



МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

11 КЛАСС. Вариант 2



1. [3 балла] Найдите все тройки натуральных чисел $(A; B; C)$ такие, что:

- A — четырёхзначное число, составленное из одинаковых цифр,
- B — трёхзначное число, хотя бы одна из цифр которого равна 1,
- C — двухзначное число, хотя бы одна из цифр которого равна 5,
- произведение $A \cdot B \cdot C$ является квадратом некоторого натурального числа.

2. [3 балла] Положительные числа x и y таковы, что значение выражения $K = \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{xy}$ не изменяется, если x уменьшить на 3, а y — увеличить на 3. Найдите все возможные значения выражения $M = x^3 - y^3 - 9xy$.

3. [5 баллов] а) Найдите все пары действительных чисел $(x; y)$ такие, что $(\sin \pi x - \sin \pi y) \sin \pi x = (\cos \pi x + \cos \pi y) \cos \pi x$.

б) Сколько пар целых чисел (x, y) удовлетворяют одновременно этому уравнению и неравенству

$$\arccos \frac{x}{4} + \arccos \frac{y}{9} < 2\pi?$$

4. [4 балла] В начале месяца было выделено 4 билета на праздничный концерт, которые планировалось случайным образом распределить между одиннадцатиклассниками. В конце месяца выяснилось, что будет выделено больше 4 билетов. Одиннадцатиклассники Петя и Вася вычислили, что вероятность им обоим вместе попасть на концерт в начале месяца была в 3,5 раза меньше, чем оказалась в конце месяца. Сколько всего было выделено билетов на концерт в конце месяца, если количество одиннадцатиклассников не изменилось?

5. [5 баллов] Точка O — центр окружности ω_1 , описанной около остроугольного треугольника ABC . Окружность ω_2 , описанная около треугольника BOC , пересекает отрезок AB в точке P . Найдите площадь треугольника ABC , если $AP = \frac{16}{5}$, $BP = 2$, $AC = 4$.

6. [6 баллов] На координатной плоскости изображена фигура $\Phi(\alpha)$, состоящая из всех точек, координаты $(x; y)$ которых удовлетворяют системе неравенств

$$\begin{cases} (x - 2 \cos \alpha)(y - 2 \sin \alpha) \geqslant 0, \\ x^2 + y^2 \leqslant 9. \end{cases}$$

Найдите максимальное значение M периметра (длины границы) фигуры $\Phi(\alpha)$ и укажите все значения α , при которых оно достигается.

7. [6 баллов] Шар Ω касается всех рёбер правильной усечённой пирамиды, а шар ω касается всех её граней. Найдите угол наклона бокового ребра пирамиды к плоскости её основания.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.



- | | | | | | | |
|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

СТРАНИЦА
1 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

н1

$A, B, C \in N$; $A = \overline{aabb} -$ состоящее из одинаковых цифр число

$$A = \overline{aabb} = 1000a + 100a + 10a + a = 1111a = 101 \cdot 11a, \text{ где } a - \text{ цифра } \frac{1}{2} \text{ от } 0; 9$$

По условию: $A \cdot B \cdot C = k^2$, где $k \in N$

$$A \cdot B \cdot C = 101 \cdot 11 \cdot a \cdot B \cdot C = k^2 \Rightarrow k^2 : 101 : 11$$

наиб. $k^2 : 101$, то оно должно содержать
все цифры кроме 1, т.к. $2^{\text{послед}}$ максимальное значение 101

$$(101 - \text{ простое число}) \Rightarrow A \cdot B \cdot C : 101,$$

но $a < 10$, $C < 100$, значит они не могут

делиться на 101 $\Rightarrow B : 101$, учитывая, что

$$99 < B < 1000 \text{ предположим: } \begin{cases} B = 101 \\ B = 202 \\ \dots \\ B = 909 \end{cases}$$

По условию B содержит хотя бы одну из
цифровых единиц исходным можно $B = 101$

$$\Rightarrow B = 101; A \cdot B \cdot C = 11 \cdot 101 \cdot 101 \cdot C \cdot a = 101^2 \cdot 11 \cdot C \cdot a$$

Аналогично, чтобы произведение было кратно квадрату

$$\text{нужно, чтобы } 11 \cdot C \cdot a : 11^2; C \cdot a : 11, \text{ но}$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

1

2

3

4

5

6

7

СТРАНИЦА
2 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по **каждой из задач** нумеруются **отдельно**. Порча QR-кода недопустима!

$A < 10$, $A \geq 11$ - простое $\Rightarrow A = 11 \Rightarrow C = 11$

Будем считать что C , B и A - это простые:

$$\begin{cases} C = 11 \\ C = 22 \\ \dots \\ C = 99 \end{cases}$$

По условию C содержит „5“, и исключим из списка
значений C простые числа $C = 55$, получили:

$$A \cdot B \cdot C = 101 \cdot 11 \cdot 5 + 101 \cdot 55 = 101^2 \cdot 55 - 5 \cdot 5 = k^2$$

Тогда $k^2 \equiv 5 \pmod{5} \Rightarrow k \equiv 5$, значит $a \equiv 5$

Число, чье $a \in [0, 9]$: $a = 5$.

$$\Rightarrow \begin{cases} A = 101 \cdot 11 \cdot 5 = 5555 \\ B = 101 \\ C = 55 \end{cases}$$

Ответ: $(A; B; C) = (5555; 101; 55)$

На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

- | | | | | | | |
|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |
|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|

СТРАНИЦА
1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

n^2

$$M = \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{xy}; x, y > 0$$

но условие: $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{xy} = \frac{1}{x-3} + \frac{1}{y+3} + \frac{1}{(x-3)(y+3)}$

$$\frac{x+y+1}{xy} = \frac{x-3+y+3+1}{(x-3)(y+3)}$$

$$\frac{x+y+1}{xy} = \frac{x+y+1}{(x-3)(y+3)}$$

но условие $x, y > 0 \Rightarrow x+y+1 > 0$, значит

$$(1) \Leftrightarrow \frac{1}{xy} = \frac{1}{(x-3)(y+3)}$$

$$\begin{cases} xy = (x-3)(y+3); xy = xy - 3y + 3x - 9 \\ x, y \neq 0 \\ x \neq 3; y \neq -3 \end{cases}$$

$$(2) \begin{cases} x, y \neq 0; x \neq 3; y \neq -3 \\ y = x - 3 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} M &= x^3 - y^3 - 3xy; x^3 - y^3 - 3xy = x^3 - (x-3)^3 - 3x(x-3) = \\ &= (x - x+3)(x^2 + x(x-3) + (x-3)^2) - 3x(x-3) = \\ &= 3x^2 + 3x^2 - 9x + 3x^2 - 18x + 27 - 9x^2 + 27x = \\ &= 27 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow M(x)=27 \text{ - при любых } x, \text{ условие } (2) \text{ не нарушено.}$$

Итог: 27

На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

- | | | | | | | |
|----------------------------|----------------------------|---------------------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|
| <input type="checkbox"/> 1 | <input type="checkbox"/> 2 | <input checked="" type="checkbox"/> 3 | <input type="checkbox"/> 4 | <input type="checkbox"/> 5 | <input type="checkbox"/> 6 | <input type="checkbox"/> 7 |
|----------------------------|----------------------------|---------------------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|

