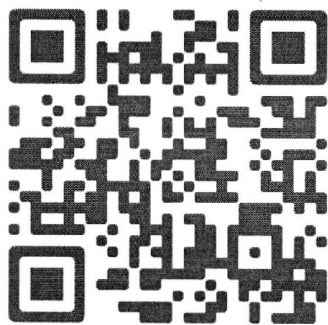




МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

11 КЛАСС. Вариант 4



1. [3 балла] Найдите все тройки натуральных чисел $(A; B; C)$ такие, что:
- A — четырёхзначное число, составленное из одинаковых цифр,
 - B — трёхзначное число, хотя бы одна из цифр которого равна 7,
 - C — двузначное число, хотя бы одна из цифр которого равна 1,
 - произведение $A \cdot B \cdot C$ является квадратом некоторого натурального числа.
2. [3 балла] Положительные числа x и y таковы, что значение выражения $K = \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{3}{xy}$ не изменяется, если x уменьшить на 4, а y — увеличить на 4. Найдите все возможные значения выражения $M = x^3 - y^3 - 12xy$.
3. [5 баллов] а) Найдите все пары действительных чисел $(x; y)$ такие, что $(\sin \pi y - \sin \pi x) \sin \pi y = (\cos \pi y + \cos \pi x) \cos \pi y$.
- б) Сколько пар целых чисел (x, y) удовлетворяют одновременно этому уравнению и неравенству

$$\arccos \frac{x}{7} - \arcsin \frac{y}{4} > -\frac{\pi}{2}?$$

4. [4 балла] В начале месяца было выделено 4 билета на праздничный концерт, которые планировалось случайным образом распределить между одиннадцатиклассниками. В конце месяца выяснилось, что будет выделено больше 4 билетов. Одиннадцатиклассники Петя и Вася вычислили, что вероятность им обоим вместе попасть на концерт в начале месяца была в 11 раз меньше, чем оказалась в конце месяца. Сколько всего было выделено билетов на концерт в конце месяца, если количество одиннадцатиклассников не изменилось?
5. [5 баллов] Точка O — центр окружности ω_1 , описанной около остроугольного треугольника ABC . Окружность ω_2 , описанная около треугольника BOC , пересекает отрезок AB в точке P . Найдите площадь треугольника ABC , если $AP = 16$, $BP = 8$, $AC = 22$.
6. [6 баллов] На координатной плоскости изображена фигура $\Phi(\alpha)$, состоящая из всех точек, координаты $(x; y)$ которых удовлетворяют системе неравенств

$$\begin{cases} (x + 4 \sin \alpha)(y - 4 \cos \alpha) \leq 0, \\ x^2 + y^2 \leq 36. \end{cases}$$

Найдите максимальное значение M периметра (длины границы) фигуры $\Phi(\alpha)$ и укажите все значения α , при которых оно достигается.

7. [6 баллов] Шар Ω касается всех рёбер правильной усечённой пирамиды, а шар ω касается всех её граней. Найдите угол наклона боковой грани пирамиды к плоскости её основания.



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

1 ☒ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА
1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$A = \overline{aaaa} = a \cdot 1111 = a \cdot 11 \cdot 101$, 11 и 101 - простые, a - цифра ($a < 10$)
 $A \cdot B \cdot C$ - квадрат $\Rightarrow \mathcal{J}_{101}(B \cdot C) \equiv 1$, $\mathcal{J}_{11}(B \cdot C) \equiv 1$, но $C < 100 \Rightarrow \mathcal{J}_{101} C = 0$,
 $B < 1000 \Rightarrow \mathcal{J}_{101} B = 1 \Rightarrow B = \overline{b0b}$, но хотя бы 1 цифра числа B равна
 $7 \Rightarrow b = 7 \Rightarrow B = 707 \cdot 11$, $\mathcal{J}_{11}(B \cdot C) \equiv 1$, $C < 100 \Rightarrow \mathcal{J}_{11} C = 1 \Rightarrow$
 $C = \overline{cc}$, но в C хотя бы 1 цифра равна 1 $\Rightarrow c = 1 \Rightarrow C = 11$
 $A \cdot B \cdot C$ - квадрат ~~то~~, $A = a \cdot 11 \cdot 101$, $B = 707$, $C = 11$, $a < 10 \Leftrightarrow A = 7777$, $B = 707$,
 $C = 11$
Ответ: $(7777; 707; 11)$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

