 \cdot C = 101^2 \cdot 11 \cdot C = k^2$$

$$\Rightarrow C : 11 \Rightarrow C = 55; a = 5$$

$$\Rightarrow \begin{cases} A = 5555 \\ B = 101 \\ C = 55 \end{cases}$$

$$= 2 \left(\frac{8 \sin \alpha \cos \alpha}{2 \sqrt{5+4 \sin^2 \alpha}} + \frac{8 \cos \alpha \sin \alpha}{2 \sqrt{5+4 \cos^2 \alpha}} \right) =$$

$$= 8 \sin \alpha \cos \alpha \cdot \frac{\sqrt{5+4 \cos^2 \alpha} + \sqrt{5+4 \sin^2 \alpha}}{\sqrt{5+4 \sin^2 \alpha} \sqrt{5+4 \cos^2 \alpha}}$$

$$\begin{cases} \sin \alpha = 0 \\ \cos \alpha = 0 \end{cases}$$

$$\sqrt{5+4 \cos^2 \alpha} = \sqrt{5+4 \sin^2 \alpha} \quad ; \quad 8 \sqrt{2} \cos^2 \alpha + 8 \sqrt{2} \sin^2 \alpha = 8 \sqrt{2} \quad ; \quad \cos^2 \alpha = \sin^2 \alpha$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

~4

$$2x^3 + 12x^2 + 12x + 1 = 40$$

$$= 2 \cdot 8 + 12 \cdot 4 + 12 \cdot 2 + 1 = 16 + 48 + 24 + 1 = 89$$

n - кол-во окружностей в классе.

$$P(A_1) = \frac{4}{n} \cdot \frac{3}{n-1}$$

$$P(A_2) = \frac{k}{n} \cdot \frac{k-1}{n-1}$$

$$\frac{P(A_2)}{P(A_1)} = \frac{k(k-1)}{4 \cdot 3} = 3.5; \quad k^2 - k = 42$$

$$k^2 - k - 42 = 0$$

$$\frac{1 - \cos 2\alpha}{2} = \frac{1 + \cos 2\alpha}{2}$$

$$2 \cos 2\alpha = 0$$

$$3 \cdot 5 \cdot 4 = 7 \cdot 2 = 14$$

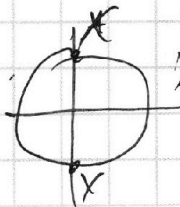
$$94 \cdot 3 = 207 \quad 12 = 92$$

$$\sqrt{6} - \sqrt{8}$$

$$\begin{cases} K=6 \\ K=7 \end{cases} \Rightarrow K=4$$

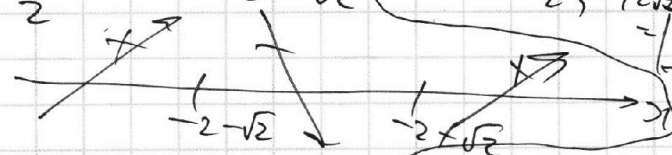
~6

$$V = 16 - 8 = 8$$



$$x = \frac{-4 \pm 2\sqrt{2}}{2} = -2 \pm \sqrt{2}$$

$$xy = 6$$



$$\begin{aligned} & -2 \cdot 120 + 14\sqrt{2} + 12(6 + 4\sqrt{2}) - \\ & -23 - 12\sqrt{2} = \\ & = -40 - 28\sqrt{2} + 42 + 48\sqrt{2} - \\ & -23 - 12\sqrt{2} = \\ & = -9 + 8\sqrt{2} \end{aligned}$$

$$M(0) = 1$$

$$M(2) = 2 \cdot 8 + 12 \cdot 4 + 12 \cdot 2 + 1 = 16 + 48 + 24 + 1 = 89$$

$$2 \cdot 5\sqrt{2} + 20\sqrt{2} = 30\sqrt{2}$$

$$= 24\sqrt{2}$$

$$y \neq 0; \quad -x - 1 \neq 0; \quad x \neq -1$$

$$x \neq 3; \quad y \neq -3; \quad -x - 1 \neq -2; \quad x \neq 2$$

$$4\sqrt{2} \leq 6$$

$$\sqrt{4} \leq 1.5$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x \neq 0 \\ x \neq -1 \\ x \neq 2 \\ x \neq 3 \end{cases}$$