СТРАНИЦА
1 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

№ 3

$$a) (\sin \pi x - \sin \pi y) \sin \pi x = (\cos \pi x + \cos \pi y) \cos \pi x$$

$$\Leftrightarrow \sin \frac{\pi x - \pi y}{2} \cos \frac{\pi x + \pi y}{2} \cdot \sin \pi x = 2 \cos \frac{\pi x + \pi y}{2} \cos \frac{\pi x - \pi y}{2} \cos \pi x$$

$$\cos \frac{\pi x + \pi y}{2} (\sin \frac{\pi x - \pi y}{2} \sin \pi x - \cos \frac{\pi x - \pi y}{2} \cos \pi x) = 0$$

$$\Leftrightarrow \left[\cos \frac{\pi x + \pi y}{2} = 0 \right.$$

$$\left. \sin \frac{\pi x - \pi y}{2} \sin \pi x - \cos \frac{\pi x - \pi y}{2} \cos \pi x = 0 \right]$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \cos \frac{\pi}{2}(x+y) = 0 \\ \cos \left(\frac{\pi x - \pi y}{2} + \pi x \right) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \cos \frac{\pi}{2}(x+y) = 0 \\ \cos \frac{\pi}{2}(3x-y) = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \frac{\pi}{2}(x+y) = \frac{\pi}{2} + \pi h \\ \frac{\pi}{2}(3x-y) = \frac{\pi}{2} + \pi k \end{cases} \quad (h, k \in \mathbb{Z}) \quad \Leftrightarrow \begin{cases} x+y = 1+2h \\ 3x-y = 1+2k \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y = 1+2h-x \\ y = 3x-1-2k \end{cases} \Rightarrow (x; 1+2h-x); (x; 3x-1-2k)$$

рассматриваемые значения $x, y \in \mathbb{R}$

$$c) \arccos \frac{x}{5} + \arccos \frac{y}{3} < 2\pi, x, y \in \mathbb{R}$$

$\arccos \alpha \in [0; \pi]$ будем считать о

\Rightarrow неравенство не будет валидно если

если оба $\begin{cases} \arccos \frac{x}{5} = \pi \\ \arccos \frac{y}{3} = \pi \end{cases}$ (т.к. $\arccos \frac{x}{5} + \arccos \frac{y}{3} \leq 2\pi$)

если

На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

- | | | | | | | |
|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

СТРАНИЦА
2 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \frac{x}{y} = -1 \\ \frac{y}{z} = -1 \end{cases} \quad \left. \begin{array}{l} x = -y \\ y = -z \end{array} \right\} \begin{array}{l} x = -4 \\ z = -9 \end{array} \quad \begin{array}{l} \cancel{x=1+2n-z} \\ \cancel{z=3x-1-2k} \end{array}$$

при любых x, y решениях получим, что, зная
при каких действительных значениях x это первое верно,

$$\begin{cases} y = 1 + 2n - x \\ z = 3x - 1 - 2k \end{cases} \in \mathbb{Z} \quad \text{- такие пары } (y, z) \text{ бесконечно много}$$

Одним: 1) с/у $y(x; 1 + 2n - x); z(x; 3x - 1 - 2k)$
~~если~~ при $x \in \mathbb{R}; n, k \in \mathbb{Z}$

2) бесконечно много.

На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.



- | | | | | | | |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

СТРАНИЦА
1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

№4

A_1 - это Тимя с Вася наугадом сдали 90 их уравнений

A_2 - Тимя с Вася наугадом сдали им их уравнений

$$P(A_1) = \frac{4}{n} \cdot \frac{3}{n-1}, \text{ где } n - \text{к-во одноклассников}$$

$$P(A_2) = \frac{k}{n} \cdot \frac{k-1}{n-1}, \text{ где } k - \text{к-во сдаенных им их уравнений}$$

получаемо $\frac{P(A_2)}{P(A_1)} = 3,5$

$$\frac{k(k-1)}{4 \cdot 3} = 3,5; \quad k^2 - k = 42$$

$$k^2 - k - 42 = 0$$

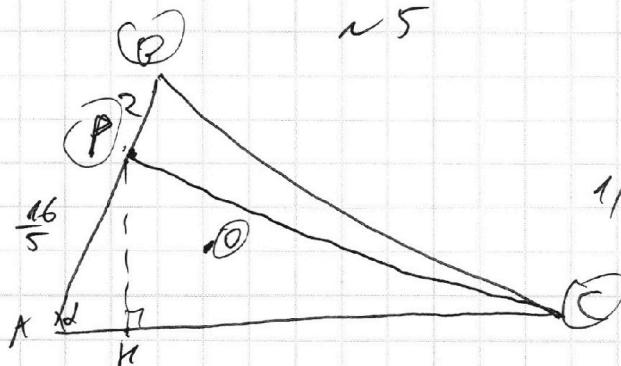
$$\Rightarrow \begin{cases} k=6 \\ k=7 \end{cases}; \quad \Rightarrow k=7 \quad (\text{чисел все имеют общее делительное число})$$

Ответ: 7

На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

СТРАНИЦА
1 из 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



н 5

Решение:

1) Из т. ВРОС - внешний, но $\angle BPC < 180^\circ$ - внутренне углы, опущенные на одну $\angle BSC$, ординатами u_1 .

$\angle BSC = 2\angle BAC$ - центральный и внешний углы.

Изъять $\angle BAC = \alpha$, тогда $\angle BSC = 2\alpha \Rightarrow \angle BPC = 2\alpha$

$\angle BPC$ - внешний и $\angle APC = \angle ACP + \angle PAC = \angle BPC$

$\angle ACP = \angle BPC - \angle BAC = 2\alpha - \alpha = \alpha$

но есть $\angle ACP = \angle PAC = \alpha$, $\triangle APC$ - равнобедренный,
 $\Rightarrow AP = PC = \frac{16}{5}$

2) $S_{ABC} = S_{APC} + S_{BPC}$; опускаем высоты РК, ПК, на стороны АВ.

РК - ребро сечения $\Rightarrow AH = HC$ (РК - биссектриса и высота)

$AH = HC \Rightarrow \frac{AC}{2} = \frac{4}{2} = 2$; $PK = \sqrt{PC^2 - KC^2} = \sqrt{\left(\frac{16}{5}\right)^2 - 2^2} = \frac{2}{5}\sqrt{39}$

$S_{APC} = \frac{1}{2} \cdot PK \cdot AC = \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{5}\sqrt{39} \cdot 4 = \frac{4}{5}\sqrt{39}$ (из Th Пифагора)

$\sin \alpha = \frac{PK}{AP} = \frac{\frac{2}{5}\sqrt{39}}{\frac{16}{5}} = \frac{\sqrt{39}}{20}; \cos \alpha = \frac{AH}{AP} = \frac{2}{\frac{16}{5}} = \frac{5}{8}$

$S_{BPC} = \frac{1}{2} \sin \angle BPC \cdot BP \cdot PC = \frac{1}{2} \sin 2\alpha \cdot BP \cdot PC =$

$= \sin \alpha \cos \alpha \cdot BP \cdot PC = \frac{\sqrt{39}}{20} \cdot \frac{5}{8} \cdot 2 \cdot \frac{16}{5} = \frac{\sqrt{39}}{2}$

$\Rightarrow S_{ABC} = \frac{\sqrt{39}}{2} + \frac{4}{5}\sqrt{39} = \frac{13\sqrt{39}}{10}$

Ответ: $\frac{13\sqrt{39}}{10}$.