1
☐

2
☒

3
☐

4
☐

5
☐

6
☐

7
☐

СТРАНИЦА
1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$K = \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{3}{xy} = \frac{x+y+3}{xy}, \quad \frac{x+y+3}{xy} = \frac{(x-4)+(y+4)+3}{(x-4)(y+4)}, \quad x > 0, y > 0, x+y+3 > 0$$

$$(x-4)(y+4) = xy \Leftrightarrow 4x - 4y - 16 = 0 \Leftrightarrow x - y - 4 = 0$$

$$a^3 + b^3 + c^3 - 3abc = (a+b+c)(a^2 + b^2 + c^2 - ab - ac - bc) \quad \text{для } \forall a, b, c \in \mathbb{R}$$

$$\cancel{a=x}, \cancel{b=y}, \cancel{c=-4}: M = x^3 - y^3 - 12xy = x^3 - (-y)^3 - (-4)^3 - 3 \cdot x \cdot (-y) \cdot (-4) + 4^3$$

$$= (x - y - 4)(x^2 + (-y)^2 + (-4)^2 - x(-y) - x(-4) - (-y)(-4)) + 4^3 = 4^3, \quad \text{т.к. } x - y - 4 = 0$$

$$x = 5, y = 1 \text{ подходит под условие и } M = 4^3 \text{ (т.е. } M = 4^3 \text{ возможно)}$$

$$\text{Ответ: } M = 4^3$$



1 ☐ 2 ☐ 3 ☒ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА
1 из 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$(\sin \pi y - \sin \pi x) \sin \pi y = (\cos \pi y + \cos \pi x) \cos \pi y$$

$$2 \sin \frac{\pi(y-x)}{2} \cdot \cos \frac{\pi(y+x)}{2} \sin \pi y = 2 \cos \frac{\pi(y-x)}{2} \cos \frac{\pi(y+x)}{2} \cos \pi y$$

$$\begin{cases} \cos \frac{\pi(y+x)}{2} = 0 \Leftrightarrow \frac{\pi(y+x)}{2} = \pm \frac{\pi}{2} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow x+y = \pm 1 + 4n, n \in \mathbb{Z} \\ 2 \sin \frac{\pi(y-x)}{2} \cos \frac{\pi(y+x)}{2} \cdot \sin \pi y = 2 \cos \frac{\pi(y-x)}{2} \cos \pi y \Leftrightarrow \end{cases}$$

$$\cos \frac{\pi(-y-x)}{2} - \cos \frac{\pi(3y-x)}{2} = \cos \frac{\pi(-y-x)}{2} + \cos \frac{\pi(3y-x)}{2} \Leftrightarrow$$

$$\cos \frac{\pi(3y-x)}{2} + \cos \frac{\pi(3y-x)}{2} = 0 \Leftrightarrow \cos \frac{\pi(3y-x)}{2} = 0 \Leftrightarrow$$

$$\frac{\pi(3y-x)}{2} = \pm \frac{\pi}{2} + 2\pi k, k \in \mathbb{Z} \Rightarrow 3y-x = \pm 1 + 4k, k \in \mathbb{Z}$$

