МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

11 КЛАСС. Вариант 4

1. [3 балла] Найдите все тройки натуральных чисел $(A; B; C)$ такие, что:
   - A — четырёхзначное число, составленное из одинаковых цифр,
   - B — трёхзначное число, хотя бы одна из цифр которого равна 7,
   - C — двузначное число, хотя бы одна из цифр которого равна 1,
   - произведение $A \cdot B \cdot C$ является квадратом некоторого натурального числа.
2. [3 балла] Положительные числа x и y таковы, что значение выражения $K = \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{3}{xy}$ не изменяется, если x уменьшить на 4, а y — увеличить на 4. Найдите все возможные значения выражения $M = x^3 - y^3 - 12xy$.
3. [5 баллов] а) Найдите все пары действительных чисел $(x; y)$ такие, что $(\sin \pi y - \sin \pi x) \sin \pi y = (\cos \pi y + \cos \pi x) \cos \pi y$.

   б) Сколько пар целых чисел (x, y) удовлетворяют одновременно этому уравнению и неравенству
   $$\arccos \frac{x}{7} - \arcsin \frac{y}{4} > -\frac{\pi}{2}?$$
4. [4 балла] В начале месяца было выделено 4 билета на праздничный концерт, которые планировалось случайным образом распределить между одиннадцатиклассниками. В конце месяца выяснилось, что будет выделено больше 4 билетов. Одиннадцатиклассники Петя и Вася вычислили, что вероятность им обоим вместе попасть на концерт в начале месяца была в 11 раз меньше, чем оказалась в конце месяца. Сколько всего было выделено билетов на концерт в конце месяца, если количество одиннадцатиклассников не изменилось?
5. [5 баллов] Точка O — центр окружности ω_1, описанной около остроугольного треугольника ABC. Окружность ω_2, описанная около треугольника BOC, пересекает отрезок AB в точке P. Найдите площадь треугольника ABC, если $AP = 16$, $BP = 8$, $AC = 22$.
6. [6 баллов] На координатной плоскости изображена фигура $\Phi(\alpha)$, состоящая из всех точек, координаты $(x; y)$ которых удовлетворяют системе неравенств
   $$\begin{cases} (x + 4\sin\alpha)(y - 4\cos\alpha) \leqslant 0, \\ x^2 + y^2 \leqslant 36. \end{cases}$$
   Найдите максимальное значение M периметра (длины границы) фигуры $\Phi(\alpha)$ и укажите все значения α, при которых оно достигается.
7. [6 баллов] Шар Ω касается всех рёбер правильной усечённой пирамиды, а шар ω касается всех её граней. Найдите угол наклона боковой грани пирамиды к плоскости её основания.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

1	2	3	4	5	6	7
☒	☐	☐	☐	☐	☐	☐

СТРАНИЦА 1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. **Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно.** Порча QR-кода недопустима!

$A = \overline{aaaa} = a \cdot 1111 = a \cdot 11 \cdot 101$, 11 и 101 - простые, a - цифра ($a < 10$)

$A \cdot B \cdot C$ - квадрат $\Rightarrow \partial_{101}(B \cdot C) \underset{2}{\equiv} 1$, $\partial_{11}(B \cdot C) \underset{2}{\equiv} 1$, но $C < 100 \Rightarrow \partial_{101} C = 0$,

$B < 1000 \Rightarrow \partial_{101} B = 1 \Rightarrow B = \overline{b0b}$, но хотя бы 1 цифра числа B равна

$7 \Rightarrow b = 7 \Rightarrow B = 707 \not\vdots\, 11$, $\partial_{11}(B \cdot C) \underset{2}{\equiv} 1$, $C < 100 \Rightarrow \partial_{11} C = 1 \Rightarrow$

$C = \overline{cc}$, но в C хотя бы 1 цифра равна $1 \Rightarrow c = 1 \Rightarrow C = 11$

$A \cdot B \cdot C$ - квадрат, $A = a \cdot 11 \cdot 101$, $B = 707$, $C = 11$, $a < 10 \Leftrightarrow A = 7777$, $B = 707$, $C = 11$

Ответ: $(7777; 707; 11)$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

1 ☐ 2 ☒ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА 1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. **Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно.** Порча QR-кода недопустима!