На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

- | | | | | | | |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

СТРАНИЦА
1 из 4

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

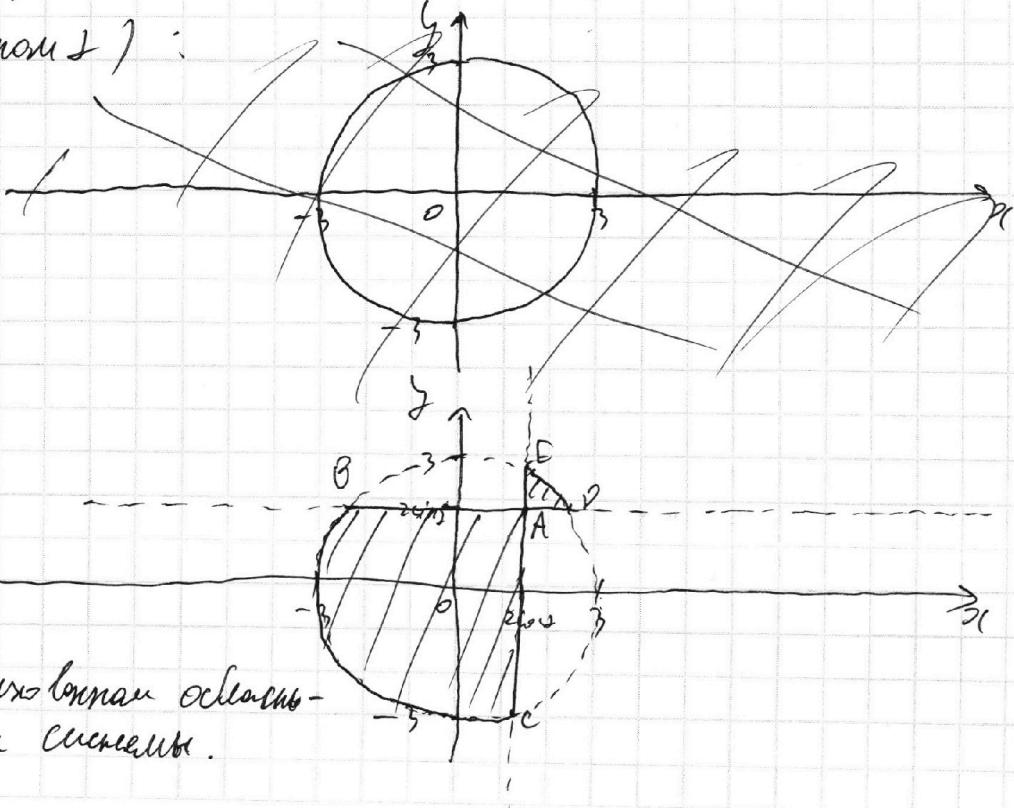
№

$$\begin{cases} (x - 2 \cos 2)(y - 2 \sin 2) \geq 0 & (1) \\ x^2 + y^2 \leq 9 & (2) \end{cases}$$

Построим график. Используя (2) получим круг радиусом 3 с центром в $(0, 0)$. Тогда ограничим графиком параметров $x = 2 \cos 2$ и $y = 2 \sin 2$ получим множество из четырех четвертей. Проверив все случаи, можем $x = 2 \cos 2$ и $y = 2 \sin 2$ — решений (1)

График системы будем строить как (умножение)

Использование:



заданных вами областей —
решение системы.

На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

- | | | | | | | |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

СТРАНИЦА
2 ИЗ 4

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



Первый этап доказательства сводится к тому что сумма окружностей. Рассмотрим ГМТ А - пересечение прямых $x = \cos 2$ и $y = \sin 2$. Значит, что $\cos 2 = x = \cos 2$ и $y = \sin 2$ пересекаются на квадрантической окружности - окружности с центром $(0,0)$ и радиусом 1.

Потом ГМТ точки А - окружность с центром $(0,0)$ и радиусом 2.

$$\text{Уравнение: } A(x; y) = A(2\cos 2; 2\sin 2)$$

$$x^2 + y^2 = 4\cos^2 2 + 4\sin^2 2 = 4 \Rightarrow x^2 + y^2 = 4.$$

\Rightarrow точка А лежит на окружности $x^2 + y^2 = 4$.

$$\angle BAC = \frac{\angle BCD + \angle ECD}{2} \Rightarrow \angle BCD + \angle ECD = 2 \angle BAC = 2 \cdot 90^\circ = 180^\circ$$

$\Rightarrow \angle BCD + \angle ECD$ - это звонки от A линии B .

$$l_{BC} + l_{ED} = \frac{3\pi}{180} \cdot 280^\circ + \frac{3\pi}{180} \cdot 280^\circ = \frac{3\pi}{180} (280^\circ + 280^\circ) =$$

$$> \frac{3\pi}{180} \cdot 180 = 3\pi. - Сумма звонки для $\angle BCD$ и $\angle ECD$.$$

Остается доказать $BP + EC$.

$$\text{Найдем координаты } E \text{ и } C: \begin{cases} x = 2\cos 2 \\ y = 2\sin 2 \end{cases} \Rightarrow 4\cos^2 2 + y^2 = 4$$

$$y = \sqrt{4 - 4\cos^2 2} \Rightarrow E(2\cos 2, \sqrt{4 - 4\cos^2 2}) ; C(2\cos 2, -\sqrt{4 - 4\cos^2 2})$$

$$\Rightarrow EC = \sqrt{(2\cos 2 - 2\cos 2)^2 + (\sqrt{4 - 4\cos^2 2} + \sqrt{4 - 4\cos^2 2})^2} = 2\sqrt{4 - 4\cos^2 2}$$

На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

- | | | | | | | |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

СТРАНИЦА
3 из 4

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Аналогично находим координаты $B_4 D$ — пересечение

кубов $y = 2 \sin 2x$ и окружности $x^2 + y^2 = 9$

Получим $D(\sqrt{5+4\cos^2 2x}; 2 \sin 2x)$
 $B(-\sqrt{5+4\cos^2 2x}; 2 \sin 2x)$

и $BD = 2\sqrt{5+4\cos^2 2x}$

Максимальный длины, получаем из системы $(1/16)$.

$M = BD + EC + l_{B_4C} + l_{B_4D} \approx BD + EC + 3\pi$

M — зависит от $BD + EC$, это максимальное при

максимальном $BD + EC$, то есть $f(1) = BD + EC$

$$f(1) = 2\sqrt{5+4\cos^2 2} + 2\sqrt{5+4\sin^2 2}$$

$$f(1) = 2 \left(\frac{-8\cos 2 \sin 2}{\sqrt{5+4\cos^2 2}} + \frac{8\sin 2 \cos 2}{\sqrt{5+4\sin^2 2}} \right) =$$

$$= 8 \cos 2 \sin 2 \cdot \frac{-\sqrt{5+4\sin^2 2} + \sqrt{5+4\cos^2 2}}{\sqrt{5+4\cos^2 2} \sqrt{5+4\sin^2 2}}$$

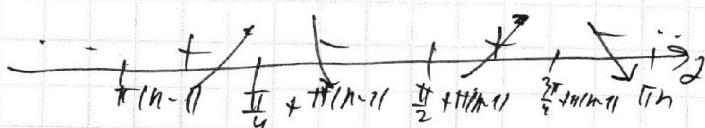
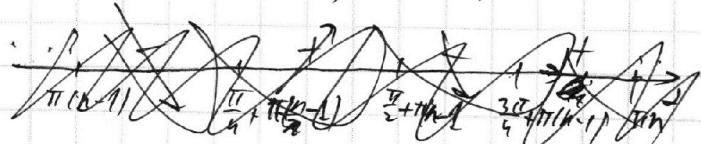
$(5+4\cos^2 2 \neq 0; 5+4\sin^2 2 \neq 0$ и т.д.)

$$F'(1) = 0 \text{ при } \begin{cases} \cos 2 = 0 \\ \sin 2 = 0 \end{cases}; 2 = \frac{\pi}{2} + \pi n \quad n \in \mathbb{Z},$$

$$\sqrt{5+4\sin^2 2} = \sqrt{5+4\cos^2 2} \Leftrightarrow \sin^2 2 = \cos^2 2$$

$$\frac{1-\cos 2}{2} = \frac{1+\cos 2}{2}, 2\cos 2 > 0; 2 = \frac{\pi}{2} + \pi n; (n \in \mathbb{Z}) \Rightarrow n = \frac{k}{2}$$

Периодичность:



I-



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

- | | | | | | | |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

СТРАНИЦА
Ч ИЗ Ч

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

\Rightarrow наивысшее значение достиляем $f(2)$ при

$$f = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi n}{2}, \text{ где } n \in \mathbb{Z};$$

$$\begin{aligned} f(2) &= 2\sqrt{5+4\cos^2 \frac{\pi}{4}} + 2\sqrt{5+4\sin^2 \frac{\pi}{4}} = \\ &= 2\sqrt{5+2^2} + 2\sqrt{5+2^2} = 4\sqrt{7} \end{aligned}$$

$\Rightarrow BV+EC = 4\sqrt{7}$ — наивысшее значение

и наивысшее значение M :

$$M = BV+EC + 3\pi = 4\sqrt{7} + 3\pi$$

$$(Проверка: M_{наивысшее} = 4\sqrt{7} + 3\pi)$$

$$\text{при } f = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi n}{2} \text{ при } n \in \mathbb{Z}$$