$$-1 \pm 2\sqrt{2}$$

$$M(-2-\sqrt{2}) = 2 \cdot (-2-\sqrt{2})^3 + 12(-2-\sqrt{2})^2 + 12(-2-\sqrt{2}) + 1$$

$$= -2 \cdot 18 + 12\sqrt{2} + 12 + 2\sqrt{2} + 12(4 + 4\sqrt{2} + 2) - 24 - 12\sqrt{2} + 1$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☒ 3 ☒ 4 ☒ 5 ☒ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА
1 из 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$K = \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{xy} = \frac{1}{x-3} + \frac{1}{y+3} + \frac{1}{(x-3)(y+3)}$$

по условию.

$$\frac{x+y+1}{xy} = \frac{x-3+y+3+1}{(x-3)(y+3)}$$

$$\frac{x+y+1}{xy} = \frac{x+y+1}{(x-3)(y+3)}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x+y+1=0 \\ xy = (x-3)(y+3) \\ x, y \neq 0 \\ x \neq 3 \\ y \neq -3 \end{cases}$$

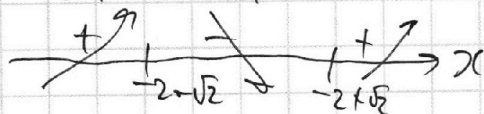
$$\Leftrightarrow \begin{cases} x, y \neq 0; x \neq 3; y \neq -3 \\ y = -x-1 \\ y = x-3 \end{cases}$$

$$1) y = -x-1: M = x^3 - y^3 - 9xy$$

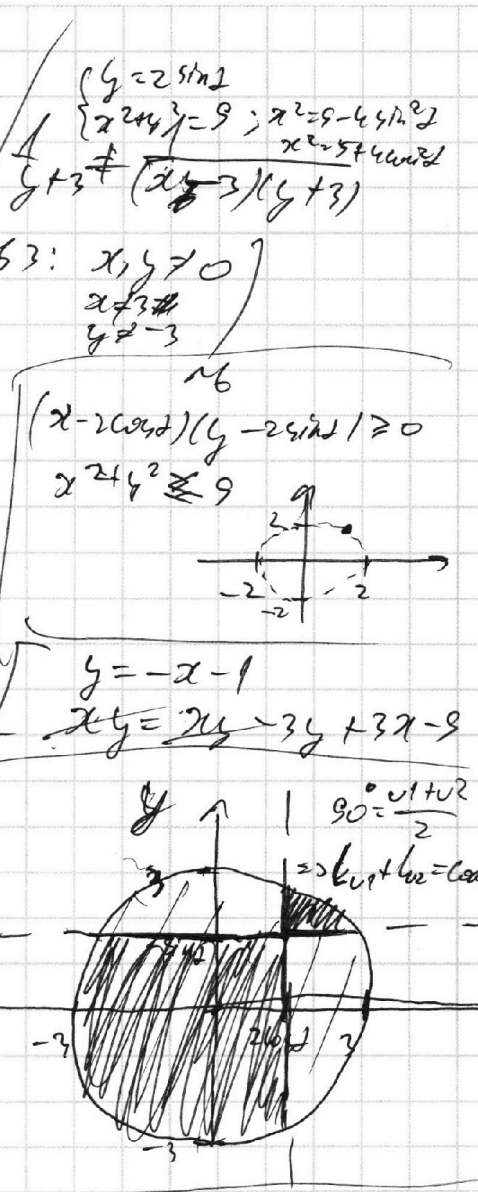
$$x^3 - y^3 - 9xy = x^3 + (x+1)^3 + 9x(x+1) = x^3 + x^3 + 3x^2 + 3x + 1 + 9x^2 + 9x = 2x^3 + 12x^2 + 12x + 1$$

$$M = 2x^3 + 12x^2 + 12x + 1$$

$$M'(x) = 6x^2 + 24x + 12 = 6(x^2 + 4x + 2) = 6(x+2+\sqrt{2})(x+2-\sqrt{2})$$



по условию: $x \neq 0; x \neq 3; y \neq 0 \Rightarrow x \neq -1; y \neq -3 \Rightarrow x \neq 2$