Ответ на пунктах а: $\begin{cases} x+y = \pm 1 + 4n, n \in \mathbb{Z} \\ 3y-x = \pm 1 + 4k, k \in \mathbb{Z} \end{cases} = \begin{cases} x+y \in \mathbb{Z}, x+y \not\equiv 2 \\ 3y-x \in \mathbb{Z}, 3y-x \not\equiv 2 \end{cases}$

$$\arccos \frac{x}{2} - \arcsin \frac{y}{4} \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2}\right]$$

$$[0; \pi] \quad \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$$

$$\arccos \frac{x}{2} - \arcsin \frac{y}{4} > -\frac{\pi}{2} \Leftrightarrow \begin{cases} \arccos \frac{x}{2} \neq 0 \\ \arcsin \frac{y}{4} \neq \frac{\pi}{2} \\ \frac{x}{2} \in [-1; 1] \\ \frac{y}{4} \in [-1; 1] \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq 2 \\ y \neq 4 \\ x \in [-2; 2] \\ y \in [-4; 4] \end{cases}$$

$$x+y \in [-11; 11], 3y-x \in [-10; 10]$$

$$x+y = \pm 1 + 4n = -11, -7, -3, 1, 5, 9, 13, 17$$

$$x+y \not\equiv 2, x \in \mathbb{Z}, y \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow 3y-x \not\equiv 2, x \in \mathbb{Z}, y \in \mathbb{Z}$$

Получается, что нужно найти кол-во пар $(x; y)$

таких, что $x, y \in \mathbb{Z}$, $x+y \not\equiv 2$, $(x; y) \neq (2; 4)$, $x \in [-2; 2]$, $y \in [-4; 4]$. Нужных пар вида $(x; -4) - 8$, $(x; -3) - 7$, $(x; -2) - 8$, $(x; -1) - 7$, $(x; 0) - 8$, $(x; 1) - 7$, $(x; 2) - 8$, $(x; 3) - 7$, $(x; 4) - 7$. Итого всех нужных пар $8 \cdot 4 + 7 \cdot 5 = 32 + 35 = 67$

Ответ на пунктах б: 67.



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☒ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА
1 из 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Пусть в конце месяца было выдано $x > 4$ билетов, а одиннадцатиклассников n . Тогда $P_{\text{кон}}$ как вероятность попадания на концерт увеличилась, то $n \geq 4$ (иначе $P_{\text{кон}}$ начальная вероятность = 1). $P_{\text{н}} = \frac{C_4^n}{C_2^n}$ (в начале месяца) - начальная вероятность того, что Вера и Петя вместе попадут на концерт. $P_{\text{к}} = \frac{C_x^n}{C_2^n}$ - та же вероятность в конце месяца.

$$11P_{\text{н}} = P_{\text{к}} \Leftrightarrow 11C_4^n = C_x^n \Leftrightarrow 11 \cdot 12 = x(x-1) \Leftrightarrow x > 4 \Leftrightarrow x = 12$$

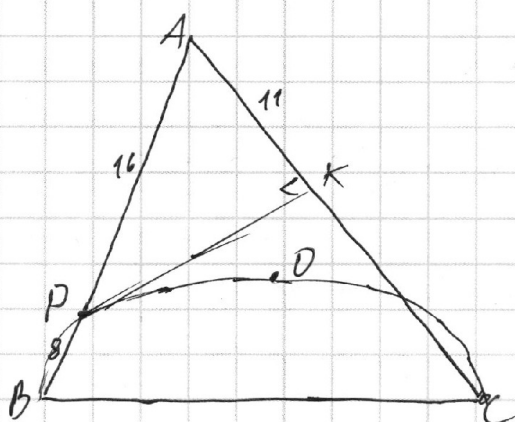
Ответ: 12 билетов. (второй корень - 11)