I-

I-



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

- | | | | | | | |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> |

СТРАНИЦА
1 из 3

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

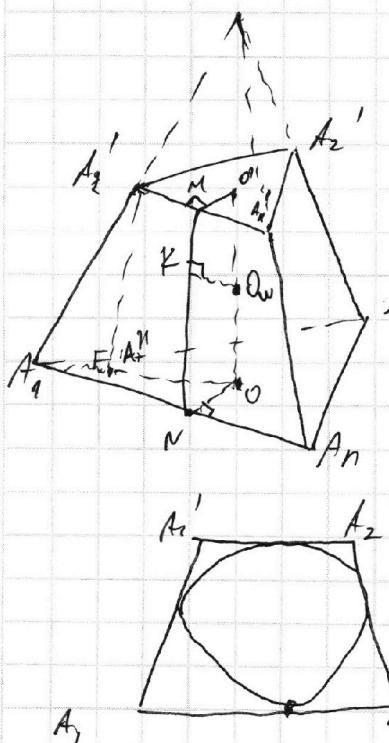
~ 4

Дана квадратная правильная четырехугольная пирамида. Угол между диагональю и боковой грани пирамиды.

Даны не выделены. её "члены" помимо подсчитаем для н-угольных четырехугольников, чтобы они выражались в общем виде, где n любое.

Методом.

Из ΔABC касающиеся ребер



Пирамиды, значит. Он в гипотезе касаются ребер $A_1A'_1; A_2A'_2; A_3A'_3;$

$A_4A'_4$. По сб-бы четырехугольной правильной пирамиды: $A_1A'_1A_2A'_2$ - четырехугольник; в этой же самой сечении t_2 -

окружность, вписанная в квадрат.

по сб-бы выше. окружности:

$$A_1A'_1 + A_2A'_2 = A'_1A'_2 + A_3A'_3$$

$$\Leftrightarrow 2A_1A'_1 = 2A'_1A'_2 = A'_1A'_2 + A_3A'_3$$

Из них стороны четырехугольника: a_1 , синий в квадре основное ребро: $A_1A'_1 = \frac{a_1 + b}{2}$

На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

- | | | | | | | |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|
| <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|

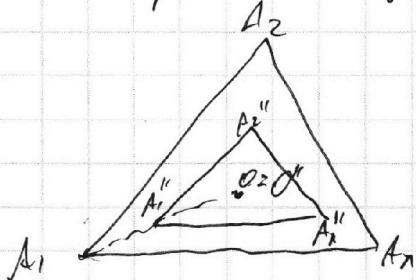
СТРАНИЦА
2 из 3

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Определим прописку $A'A''A_1''$ и высоты $(A_1A_2A_3)$.

Составим векторы высоты $(A_1A_2A_3)$ и высоты $(A_1A_2A_3)$

и векторы многоугольника $A_1''A_2''\dots A_n''$:



Значит, что $A_1' O' = \frac{\sqrt{3}}{3} a$, тогда

$A_1'' O'' = \frac{\sqrt{3}}{3} a$, можем увидеть, что

$$A_2 O = \frac{\sqrt{3}}{3} b \Rightarrow A_1 A_2'' = \frac{\sqrt{3}}{3} (b-a)$$

$$\Rightarrow \text{По Тр. Тигондра: } -A_1 A_2'' = \sqrt{A_1^2 + A_2^2 - A_1 A_2} = \sqrt{\left(\frac{\sqrt{3}}{2} R\right)^2 - \left(\frac{\sqrt{3}}{3} (b-a)\right)^2}$$

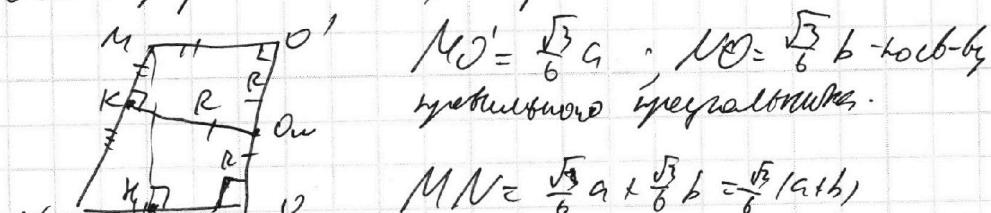
$$A_1 A_2'' = \frac{1}{8\sqrt{3}} \sqrt{-a^2 + 14ab - b^2}$$

$$A_1 A_2'' = \frac{1}{8\sqrt{3}} \sqrt{a^2 + 14ab - b^2} = OO' = 2R, \text{ где } R - \text{радиус } \omega.$$

$$\Rightarrow R = \frac{1}{4\sqrt{2}} \sqrt{-a^2 + 14ab - b^2} \quad (1)$$

Найдем R по-другому: рассмотрим высоты, бывающие в касание узких $A, A_1 A_2 A_3$ (вокруг k), проходящие через $O' O$. Тогда они касаются $(A_1 A_2 A_3)$ в $(A_1 A_2 A_3)$, то

они - сущности $O' O$, значит:



$$MO' = \frac{\sqrt{3}}{6} a, NO = \frac{\sqrt{3}}{6} b - \text{коэф-кт}$$

цилиндрическое преобразование.

$$MN = \frac{\sqrt{3}}{6} a \times \frac{\sqrt{3}}{6} b = \frac{\sqrt{3}}{6} (a+b)$$

(речи, как сущность сущей преобразована)

Определим $MN \perp NO$

На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

- | | | | | | | |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> |

СТРАНИЦА
3 ИЗ 3

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



$$NM = \frac{\sqrt{3}}{6}b - \frac{\sqrt{3}}{6}a = \frac{\sqrt{3}}{6}(b-a)$$

$$\Rightarrow \text{по Тр. } \sqrt{\text{Медиана}} : MK = \sqrt{NM^2 - MK^2} = \frac{\sqrt{3}}{6}\sqrt{(a+b)^2 - (b-a)^2} = \frac{\sqrt{3}}{6}\sqrt{a^2 + 2ab + b^2 - b^2 + 2ab - a^2} = \frac{\sqrt{3}}{6} \cdot 2\sqrt{ab} = \frac{\sqrt{3}}{3}\sqrt{ab}$$

$$\Rightarrow OO' = 2R = \frac{\sqrt{3}}{3}\sqrt{ab}; R = \frac{\sqrt{3}}{6}\sqrt{ab} \quad (2)$$

\Rightarrow из (1) и (2):

$$\frac{\sqrt{3}}{6}\sqrt{ab} = \frac{1}{4\sqrt{3}}\sqrt{a^2 + 14ab + b^2}$$

$$4ab = -a^2 + 14ab + b^2$$

$$a^2 - 10ab + b^2 = 0; \left(\frac{a}{b}\right)^2 - 10 \frac{a}{b} + 1 = 0$$

$$\frac{a}{b} = 5 - 2\sqrt{6} \quad ; \quad \cancel{a = 5\sqrt{6} - 2\sqrt{6}}$$

Уравнение касательных к А'А, О = 2

$$\cos \angle = \frac{A_1 A_1''}{A_1 A_1'} = \frac{\frac{1}{\sqrt{3}}(b-a)}{\frac{1}{2}(a+b)} = \frac{2}{\sqrt{3}} \cdot \frac{1 - \frac{a}{b}}{\frac{a}{b} + 1} = \frac{2}{\sqrt{3}} \cdot \frac{1 - 5 + 2\sqrt{6}}{5 - 2\sqrt{6} + 1}$$

$$= \frac{2}{\sqrt{3}} \cdot \frac{2\sqrt{6} - 4}{6 - 2\sqrt{6}} = \frac{2\sqrt{6} - 4}{3\sqrt{3} - 3\sqrt{2}} \cancel{\frac{(2\sqrt{6} - 4)(3\sqrt{3} + 3\sqrt{2})}{24 - 12\sqrt{2}}} =$$

~~$$\frac{(2\sqrt{6} - 4)/3}{6\sqrt{2} - 4\sqrt{3}} = \frac{(2\sqrt{6} - 4)/3}{3\sqrt{2}}$$~~

$$\cos \angle = \arccos \frac{2\sqrt{6} - 4}{3\sqrt{3} - 3\sqrt{2}}$$

Ответ: $\arccos \frac{2\sqrt{6} - 4}{3\sqrt{3} - 3\sqrt{2}}$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи **отдельно**.