На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

1 ☐ 2 ☒ 3 ☒ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА ~~2~~ ИЗ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Сравним $M(-2-\sqrt{2})$ и $M(0)$

$$M(-2-\sqrt{2}) = 2(-2-\sqrt{2})^3 + 12(-2-\sqrt{2})^2 + 12(-2-\sqrt{2}) + 1 = 8 + 8\sqrt{2}$$

$$M(0) = 1 \Rightarrow M(0) < M(-2-\sqrt{2})$$

$\Rightarrow$ по монотонности ~~функции~~ ^{решения} ~~уравнения~~ $M(x) = 1$

Всего 3 ~~решения~~ (по крайней мере на промежутке $(-\infty; -2-\sqrt{2})$ будет одно), поэтому $M(x) = 1$ — имеет три решения.

$$M(2) = 89 > M(-2-\sqrt{2}), \text{ но учитывая монотонность}$$

получено, что $M(3) > M(2) > M(-2-\sqrt{2})$ и ~~решения~~ ^{уравнения} ~~уравнения~~:

$$\begin{cases} M(x) = M(3) \\ M(x) = M(2) \end{cases} \Rightarrow \text{имеет одно решение}$$

$$\Rightarrow M(x) \neq M(2) \text{ и } M(x) \neq M(3) \\ M(x) \neq 89 \text{ и } M(x) \neq 199$$

$-1 \in (-2-\sqrt{2}; 2+\sqrt{2})$ по теореме о монотонности, известно, что если y — уравнение $M(x) = M(-1)$ имеет $2x$ -но на отрезке $(-\infty; -2-\sqrt{2})$.

$$2/y = x-3; M(x) = x^3 - (x-3)^3 - 9x(x-3)$$

$$\text{т.е. } x^3 - (x-3)^3 - 9x(x-3) = x^3 - x^3 + 9x^2 - 27x + 27 - 9x^2 + 27x = 27$$

$$\Rightarrow M(x) = 27 \text{ — при любых } x, \text{ удовлетворяющих ОВЗ}$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

1 2 3 4 5 6 7
☐ ☐ ☐ ☐ ☐ ☐ ☐

СТРАНИЦА
 _ ИЗ _

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

~3

a) $(\sin \pi x - \sin \pi y) \sin \pi x = (\cos \pi x + \cos \pi y) \cos \pi x$

$\xrightarrow{11}$

$2 \sin \frac{\pi x - \pi y}{2} \cos \frac{\pi x + \pi y}{2} \sin \pi x = 2 \cos \frac{\pi x + \pi y}{2} \cos \frac{\pi x - \pi y}{2} \cos \pi x$

$\xrightarrow{11}$

$\cos \frac{\pi x + \pi y}{2} \mid \sin \frac{\pi(x-y)}{2} \sin \pi x - \cos \frac{\pi x - \pi y}{2} \cos \pi x = 0$

$\left[\begin{array}{l} \cos \frac{\pi(x+y)}{2} = 0 ; \quad \frac{\pi(x+y)}{2} = \frac{\pi}{2} + \pi n ; n \in \mathbb{Z}. \quad (1) \\ \sin \frac{\pi(x-y)}{2} \sin \pi x - \cos \frac{\pi(x-y)}{2} \cos \pi x = 0 \quad (2) \end{array} \right.$