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

1
☐2
☐3
☐4
☐5
☒6
☐7
☐СТРАНИЦА
1 из 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



$$\angle BOC = 2\angle BAC$$

$$(\angle BOC) \Rightarrow \angle BPC = \angle BOC = 2\angle BAC$$

$$\angle PCA = \angle BPC - \angle PAC = \angle BAC$$

$$\Rightarrow \triangle APC - \text{равнобедр.}$$

Пусть K - основание высоты из P на AC

$\triangle APC$ - равнобедр., PK - высота

$\Rightarrow K$ - середина AC

$$AK = \frac{1}{2} \cdot AC = 11$$

$$AP = 16$$

$$\angle PKA = 90^\circ \Rightarrow PK = \sqrt{AP^2 - AK^2} = \sqrt{16^2 - 11^2} = \sqrt{5 \cdot 22} = 3\sqrt{11}$$

$$\sin \angle BAC = \frac{PK}{AP} = \frac{3\sqrt{11}}{16}$$

$$S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} AB \cdot AC \cdot \sin \angle BAC = \frac{1}{2} \cdot (16+8) \cdot 22 \cdot \frac{3\sqrt{11}}{16} = 11 \cdot 22 \cdot \frac{3\sqrt{11}}{16} =$$

$$= 11 \cdot \frac{9\sqrt{11}}{2} = \frac{99\sqrt{11}}{2}$$

Ответ: $\frac{99\sqrt{11}}{2}$

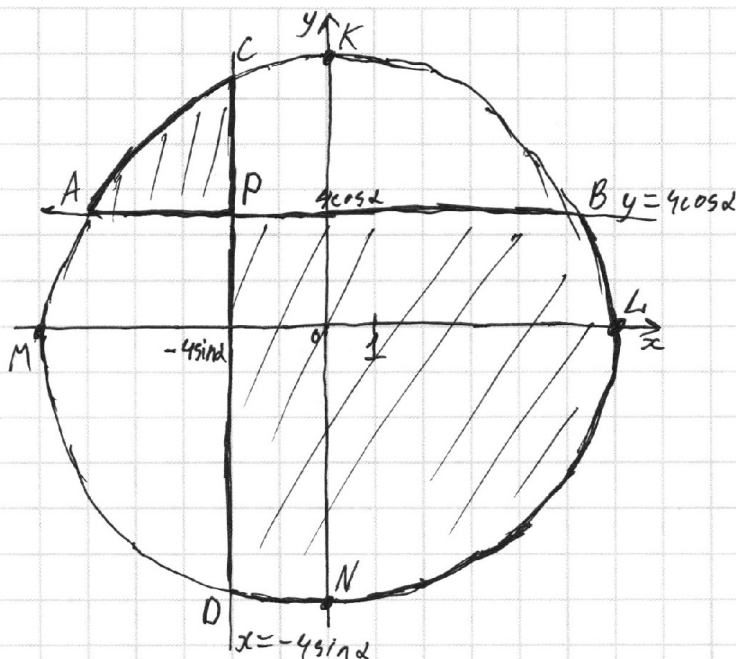


На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☒ 7 ☐

СТРАНИЦА
1 из 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



$$\begin{cases} (x+4\sin\alpha)(y-4\cos\alpha) \leq 0 \\ x^2+y^2 \leq 36 \\ 4\sin\alpha, 4\cos\alpha \in [-4; 4] \end{cases}$$

Заметим, что $\Phi(\alpha)$

Периметр $\Phi(\alpha)$ состоит из 2 отрезков и двух дуг окружности $x^2+y^2=6^2$

Отметим точки ~~как~~ на рисунке

$$\begin{aligned} \angle CK &= \angle ND, \quad \angle BL = \angle AM \\ \Rightarrow \angle AC + \angle BD &= \angle MK + \angle LN = 180^\circ \end{aligned}$$