- | | | | | | | |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|
| <input type="checkbox"/> 1 | <input type="checkbox"/> 2 | <input type="checkbox"/> 3 | <input type="checkbox"/> 4 | <input type="checkbox"/> 5 | <input type="checkbox"/> 6 | <input type="checkbox"/> 7 |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|

СТРАНИЦА
ИЗ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач **нумеруются отдельно**. Порча QR-кода недопустима!

$$x, y > 0 \quad n^2$$

$$\frac{x+y}{xy} + \frac{1}{xy} = \frac{y+3+x-3}{(y+3)(x-3)} + \frac{1}{(x-3)(y+3)}$$

$$\cancel{\frac{x}{x} + \cancel{\frac{y}{y}} + \cancel{\frac{1}{xy}}} \quad \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{xy} = \frac{1}{x-3} + \frac{1}{y+3} + \frac{1}{(x-3)(y+3)}$$

$$M = x^3 - y^3 - 9xy = (x-y)(x^2 + xy + y^2) - 9xy$$

$$\frac{1}{x} - \frac{1}{x-3} + \frac{1}{y} - \frac{1}{y+3} + \frac{1}{xy} - \frac{1}{(x-3)(y+3)} = 0$$

$$\frac{x-3-2y}{x(x-3)} + \frac{y+3-x}{y(y+3)} + \frac{xy-3y-3x}{(x-3)(y+3)} = 0$$

$$\frac{3}{y(y+3)} - \frac{3}{x(x-3)} + \frac{3x-3y-9}{(x-3)(y+3)} = 0$$

$$\cancel{\frac{3x^2}{y^2}} - \cancel{\frac{3x^2}{x^2}} - \cancel{\frac{9y}{y^2}} + \cancel{\frac{3x^2y}{y^2}} + \cancel{\frac{3x^2y}{x^2}} - \cancel{\frac{9xy}{y^2}} = 0$$

$$\frac{3x^2(1+y) - 3y^2(1+x)}{y^2x^2(y+3)(x-3)} + 9 - 9/(x+1)(y+1) = 0$$

$$M = x^3 - y^3 - 9xy = (x-y)(x^2 + xy + y^2) - 9xy$$

$$\frac{x+y+1}{xy} = \frac{y+3+x-3+1}{(x+3)(y+3)} \quad \begin{cases} x, y \neq 0 \\ x \neq -3 \\ y \neq -3 \end{cases}$$

$$xy - 3y + 3x - 9 = 2xy$$

$$8y \quad |y = x-3$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

- | | | | | | | |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|
| <input type="checkbox"/> 1 | <input type="checkbox"/> 2 | <input type="checkbox"/> 3 | <input type="checkbox"/> 4 | <input type="checkbox"/> 5 | <input type="checkbox"/> 6 | <input type="checkbox"/> 7 |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|

СТРАНИЦА
ИЗ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по **каждой из задач** нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

н 1.

$$A, B, C \in N$$

$$\begin{cases} x = 2 \cos \alpha \\ x^2 + y^2 = 9; \quad 4 \cos^2 \alpha + y^2 = 9 \\ y^2 = 5 - 4 \cos^2 \alpha; \quad y^2 = 5 \sin^2 \alpha \\ y = \sqrt{5 \sin^2 \alpha} \end{cases}$$

$$A = 9, A_2 = 9, A_3 = 9 \Rightarrow A = \overline{99999} = \overline{10000} \cdot 1000 + 1000 + 100 + 9 = 11000 + 999 = 11999$$

$$B = b_1 b_2 b_3 \quad \begin{cases} b_1 = 1 \\ b_2 = 1 \\ b_3 = 1 \end{cases} \quad \frac{1111}{11} \overline{101}$$

$$C = \overline{c_1 c_2}; \quad \begin{cases} c_1 = 5 \\ c_2 = 5 \end{cases} \quad E_C = y_E - y_C = 2 \cdot \sqrt{5 + 4 \sin^2 \alpha}$$

$$BD = 2 \cdot \sqrt{5 + 4 \cos^2 \alpha}$$

$$BD + EC = 2 \cdot \sqrt{5 + 4 \sin^2 \alpha + 5 + 4 \cos^2 \alpha} = 2 \sqrt{10}$$

$$A \cdot B \cdot C = k^2; \quad \text{ где } k \in N$$

$$\Rightarrow A \cdot B \cdot C = 11 \cdot 101 \cdot B \cdot C - a$$

$$101\text{-множл} \Rightarrow B \cdot C : 101, \text{ то } C < 100 \Rightarrow B : 101$$

$$B = k \cdot 101, \text{ причем } k \in N, B < 100, \text{ то}$$

$$k \in \{1; 2; \dots; 9\}$$

$$\text{тогда. } B = 101.$$

$$\Rightarrow A \cdot B \cdot C = 11 \cdot 101 \cdot 101 \cdot C = 101^2 \cdot 11 \cdot C = k^2$$

$$\Rightarrow C : 11 \Rightarrow C = 55; \quad a = 5$$

$$\Rightarrow \begin{cases} A = 5555 \\ B = 101 \\ C = 55 \end{cases} \quad = 2 \frac{\sin \alpha + \cos \alpha}{\sqrt{5 + 4 \sin^2 \alpha}} + \frac{8 \cos \alpha - 8 \sin \alpha}{\sqrt{5 + 4 \cos^2 \alpha}} =$$

$$= 8 \sin^2 \alpha \cdot \frac{\sqrt{5 + 4 \cos^2 \alpha} - \sqrt{5 + 4 \sin^2 \alpha}}{\sqrt{5 + 4 \sin^2 \alpha} \sqrt{5 + 4 \cos^2 \alpha}}$$

$$\begin{cases} \sin^2 \alpha = 0 \\ \cos^2 \alpha = 1 \end{cases} \quad \sqrt{5 + 4 \cos^2 \alpha} = \sqrt{5 + 4 \sin^2 \alpha} \quad \Rightarrow \quad 8 \sin^2 \alpha + 25 \sin^2 \alpha - ; \quad \cos^2 \alpha = \sin^2 \alpha$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.



- | | | | | | | |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| <input type="checkbox"/> |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|

СТРАНИЦА
ИЗ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$n = \frac{2x^7 + 12x^4 + 12x + 1}{2} = \frac{2 \cdot 8 + 12 \cdot 4 + 12 \cdot 2 + 1}{2} = \frac{16 + 48 + 24 + 1}{2} = \frac{89}{2}$$

n - кол-во одинаковых задач

$$P(A_1) = \frac{4}{n} \cdot \frac{3}{n-1}$$

$$P(A_2) = \frac{K}{n} \cdot \frac{K-1}{n-1}$$

$$\frac{P(A_2)}{P(A_1)} = \frac{K(K-1)}{4 \cdot 3} = 35; \quad K^2 - K = 42$$

$$\frac{x^2 - 6x - 22}{2} = \frac{x^2 - 6x - 22}{2}$$

$$3 \cdot 5 \cdot 4 = 7 \cdot 2 = 14 \\ 14 \cdot 3 = 70; 12 = 42$$

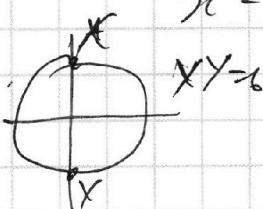
$$\sqrt{6} - \sqrt{8}$$

$$\begin{cases} K=6 \\ K=4 \end{cases} \Rightarrow K=4$$

$$n = 6$$

$$D = 16 - 8 = 8.$$

$$x = \frac{-4 \pm 2\sqrt{2}}{2} = -2 \pm \sqrt{2}$$



$$\begin{cases} x \neq 0 \\ x \neq -3; y \neq -3; -x - 1 \neq 0; x \neq -1 \\ x \neq 2; y \neq 2; -x - 1 \neq -2; x \neq -2 \end{cases}$$