(1): $\frac{x+y}{2} = \frac{1}{2} + n ; \quad x+y = 1+2n$

$y = 1+2n-x ; n \in \mathbb{Z}$

(2): $\cos \left(\frac{\pi(x-y)}{2} + \pi x \right) = 0$

~~$\frac{\pi(x-y)}{2} + \pi x = \frac{\pi}{2} + \pi k ; k \in \mathbb{Z}$~~

$\frac{3x-y}{2} = \frac{1}{2} + k ; \quad 3x-y = 1+2k$

Ответ: а)

$y = 3x - 1 - 2k$

д) $x, y \in \mathbb{Z} : \arccos \frac{x}{4} + \arccos \frac{y}{3} < 2\pi$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\begin{cases} y = 1 + 2n - x \\ y = 3x - 1 - 2k \end{cases} \quad ; n, k \in \mathbb{Z}$$

$$\arccos \frac{x}{4} + \arccos \frac{y}{5} < 2\pi$$

$$\sqrt{\frac{156}{25} - 2^2} =$$

$$= \frac{256}{25} - 4 = \sqrt{\frac{256 - 100}{25}} =$$

$$= \frac{156}{25} = \frac{2}{5} \sqrt{39}$$

$$\frac{156}{25} \div \frac{4}{5} = \frac{156}{20} = \frac{39}{5}$$

~~$$\arccos \frac{x}{4} + \arccos \frac{1+2n-x}{5} < 2\pi$$~~
~~$$\arccos \frac{x}{4} \in [0, \pi]$$~~
~~$$\arccos \frac{1+2n-x}{5} \in [0, \pi]$$~~

Синусовое уравнение не берем, - бо не берем:

$$\begin{cases} \arccos \frac{x}{4} = \pi \\ \arccos \frac{y}{5} = \pi \end{cases}$$

по сути из тех же уравнений надо вывести решение
эти случаи

$$\begin{cases} \arccos \frac{x}{4} = \pi \Rightarrow \frac{x}{4} = -1; x = -4 \\ \arccos \frac{y}{5} = \pi \Rightarrow \frac{y}{5} = -1; y = -5 \end{cases}$$