$K = \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{3}{xy} = \frac{x+y+3}{xy}$, $\quad \frac{x+y+3}{xy} = \frac{(x-4)+(y+4)+3}{(x-4)(y+4)}$, $\quad x>0 \; y>0$, $x+y+3>0$

$(x-4)(y+4) = xy \Leftrightarrow 4x-4y-16=0 \Leftrightarrow x-y-4=0$

$a^3+b^3+c^3-3abc = (a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-ac-bc)$ для $\forall a,b,c \in R$

~~$a=x,\ b=-y,\ c=-4;$~~ $M = x^3-y^3-12xy = x^3+(-y)^3+(-4)^3-3\cdot x\cdot(-y)\cdot(-4)+4^3 =$

$= (x-y-4)(x^2+(-y)^2+(-4)^2-x(-y)-x\cdot(-4)-(-y)(-4)) + 4^3 = 4^3$, т.к. $x-y-4=0$

$x=5,\ y=1$ подходит под условие и $M=4^3$ (т.е. $M=4^3$ возможно)

Ответ: $M = 4^3$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☒ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА 1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. **Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно.** Порча QR-кода недопустима!

$$(\sin\pi y - \sin\pi x)\sin\pi y = (\cos\pi y + \cos\pi x)\cos\pi y$$

$$2\sin\frac{\pi(y-x)}{2}\cdot\cos\frac{\pi(y+x)}{2}\sin\pi y = 2\cos\frac{\pi(y-x)}{2}\cos\frac{\pi(y+x)}{2}\cos\pi y$$

$$\left[\begin{array}{l}\cos\frac{\pi(y+x)}{2}=0 \Leftrightarrow \frac{\pi(y+x)}{2} = \pm\frac{\pi}{2}+2\pi n,\ n\in Z \Leftrightarrow x+y=\pm 1+4n,\ n\in Z\\ 2\sin\frac{\pi(y-x)}{2}\cancel{\cos\frac{\pi(y+x)}{2}}\cdot\sin\pi y = 2\cos\frac{\pi(y-x)}{2}\cos\pi y \Leftrightarrow\end{array}\right.$$

$$\cos\frac{\pi(-y-x)}{2} - \cos\frac{\pi(3y-x)}{2} = \cos\frac{\pi(-y-x)}{2} + \cos\frac{\pi(3y-x)}{2} \Leftrightarrow$$

$$\cos\frac{\pi(3y-x)}{2} + \cos\frac{\pi(3y-x)}{2} = 0 \Leftrightarrow \cos\frac{\pi(3y-x)}{2} = 0 \Leftrightarrow$$

$$\frac{\pi(3y-x)}{2} = \pm\frac{\pi}{2} + 2\pi k,\ k\in Z \Leftrightarrow 3y-x = \pm 1 + 4k,\ k\in Z$$

Ответ на пункт а: $\left[\begin{array}{l} x+y=\pm 1+4n,\ n\in Z\\ 3y-x=\pm 1+4k,\ k\in Z\end{array}\right. = \left[\begin{array}{l} x+y\in Z,\ x+y \not\vdots\, 2\\ 3y-x\in Z,\ 3y-x\not\vdots\, 2\end{array}\right.$

$$\underset{[0;\ \pi]}{\arccos\frac{x}{7}} - \underset{[-\frac{\pi}{2};\ \frac{\pi}{2}]}{\arcsin\frac{y}{4}} \in \left[-\frac{\pi}{2};\ \frac{3\pi}{2}\right]$$

$$\arccos\frac{x}{7} - \arcsin\frac{y}{4} > -\frac{\pi}{2} \Leftrightarrow \begin{cases}\left[\begin{array}{l}\arccos\frac{x}{7}\neq 0\\ \arcsin\frac{y}{4}\neq\frac{\pi}{2}\end{array}\right.\\ \frac{x}{7}\in[-1;1]\\ \frac{y}{4}\in[-1;1]\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}\left[\begin{array}{l}x\neq 7\\ y\neq 4\end{array}\right.\\ x\in[-7;7]\\ y\in[-4;4]\end{cases}$$