$$2 \cdot \sqrt{2} + 2\sqrt{2} = 4\sqrt{2} \\ = 4\sqrt{7} \quad \Rightarrow \quad M(2) = 2 \cdot 8 + 12 \cdot 4 + 12 \cdot 2 + 1 = 16 + 48 + 24 + 1 = 89$$

$$4\sqrt{2} \approx 6 \\ \sqrt{7} \approx 2.2$$

$$M(-2 - \sqrt{2}) = 2 \cdot (-2 - \sqrt{2})^3 + 12 \cdot (-2 - \sqrt{2})^2 + 12 \cdot (-2 - \sqrt{2}) + 1 = \\ = 2 \cdot (-8 - 6\sqrt{2} - 2\sqrt{2}) + 12 \cdot (4 + 4\sqrt{2}) + 12 \cdot (-2 - \sqrt{2}) + 1 = 24 - 12\sqrt{2} + 48 + 48\sqrt{2} + 12 \cdot (-2 - \sqrt{2}) + 1 =$$

$$\begin{cases} x \neq -2 - \sqrt{2} \\ x \neq 2 \\ y \neq 2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x \neq -2 + \sqrt{2} \\ x \neq -2 \\ y \neq 2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x \neq -2 - \sqrt{2} \\ x \neq -2 \\ y \neq -2 \end{cases}$$

$$M(0) = 1$$

$$\begin{cases} x \neq -2 + \sqrt{2} \\ x \neq -2 \\ y \neq -2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x \neq -2 - \sqrt{2} \\ x \neq -2 \\ y \neq 2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x \neq -2 - \sqrt{2} \\ x \neq -2 \\ y \neq -2 \end{cases}$$

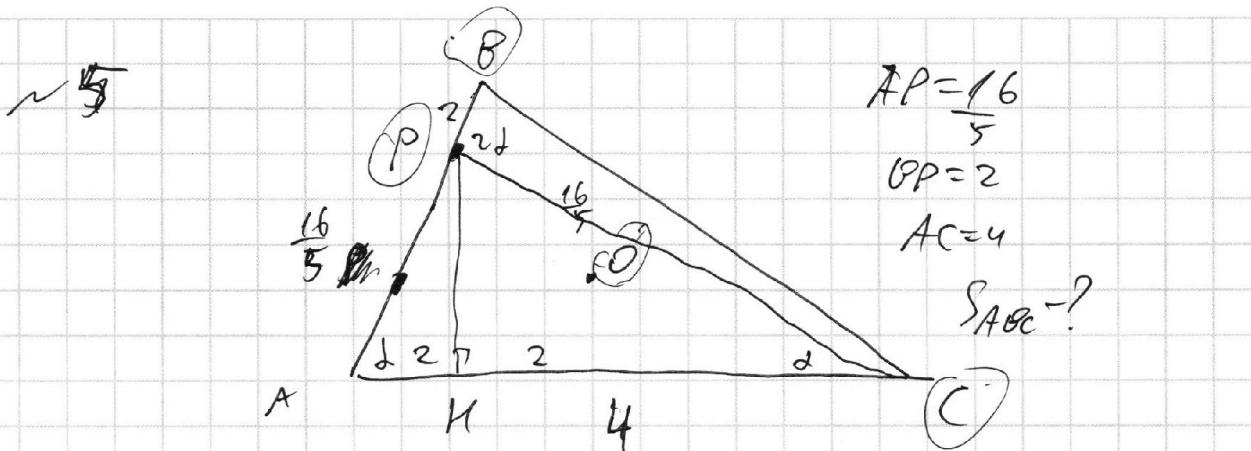


На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

- | | | | | | | |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|
| <input type="checkbox"/> 1 | <input type="checkbox"/> 2 | <input type="checkbox"/> 3 | <input type="checkbox"/> 4 | <input type="checkbox"/> 5 | <input type="checkbox"/> 6 | <input type="checkbox"/> 7 |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|

СТРАНИЦА
_ ИЗ _

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач **нумеруются отдельно**. Порча QR-кода недопустима!



$$\angle BOC = 22^\circ \Rightarrow \angle BPC = 21^\circ$$

$$\Rightarrow \angle PCB = 1$$

~~$\angle ACP = 10$~~

$$\Rightarrow PC = \frac{16}{5} ; M(3) = 2 \cdot 3^3 + 12 \cdot 3^2 + 12 \cdot 3 + 1 =$$

$$= 2 \cdot 27 + 92 \cdot 9 + 12 \cdot 8 + 1 =$$

$$= 54 + 9048 + 36 + 10$$

$$PK = \sqrt{\left(\frac{16}{5}\right)^2 - 2^2} = \sqrt{\left(\frac{16}{5} - 2\right)\left(\frac{16}{5} + 2\right)} =$$

$$= \sqrt{\frac{6}{5} \cdot \frac{26}{5}} = \frac{2}{5} \cdot \sqrt{39}$$

$$\Theta 144 + 55 =$$

$$\Rightarrow S_{APC} = \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{5} \sqrt{39} \cdot 4 = \frac{4}{5} \sqrt{39} = 199$$

$$\sin \alpha = \frac{PK}{PC} = \frac{\frac{2}{5} \sqrt{39}}{\frac{16}{5}} = \frac{\sqrt{39}}{8}$$

$$\cos \alpha = \frac{2}{\frac{16}{5}} = \frac{5}{8}$$

$$S_{APC} = \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot \sin \alpha \cos \alpha \cdot BP \cdot PC =$$

$$= \frac{\sqrt{39}}{8} \cdot \frac{2}{5} \cdot 2 \cdot \frac{16}{5} = \frac{\sqrt{39}}{2}$$

$$S_{ABC} = \frac{\sqrt{39}}{2} + \frac{4}{5} \sqrt{39} = \frac{15 + 8\sqrt{39}}{10} = \boxed{\frac{13\sqrt{39}}{20}}$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

- | | | | | | | |
|----------------------------|---------------------------------------|---------------------------------------|---------------------------------------|---------------------------------------|----------------------------|----------------------------|
| <input type="checkbox"/> 1 | <input checked="" type="checkbox"/> 2 | <input checked="" type="checkbox"/> 3 | <input checked="" type="checkbox"/> 4 | <input checked="" type="checkbox"/> 5 | <input type="checkbox"/> 6 | <input type="checkbox"/> 7 |
|----------------------------|---------------------------------------|---------------------------------------|---------------------------------------|---------------------------------------|----------------------------|----------------------------|

СТРАНИЦА
1 из _____

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$K = \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{xy} = \frac{1}{x-3} + \frac{1}{y+3} + \frac{1}{(x-3)(y+3)}$$

\approx

$\begin{cases} y=2\sin\alpha \\ x^2\cos^2\alpha=9; x^2=9-4\sin^2\alpha \\ x^2=5+4\cos^2\alpha \end{cases}$

но условие.

$$\frac{x+y+1}{xy} = \frac{x-3+y+3+1}{(x-3)(y+3)}$$

\approx

$$\frac{x+y+1}{xy} = \frac{x+y+1}{(x-3)(y+3)}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x+y+1=0 & ; y= -x-1 \\ xy = (x-3)(y+3) \\ xy \neq 0 \\ x \neq 3 \\ y \neq -3 \end{cases}$$

$\Rightarrow y = -x-1$

$\Rightarrow xy = 2xy - 3y + 3x - 9$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x, y \neq 0; x \neq 3; y \neq -3 \\ y = -x-1 \\ y = x-3 \end{cases}$$

$$1) y = -x-1 : M = x^3 - y^3 - 3xy$$

$$\begin{aligned} x^3 - y^3 - 3xy &= x^3 + (x+1)^3 + 3(x+1) = \\ &= x^3 + x^3 + 3x^2 + 3x + 1 + 3x^2 + 9x = 2x^3 + 12x^2 + 12x + 1 \end{aligned}$$

$$M = 2x^3 + 12x^2 + 12x + 1$$

$$M'(x) = 6x^2 + 24x + 12 = 6(x^2 + 4x + 2) = 6(x + 2 + \sqrt{2}) \cdot (x + 2 - \sqrt{2})$$

но обрз: $x \neq 0; x \neq 3; y \neq 0 \Rightarrow x \neq -1; y \neq -3 \Rightarrow x \neq 2$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

- | | | | | | | |
|----------------------------|---------------------------------------|---------------------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|
| <input type="checkbox"/> 1 | <input checked="" type="checkbox"/> 2 | <input checked="" type="checkbox"/> 3 | <input type="checkbox"/> 4 | <input type="checkbox"/> 5 | <input type="checkbox"/> 6 | <input type="checkbox"/> 7 |
|----------------------------|---------------------------------------|---------------------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|

СТРАНИЦА

ИЗ _____

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются **отдельно**. Порча QR-кода недопустима!