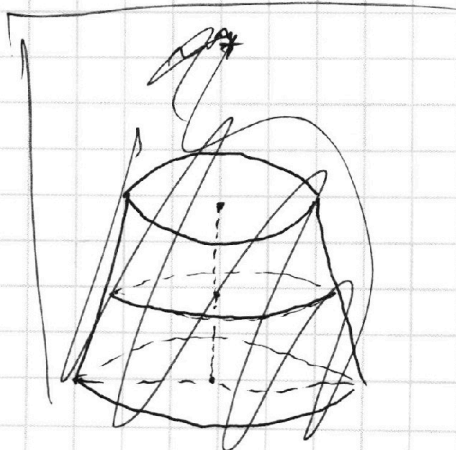
~~$$x = -4; y = 3x$$~~

$$1) \quad y = 1 + 2n - x; \quad y = -5 = 1 + 2n + 4$$

$$2n = -5 - 5 - 4; \quad 2n = -14; \quad n = -7$$

$$2) \quad y = 3x - 1 - 2k$$

Ошибки/бесполезно много



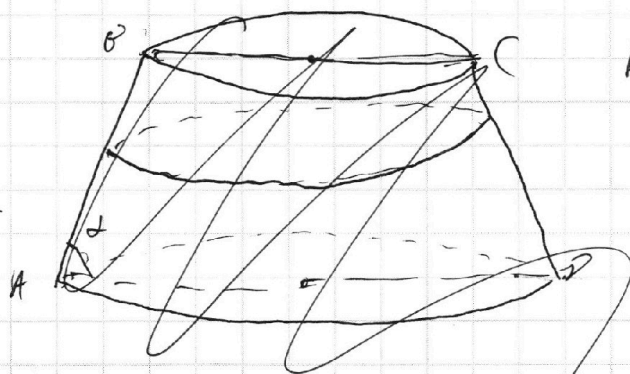


На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

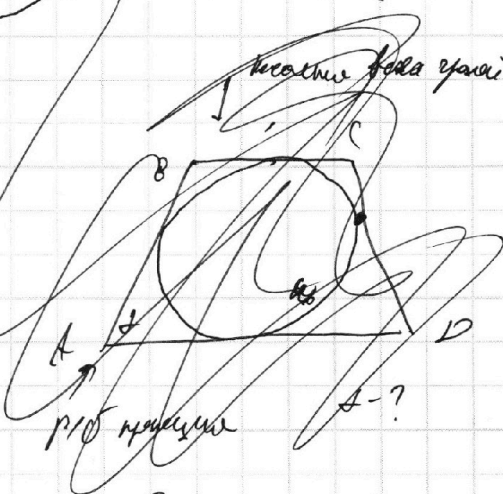
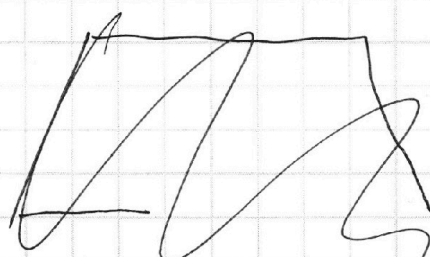
1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



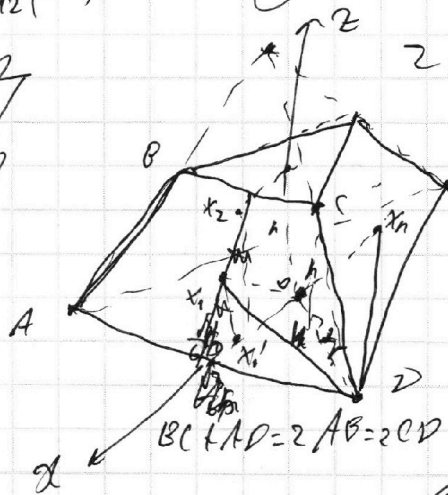
$$R = \frac{\sqrt{\frac{1}{4}(a+b)^2 - \frac{1}{3}(b-a)^2}}{2} =$$
$$= \frac{\sqrt{3a^2 + 6ab + 3b^2 - 4b^2 + 4ab}}{2} =$$
$$= \frac{\sqrt{-b^2 - a^2 + 4ab}}{2}$$



$$X_1 O = \frac{\sqrt{3}}{6} \quad \frac{b-a}{2} = \frac{\sqrt{3}}{12}(b-a)$$

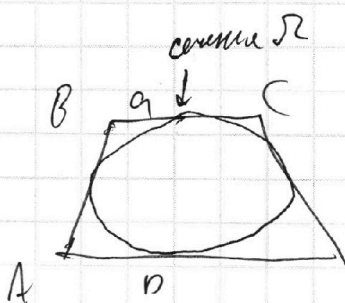
$$X_1 \left(\frac{\sqrt{3}}{12}(b-a); 0; \frac{b-a}{2} \right)$$

$$O_2 \left(0; 0; \frac{-b^2 - a^2 + 4ab}{2} \right)$$



$$2R = \frac{b-a}{2} = \frac{\sqrt{b^2 - a^2}}{2}$$

$x_1, x_2, \dots, x_n$ — координаты



касание дуга края

$$\frac{\sqrt{3}}{2} a \cdot \frac{2}{3} = \frac{1}{3} a \Rightarrow O_1 = \frac{1}{3}(b-a)$$

$$CD = (a+b) \cdot \frac{1}{2} \Rightarrow \cos \alpha = \frac{2(b-a)}{\sqrt{4a^2 + b^2}}$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