$\Rightarrow$ периметр двух дуг равен $\frac{2\pi \cdot 6}{2} = 6\pi$

$$\begin{cases} x^2+y^2=36 \\ x=-4\sin\alpha \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y^2=36-4^2\sin^2\alpha \\ x=-4\sin\alpha \end{cases}, \quad CD=|y_2-y_1|=2\sqrt{36-4^2\sin^2\alpha}$$

$$\begin{cases} x^2+y^2=36 \\ y=4\cos\alpha \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2=36-4^2\cos^2\alpha \\ y=4\cos\alpha \end{cases}, \quad AB=|x_2-x_1|=2\sqrt{36-4^2\cos^2\alpha}$$

$$AB+CD = 2(\sqrt{36-4^2\sin^2\alpha} + \sqrt{36-4^2\cos^2\alpha}) = 8(\sqrt{9-4\sin^2\alpha} + \sqrt{9-4\cos^2\alpha})$$

$$\leq 8 \cdot \sqrt{\frac{9-4\sin^2\alpha + 9-4\cos^2\alpha}{2}} = 8 \cdot \sqrt{\frac{18-4}{2}} = 8\sqrt{7}$$

равенство 0 удерживается

Равенство достигается ~~макс~~ при $9-4\sin^2\alpha = 9-4\cos^2\alpha$
 $\Leftrightarrow \cos^2\alpha = \sin^2\alpha$

$$AB+CD+6\pi \leq 8\sqrt{7}+6\pi = M$$

равенство достигается при $\cos^2\alpha = \sin^2\alpha \Leftrightarrow$

$$\cos^2\alpha - \sin^2\alpha = 0 \Leftrightarrow \cos 2\alpha = 0 \Leftrightarrow 2\alpha = \pm\frac{\pi}{2} + 2\pi k, k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow$$

$$\alpha = \pm\frac{\pi}{4} + \pi k, k \in \mathbb{Z}$$

Ответ: $M = 8\sqrt{7} + 6\pi$, достиж. при $\alpha = \pm\frac{\pi}{4} + \pi k, k \in \mathbb{Z}$

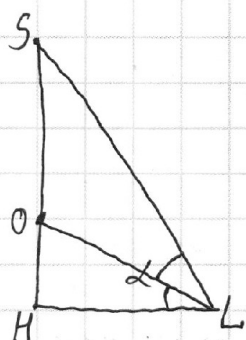


На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☒

СТРАНИЦА
2 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

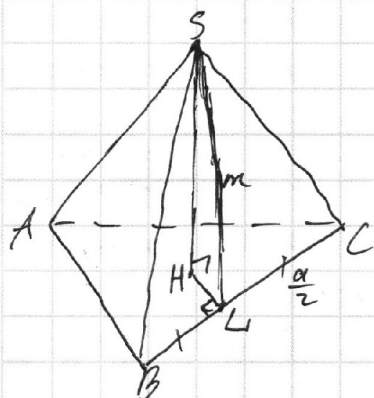


$$\frac{HO}{OS} = \frac{HL}{LS}, \quad HO + OS = SH \Rightarrow OH = \frac{HL}{HL + SL} \cdot SH$$

$$MH = KL \sin \alpha, \quad MH = 2OH = \frac{2HL \cdot SH}{HL + SL}$$

$$KL \cdot \sin \alpha = SL \sin \alpha \cdot \frac{BC}{P_{\triangle SBC}} = SH \cdot \frac{BC}{P_{\triangle SBC}}$$

$$MH = KL \sin \alpha \Rightarrow \frac{HL}{HL + SL} = \frac{BC}{SB + SC + BC}$$



$$\text{Пусть } \triangle ABC \text{ — } a = AB = AC = BC, \quad m = SL$$

$$HL \text{ — по свойству центра тяжести } \frac{a}{2}$$

$$CL = \frac{a}{2}, \quad SB = SC = \sqrt{SL^2 + LC^2} = \sqrt{m^2 + \frac{a^2}{4}}$$

$$\frac{HL}{HL + SL} = \frac{BC}{SB + SC + BC} \Rightarrow \frac{a/3}{a/3 + m} = \frac{a}{2\sqrt{m^2 + \frac{a^2}{4}} + a} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow a + \sqrt{4m^2 + a^2} = a + 3m \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 4m^2 + a^2 = 9m^2 \Rightarrow 5m^2 = a^2 \Rightarrow \frac{a}{m} = \sqrt{5}$$