Оставим $M(-2\sqrt{2}) \leq M(0)$

$$M(-2\sqrt{2}) = 2(-2-\sqrt{2})^3 + 12(-2-\sqrt{2})^2 + 12(-2-\sqrt{2}) + 1 = \\ = 8 + 8\sqrt{2}$$

$$M(0) = 1 \Rightarrow M(0) < M(-2\sqrt{2})$$

\Rightarrow но монотонность наводит, что ~~здесь~~ $M(x) = 1$ решений

Убедим ~~з~~ ~~здесь~~ (но хранит шире на промежутке $(-\infty; -2\sqrt{2})$ будем одно), поскольку $M(x) = 1$ - линейное уравнение.

$M(x) = 8x > M(-2-\sqrt{2})$, но задача монотонности

наводит, что $M(3) > M(2) > M(-2-\sqrt{2})$ с ~~здесь~~ уравнения:

$M(2) = M(3)$ \rightarrow никаких решений

$\Rightarrow M(x) \neq M(2) \wedge M(x) \neq M(3)$
 $M(x) \neq 8x \wedge M(x) \neq 199$

$-1 \in (-2-\sqrt{2})/2 + \sqrt{2})$ наводит монотонность, наводит, что есть x уравнение $M(x) = M(-1)$ решения, x -но на промежутке $(-\infty; -2\sqrt{2})$.

$$2/x = x-3; M(x) = x^3 - (x-3)^3 - 9x(x-3)$$

$$\text{От} \quad x^3 - (x-3)^3 - 9x(x-3) = x^3 - x^3 + 27x - 27x + 27 - \\ - 9x^2 + 27x = 27.$$

$$\Rightarrow M(x) = 27 - \text{при } x \text{ линейное}, \text{ уравнение с 0 корнями}$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

- | | | | | | | |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|
| <input type="checkbox"/> 1 | <input type="checkbox"/> 2 | <input type="checkbox"/> 3 | <input type="checkbox"/> 4 | <input type="checkbox"/> 5 | <input type="checkbox"/> 6 | <input type="checkbox"/> 7 |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|

СТРАНИЦА
ИЗ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по **каждой из задач** нумеруются **отдельно**. Порча QR-кода недопустима!

№ 3

$$a) (\sin \pi x - \sin \pi y) \sin \pi z = (\cos \pi x + \cos \pi y) \cos \pi z$$

$$\cancel{2} \sin \frac{\pi(x-y)}{2} \cos \frac{\pi(x+y)}{2} \sin \pi z = 2 \cos \frac{\pi(x+y)}{2} \cos \frac{\pi(x-y)}{2} \cos \pi z$$

✓

$$\cos \frac{\pi(x+y)}{2} / \sin \frac{\pi(x-y)}{2} \sin \pi z - \cos \frac{\pi(x-y)}{2} \cos \pi z = 0$$

$$\left[\cos \frac{\pi(x+y)}{2} = 0 ; \frac{\pi(x+y)}{2} = \frac{\pi}{2} + \pi n ; n \in \mathbb{Z} \right] (1)$$

$$\sin \frac{\pi(x-y)}{2} \sin \pi z - \cos \frac{\pi(x-y)}{2} \cos \pi z = 0 \quad (2)$$

$$(1): \frac{x+y}{2} = \frac{1}{2} + n; \quad x+y = 1+2n$$

$$\left[y = 1+2n-x \right]; n \in \mathbb{Z}$$

$$(2): \cos \left(\frac{\pi(x-y)}{2} + \pi z \right) = 0$$

$$\text{тогда } \frac{\pi(x-y)}{2} + \pi z = \frac{\pi}{2} + \pi k; \quad k \in \mathbb{Z}$$

$$\frac{3x-y}{2} = \frac{1}{2} + k; \quad 3x-y = 1+2k$$

$$\text{Ответ: а)} \quad \left\{ \begin{array}{l} y = 1+2n-x \\ y = 3x-1-2k \end{array} \right.$$

$$\text{б), } x, y \in \mathbb{Z} : \arccos \frac{x}{y} + \arccos \frac{y}{x} < 2\pi.$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1

2

3

4

5

6

7

СТРАНИЦА
_ ИЗ _

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\begin{cases} y = 1 + 2n - x \\ y = 3x - 1 - 2k \end{cases} ; n, k \in \mathbb{Z}$$

$\arccos \frac{x}{5} + \arccos \frac{y}{3} < 2\pi$

~~$\arccos \frac{x}{5} + \arccos \frac{1+2n-x}{3} < 2\pi$~~

~~$\arccos \frac{x}{5} + \arccos x \in [0, \pi]$~~

$$\sqrt{\frac{16}{25}x^2 - 2^2} =$$

$$= \frac{256}{25} - 4 = \sqrt{\frac{256 - 100}{25}} =$$

$$= \frac{156}{25} = \frac{2}{5}\sqrt{15}$$

$$= \frac{156}{12} = \frac{13}{36}$$

единственное где $x \in]0, \pi[$ - то первое:

$$\begin{cases} \arccos \frac{x}{5} = \pi; \\ \arccos \frac{y}{3} = \pi \end{cases}$$

то есть из всех решений надо выбрать решения

этой системы

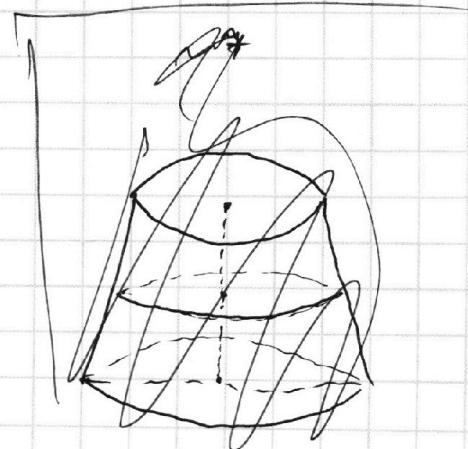
$$\begin{cases} \arccos \frac{x}{5} = \pi \Rightarrow \frac{x}{5} = -1; x = -5 \\ \arccos \frac{y}{3} = \pi \Rightarrow \frac{y}{3} = -1; y = -3 \end{cases}$$

1) $y = 1 + 2n - x; y = -3 = 1 + 2n + 4$

$2n \neq -5 - 4; 2n = -14; n = -7$.