~~$x+y\in[-11;11]$, $3y-x\in[-19;19]$~~

~~$x+y=\pm1+4n = -11, -9, -7, -5, -3, -1, 1, 3, 5, 7, 9, 11$~~

$x+y\not\vdots\, 2$, $x\in Z$, $y\in Z \Leftrightarrow 3y-x\not\vdots\, 2$, $x\in Z$, $y\in Z$

Получается, что нужно найти кол-во пар $(x;y)$ ~~та~~ таких, что $x, y\in Z$, $x+y\not\vdots\, 2$, $(x;y)\neq(7;4)$, $x\in[-7;7]$, $y\in[-4;4]$. Нужных пар вида $(x;-4)-8$, $(x;-3)-7$, $(x;-2)-8$, $(x;-1)-7$, $(x;0)-8$, $(x;1)-7$, $(x;2)-8$, $(x;3)-7$, $(x;4)-7$. Итого всех нужных пар $8\cdot4+7\cdot5=32+35=67$

Ответ на пункт б: 67.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☒ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА 1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. **Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно.** Порча QR-кода недопустима!

Пусть всего в конце месяца было выделено x ($x>4$) билетов, а одиннадцатиклассников n. ~~Тогда~~ Так как вероятность попадания на концерт увеличилась, то $n \geq 4$ (иначе начальная вероятность $=1$). $P_H = \frac{C_4^2}{C_n^2}$ – начальная (в начале месяца) вероятность того, что Вася и Петя вместе попадут на концерт. $P_K = \frac{C_x^2}{C_n^2}$ – та же вероятность в конце месяца.

$11P_H = P_K \Leftrightarrow 11C_4^2 = C_x^2 \Leftrightarrow 11\cdot 12 = x(x-1)$, $x>4 \Leftrightarrow x = 12$

(второй корень -11)

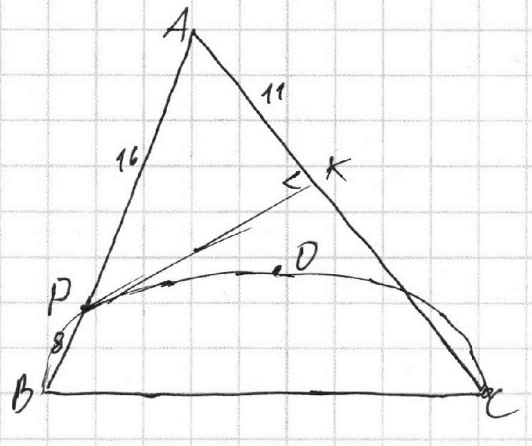
Ответ: 12 билетов.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☒	☐	☐

СТРАНИЦА 1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. **Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно.** Порча QR-кода недопустима!



$\angle BOC = 2\angle BAC$

$(BPOC) \Rightarrow \angle BPC = \angle BOC = 2\angle BAC$

$\angle PCA = \angle BPC - \angle BAC = \angle BAC$

$\Rightarrow \triangle APC$ - равнобедр.