$$\cos \alpha = HL : SL = \frac{a/3}{m} = \frac{\sqrt{5}}{3} \Rightarrow \alpha = \arcsin \frac{\sqrt{5}}{3} \arccos \frac{\sqrt{5}}{3}$$

$$\text{Ответ: } \arcsin \frac{\sqrt{5}}{3} \arccos \frac{\sqrt{5}}{3}$$

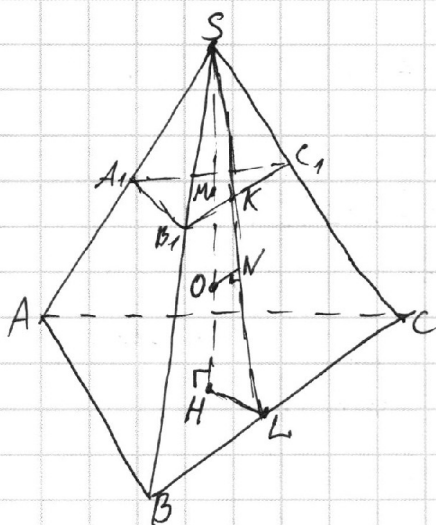


На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☒

СТРАНИЦА
1 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



$SABC$ - правильная $\Rightarrow$
 H - центр $\triangle ABC$ ($\triangle ABC$ - равностор.)
 SH - высота, $SA = SB = SC$

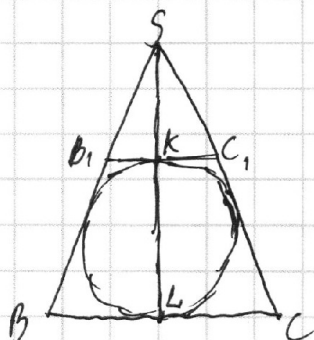
Сфера Ω касается всех ребер
 при $ABCA_1B_1C_1 \Rightarrow$ ~~сфера Ω касается~~
 Вспомогательная Ω проецируется в вписанные
 окружности $\triangle ASB, \triangle BSC, \triangle CSA$ при
 проектировании на $(ASB), (BSC), (SCA)$ соотв.

$\triangle SAB = \triangle SBC = \triangle SCA$, B_1 в них отмечены

B_1, A_1, B_1, C_1 - вторые касательные к вписанным
 окружностям.

$\Rightarrow SA_1 = SC_1 \Rightarrow$ в окруж. (SAC) касательная к вписанной
 окружности $\triangle ASC$ $A_1H \parallel AC$ (т.к. $SA = SC$), но
 $\triangle SAC = \triangle SBC = \triangle SCB \Rightarrow A_1B_1 \parallel AB, B_1C_1 \parallel BC \Rightarrow (ABC) \parallel (A_1B_1C_1)$

Пусть $K = B_1C_1 \cap \Omega$, $L = BC \cap \Omega$, SKL - прямая (т.к. K и L
 точки касания впис. окр.
 $\triangle SBC$ - равнобедр. с BC и B_1C_1
 $BC \parallel B_1C_1$)



K и L - середины B_1C_1 и BC из симметрии

Из геометрии впис. окр. $\triangle SBC$ в точке S : $\frac{BL}{SK} = \frac{SL}{SK} = \frac{BS - BC}{BS}$

$\Rightarrow KL = SL \left(1 - \frac{BS - BC}{BS}\right) = SL \cdot \frac{BC}{BS}$

Пусть $\alpha = \angle((ABC), (SBC)) \Rightarrow \angle SLH = \alpha$. Пусть O - центр Ω