2) $y = 3x - 1 - 2k$

Объем сферического шара



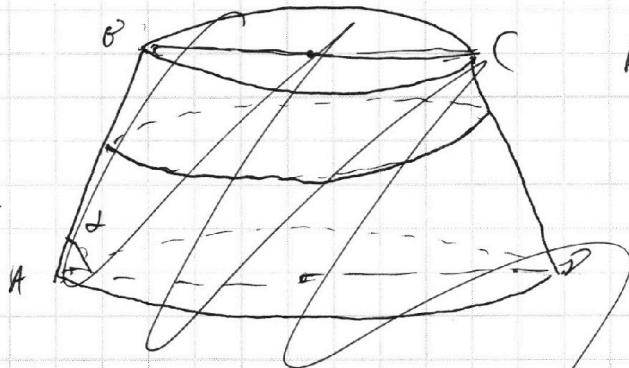


На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

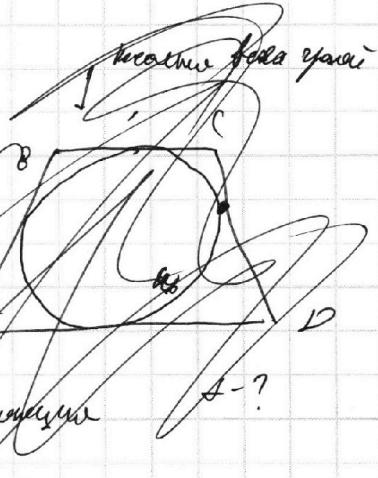
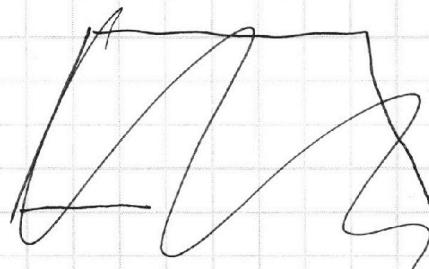
- | | | | | | | |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|
| <input type="checkbox"/> 1 | <input type="checkbox"/> 2 | <input type="checkbox"/> 3 | <input type="checkbox"/> 4 | <input type="checkbox"/> 5 | <input type="checkbox"/> 6 | <input type="checkbox"/> 7 |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|

СТРАНИЦА
_ ИЗ _

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



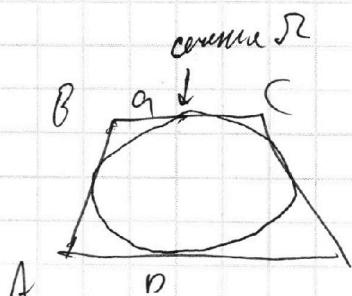
$$R = \sqrt{\frac{1}{4}(a+b)^2 - \frac{1}{3}(b-a)^2} = \\ = \sqrt{3c^2 + 6ab + 3b^2 - 4b^2 + 8ba - 4a^2} = \\ = \frac{\sqrt{-b^2 - a^2 + 12ab}}{2}$$



$$X_1 O = \frac{\sqrt{3}}{6} \frac{b-a}{2} = \frac{\sqrt{3}}{12}(b-a)$$

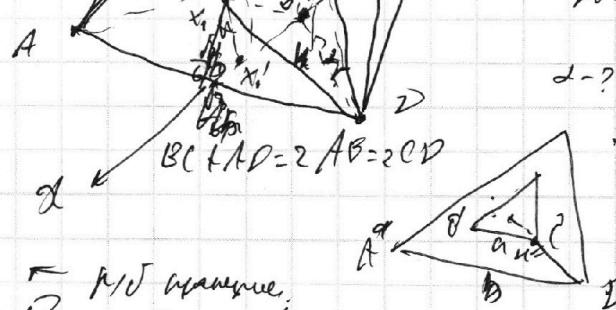
$$X_1 \left(\frac{\sqrt{3}}{12}(b-a), 0, \frac{d}{2} \right)$$

$$O_2(0, 0; \frac{-b^2 - a^2 + 12ab}{2})$$



$$2R = d \Rightarrow R = \frac{d}{2} = \frac{\sqrt{D^2 - 4P^2}}{2}$$

$x_1 x_2 \dots x_n$
- куб многоугольника

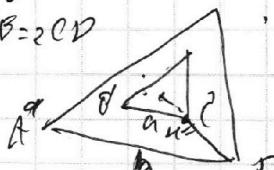


$$BC + AD = 2AB = 2CD$$

5) $\sqrt{3}$ а) а) а) а)

$$\frac{\sqrt{3}}{2}a \cdot \frac{2}{3} = \frac{1}{\sqrt{3}}a \Rightarrow DN = \frac{1}{\sqrt{3}}(b-a)$$

$$CD = (a+b) \cdot \frac{1}{2} \Rightarrow DN = \frac{1}{\sqrt{3}}(b-a) ?$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

- | | | | | | | |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| <input type="checkbox"/> |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|

СТРАНИЦА
ИЗ

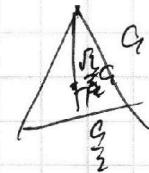
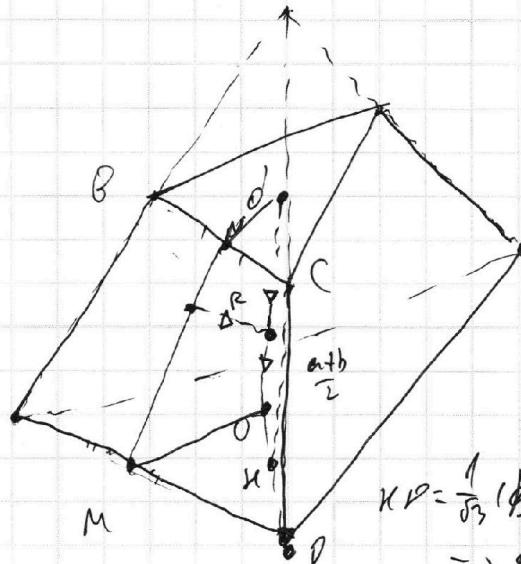
Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\cos \alpha = \frac{2(b-a)}{\sqrt{3}(a+b)} =$$

$$= \frac{2(1 - \frac{a}{b})}{\sqrt{3}(a+b)} =$$

$$= \frac{2(1 - \frac{5}{6} + 2\sqrt{6})}{\sqrt{3}(5 - 2\sqrt{6} + 1)} =$$

$$= \frac{2(13\sqrt{6} - 5)}{\sqrt{3}(6 - 2\sqrt{6})}$$



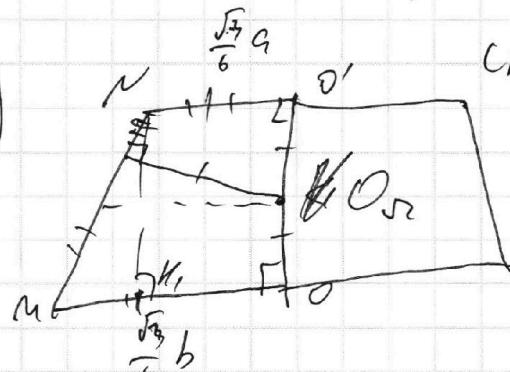
$$RP = \frac{1}{\sqrt{3}}(b-a)$$

~~=> RP = 0~~

$$CR = \sqrt{\frac{a+b}{2}^2 - (\frac{1}{\sqrt{3}}(ba))^2}$$

$$R = \sqrt{\frac{3(a^2+ab+b^2) - 4(b^2 - ab)a^2}{3 \cdot 4}}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{3}}(a+b) = MN$$



$$MN = \frac{\sqrt{3}}{6}(a+b) \Rightarrow \frac{1}{4}\sqrt{3} \cdot \sqrt{4ab - a^2 - b^2}$$

$$MN, CR = \frac{\sqrt{3}}{6}(b-a)$$

$$O'O = \sqrt{\left(\frac{\sqrt{3}}{6}(a+b)\right)^2 - \left(\frac{\sqrt{3}}{6}(b-a)\right)^2} = \frac{\sqrt{3}}{6}(a^2 +$$

$$= \frac{\sqrt{3}}{6}(\sqrt{a^2 + 2ab + b^2} - b^2 + 2ab - a^2) =$$

$$= \frac{\sqrt{3}}{6} \cdot 2\sqrt{ab} = \frac{\sqrt{3}}{3}\sqrt{ab}$$

$$R = \frac{\sqrt{3}}{6}\sqrt{ab}$$

$$\frac{a}{b} = \frac{10 + 4\sqrt{6}}{2} = 5 + 2\sqrt{6}$$