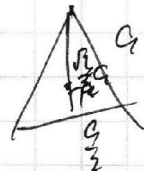
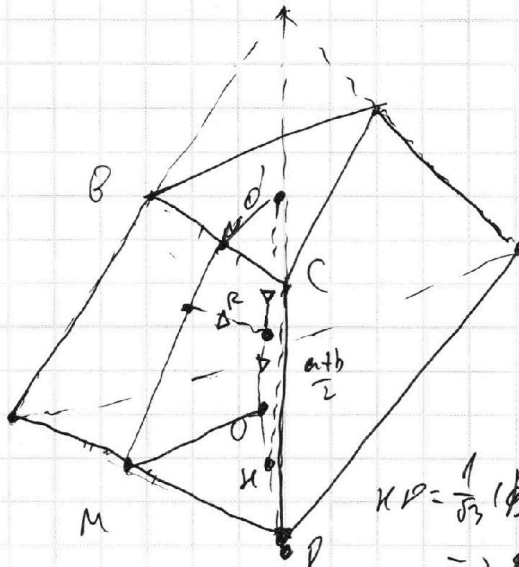
Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\cos \alpha = \frac{2(b-a)}{\sqrt{3}(a+b)}$$

$$= \frac{2(1-\frac{5}{6})}{\sqrt{3}(\frac{10}{6}+1)}$$

$$= \frac{2(1-5+2\sqrt{6})}{\sqrt{3}(5-2\sqrt{6}+1)}$$

$$= \frac{2(3\sqrt{6}-5)}{\sqrt{3}(6-2\sqrt{6})}$$



$$KP = \frac{1}{\sqrt{3}}(b-a)$$

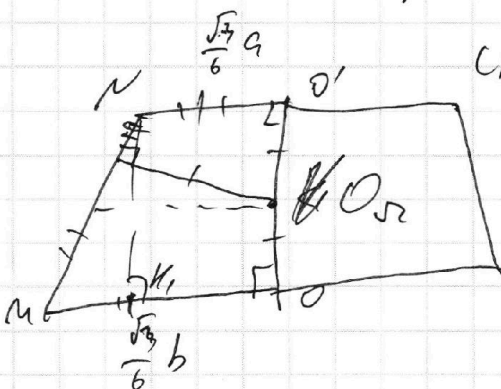
$$\Rightarrow \text{...}$$

$$CP = \sqrt{\left(\frac{a+b}{2}\right)^2 - \left(\frac{1}{\sqrt{3}}(b-a)\right)^2}$$

$$P = \frac{1}{2} \sqrt{(a^2+ab+b^2) - 4(b^2-ab) + 3}$$

$$\frac{1}{\sqrt{3}}a + \frac{1}{\sqrt{3}}b =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{3}}(a+b) = MN$$



$$MN = \frac{\sqrt{3}}{6}(a+b)$$

$$\Rightarrow \text{...}$$

$$\odot \frac{1}{4\sqrt{3}} \cdot \sqrt{4ab-a^2-b^2}$$

$$MN, OP = \frac{\sqrt{3}}{6}(b-a)$$

$$OQ = \sqrt{\left(\frac{\sqrt{3}}{6}(a+b)\right)^2 - \left(\frac{\sqrt{3}}{6}(b-a)\right)^2} = \frac{\sqrt{3}}{6} \sqrt{a^2 + 2ab + b^2 - b^2 + 2ab - a^2} =$$

$$= \frac{\sqrt{3}}{6} \sqrt{4ab} = \frac{\sqrt{3}}{6} \cdot 2\sqrt{ab} = \frac{\sqrt{3}}{3} \sqrt{ab}$$

$$P = \frac{\sqrt{3}}{6} \sqrt{ab}$$

$$\Rightarrow P = \frac{\sqrt{3}}{6} \sqrt{ab}$$

$$P = \frac{1}{4\sqrt{3}} \sqrt{4ab-a^2-b^2}$$

$$\frac{1}{4\sqrt{3}} \sqrt{4ab-a^2-b^2} = \frac{1}{4\sqrt{3}} \sqrt{4ab-a^2-b^2}$$

$$4ab = 4ab - a^2 - b^2$$

$$a^2 - 4ab + b^2 = 0$$

$$\left(\frac{a}{b}\right)^2 - 4\frac{a}{b} + 1 = 0$$

$$D = 16 - 4 = 12$$

$$= 4 \cdot 24 = 16 \cdot 3$$

$$\frac{a}{b} = \frac{10 \pm 4\sqrt{6}}{2}$$

$$= 5 \pm 2\sqrt{6}$$