Покажем, что $O \in SH$, т.к. $SABC$ - правильная пирамида

$M = SH \cap (A_1B_1C_1)$, $OM = OH$. N - основание высоты из O на
 (SBC) , $N \in SKL$ из симметрии, $ON = OH \Rightarrow O$ - основание бисс.
 $\angle HLS$; $\angle SHL = 90^\circ$, т.к. SH - высота $SABC$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1
☐2
☐3
☐4
☐5
☐6
☐7
☐СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$A = \overline{aaaa} = a.1111 = a.11.101 \quad B = \overline{b0b} \quad C = 11$$

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{3}{xy} = \frac{x+y+3}{xy} = \frac{x+y+3}{xy-4x-4y+16} = \frac{x+y+3}{xy-4x-4y+16}$$

$$x+y+3=0 \quad \emptyset$$

$$4y-4x+16=0 \Leftrightarrow y-x+4=0$$

$$x^3+(-y)^3-3(-y)x(-y)+4^3=(y+x-y)(4^2+x^2+y^2)$$

$$a^3+b^3+c^3-3abc=(a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-ac-bc)$$

$$\sin \frac{\pi(y-x)}{2} \cdot \cos \frac{\pi(x+y)}{2} \sin \pi y = \cos \frac{\pi(x+y)}{2} \cos \frac{\pi(x-y)}{2} \cos \pi y$$

$$\cos \frac{\pi(x+y)}{2} = 0$$

$$\sin \frac{\pi(y-x)}{2} \sin \pi y = \cos \frac{\pi(x-y)}{2} \cos \pi y$$

$$\cos(\alpha \pm \beta) = \cos \alpha \cos \beta \pm \sin \alpha \sin \beta$$

$$2 \sin \alpha \sin \beta = \cos(\alpha - \beta) - \cos(\alpha + \beta)$$

$$2 \cos \alpha \cos \beta = \cos(\alpha - \beta) + \cos(\alpha + \beta)$$

$$\cos \frac{\pi(y-x)}{2} - \cos \frac{\pi(3y-x)}{2} = \cos \frac{\pi(x-3y)}{2} + \cos \frac{\pi(x+y)}{2}$$

$$\arccos \frac{x}{4} - \arcsin \frac{y}{4} > -\frac{\pi}{2}$$

$$\uparrow \quad \uparrow$$

$$[0; \pi] - \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$$

$$[0; \pi] + \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right] = \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2}\right]$$

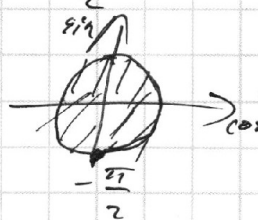
$$\arccos \frac{x}{4} - \arcsin \frac{y}{4} = -\frac{\pi}{2}$$

$$\arccos \frac{x}{4} = \arcsin \frac{y}{4} - \frac{\pi}{2}$$

$$\frac{x}{4} = 1$$

$$\frac{y}{4} = 1$$

$$x=4 \quad y=4$$



$$4 \rightarrow x$$

$$\frac{C_4^2}{C_n^2} \rightarrow \frac{C_x^2}{C_n^2}$$

n-уменьшив

$$n \geq 4$$

$$n=2,3$$

$$11 \cdot 6 = C_x^2 = \frac{x(x-1)}{2}$$

$$11 \cdot 12$$

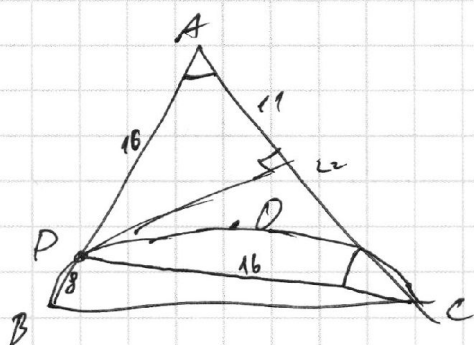


На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении **каждой** задачи **отдельно**.