Пусть K - основание высоты из P на AC

$\triangle APC$ - равнобедр, PK - высота

$\Rightarrow K$ - середина AC

$AK = \frac{1}{2}\cdot AC = 11$

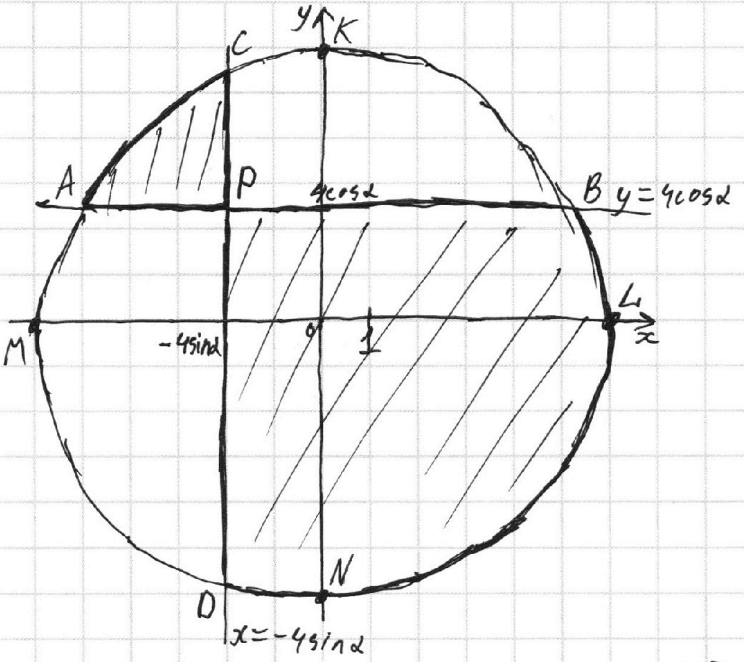
$AP = 16$

$\angle PKA = 90^\circ \Rightarrow PK = \sqrt{AP^2 - AK^2} = \sqrt{16^2 - 11^2} = \sqrt{5\cdot 27} = 3\sqrt{15}$

$\sin\angle BAC = \frac{PK}{AP} = \frac{3\sqrt{15}}{16}$

$S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} AB\cdot AC\cdot \sin\angle BAC = \frac{1}{2}\cdot(16+8)\cdot 22\cdot\frac{3\sqrt{15}}{16} = 11\cdot 24\cdot\frac{3\sqrt{15}}{16} =$

$= 11\cdot\frac{9\sqrt{15}}{2} = \frac{99\sqrt{15}}{2}$ Ответ: $\frac{99\sqrt{15}}{2}$



$$\begin{cases}(x+4\sin\alpha)(y-4\cos\alpha)\le 0\\ x^2+y^2\le 36\end{cases}$$

$4\sin\alpha,\ 4\cos\alpha\in[-4;4]$

Заштрихуем $\Phi(\alpha)$

Периметр $\Phi(\alpha)$ состоит из 2 отрезков (AB и CD) и двух дуг окружности $x^2+y^2=6^2$

Отметим точки ~~~~ на рисунке

$\smile CK=\smile ND,\ \smile BL=\smile AM$

$\Rightarrow \smile AC+\smile BD=\smile MK+\smile LN= 180^\circ$

$\Rightarrow$ периметр двух дуг равен $\frac{2\pi\cdot 6}{2}=6\pi$

$\begin{cases}x^2+y^2=36\\ x=-4\sin\alpha\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}y^2=36-4^2\sin^2\alpha\\ x=-4\sin\alpha\end{cases}$, $CD=|y_2-y_1|=2\sqrt{36-4^2\sin^2\alpha}$

$\begin{cases}x^2+y^2=36\\ y=4\cos\alpha\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x^2=36-4^2\cos^2\alpha\\ y=4\cos\alpha\end{cases}$, $AB=|x_2-x_1|=2\sqrt{36-4^2\cos^2\alpha}$

$$AB+CD=2\left(\sqrt{36-4^2\sin^2\alpha}+\sqrt{36-4^2\cos^2\alpha}\right)=8\left(\frac{\sqrt{9-4\sin^2\alpha}+\sqrt{9-4\cos^2\alpha}}{2}\right)$$

$$\underset{\text{p}}{\le} 8\cdot\sqrt{\frac{9-4\sin^2\alpha+9-4\cos^2\alpha}{2}}=8\cdot\sqrt{\frac{18-4}{2}}=8\sqrt{7}$$

неравенство о средних

Равенство достигается только при $9-4\sin^2\alpha=9-4\cos^2\alpha$

$\Leftrightarrow \cos^2\alpha=\sin^2\alpha$

$AB+CD+6\pi\le 8\sqrt{7}+6\pi=M$

равенство достигается при $\cos^2\alpha=\sin^2\alpha\Leftrightarrow$

$\cos^2\alpha-\sin^2\alpha=0\Leftrightarrow\cos 2\alpha=0\Leftrightarrow 2\alpha=\pm\frac{\pi}{2}+2\pi k,\ k\in\mathbb{Z}\Leftrightarrow$