1 2 3 4 5 6 7
☐ ☐ ☐ ☐ ☐ ☐ ☐

СТРАНИЦА
 __ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются **отдельно**. Порча QR-кода недопустима!



$$(x + 4 \sin \alpha)(y - 4 \cos \alpha) \leq 0$$

$$x^2 + y^2 \leq 36$$

$$x^2 + y^2 = 36$$

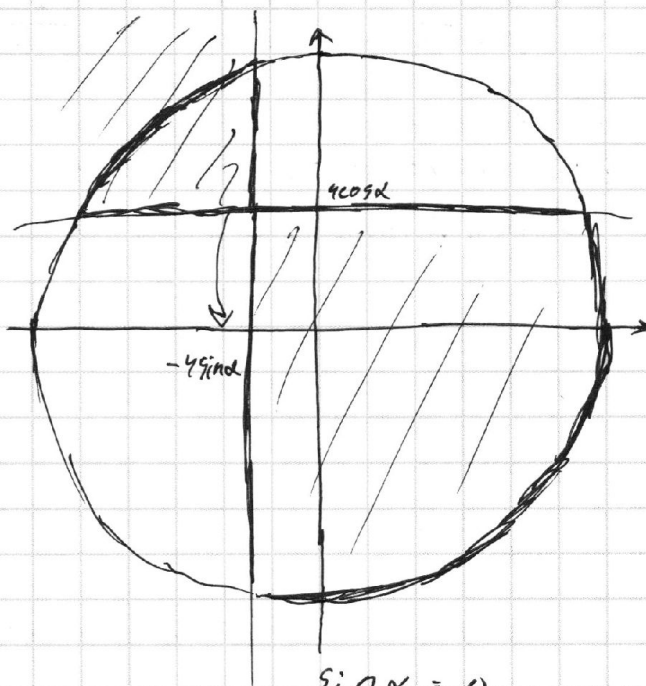
$$y = 4 \cos \alpha$$

$$x^2 = 4^2 (9^2 - \cos^2 \alpha)$$

$$8(\sqrt{81 - \cos^2 \alpha} + \sqrt{81 - \sin^2 \alpha})$$

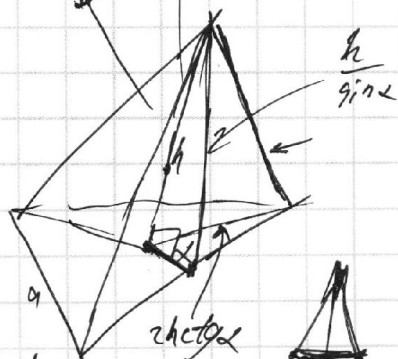
$$\leq 16 \sqrt{\frac{16^2 - 1^2}{2}} = 16$$

$$\sin \alpha = \frac{\sqrt{16^2 - 1^2}}{16} = \frac{\sqrt{5 \cdot 27}}{16} = \frac{3\sqrt{6}}{16}$$

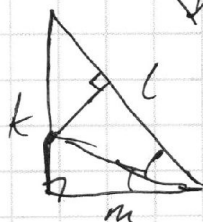
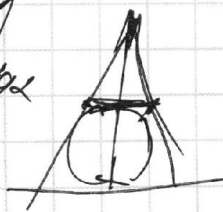


$$\sin \alpha = 0$$

$$\cos \alpha = 0$$



$$\frac{3h \cot \alpha}{\sqrt{3}/2}$$



$$\left(1 - \frac{p-a}{p}\right) \cdot \frac{h}{\sin \alpha} \cdot \sin \alpha = \frac{a}{p} \cdot h$$



$$L = \frac{h}{\sin \alpha}$$

$$K = h \quad m = \frac{a}{3}$$

$$2 \frac{m}{L+m} \cdot K$$

$$\frac{\frac{a}{3}}{L+m} \cdot h = \frac{a}{2p} \cdot h$$

$$2p = 3(L+m)$$