$\alpha=\pm\frac{\pi}{4}+\pi k,\ k\in\mathbb{Z}$

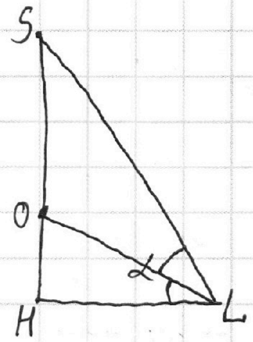
Ответ: $M=8\sqrt{7}+6\pi$, достиг. при $\alpha=\pm\frac{\pi}{4}+\pi k,\ k\in\mathbb{Z}$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☒

СТРАНИЦА 2 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. **Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно.** Порча QR-кода недопустима!

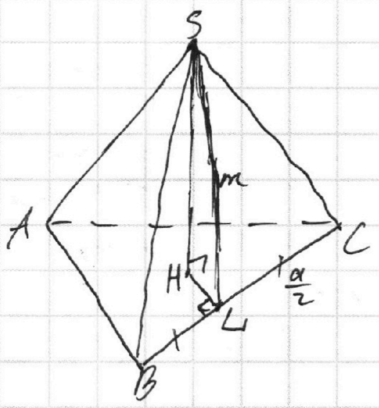


$\frac{HO}{OS} = \frac{HL}{LS}$, $HO+OS=SH \Rightarrow OH = \frac{HL}{HL+SL}\cdot SH$

$MH = KL\sin\alpha$, $MH = 2OH = \frac{2HL\cdot SH}{HL+SL}$

$KL\cdot\sin\alpha = SL\sin\alpha\cdot\frac{BC}{P_{\triangle SBC}} = SH\cdot\frac{BC}{P_{\triangle SBC}}$

$MH=KL\sin\alpha \Rightarrow \frac{HL}{HL+SL} = \frac{BC}{SB+SC+BC}$



Пусть ~~BC~~ $a=AB=AC=BC$, $m=SL$

HL по свойству центроида $\frac{a}{3}$

$CL=\frac{a}{2}$, ~~SB~~ $SC=\sqrt{SL^2+LC^2}=\sqrt{m^2+\frac{a^2}{4}}$

$\frac{HL}{HL+SL}=\frac{BC}{SB+SC+BC} \Rightarrow \frac{a/3}{a/3+m} = \frac{a}{2\sqrt{m^2+\frac{a^2}{4}}+a} \Rightarrow$

$\Rightarrow a+\sqrt{4m^2+a^2} = a+3m \Rightarrow$

$\Rightarrow 4m^2+a^2=9m^2 \Rightarrow 5m^2=a^2 \xRightarrow{a,m>0} \frac{a}{m}=\sqrt{5}$

$\cancel{\sin}\ \cos\alpha = HL : SL = \frac{a/3}{m} = \frac{\sqrt{5}}{3} \Rightarrow \alpha = \cancel{\arcsin\frac{\sqrt{5}}{3}}\ \arccos\frac{\sqrt{5}}{3}$

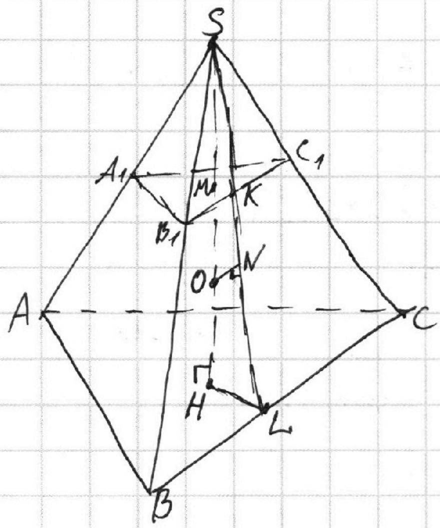
Ответ: $\cancel{\arcsin\frac{\sqrt{5}}{3}}\ \arccos\frac{\sqrt{5}}{3}$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☒

СТРАНИЦА 1 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. **Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно.** Порча QR-кода недопустима!



$SABC$ – правильная $\Rightarrow$

H – центр $\triangle ABC$ ($\triangle ABC$ – равностор)

SH – высота, $SA=SB=SC$

~~Ох~~ Сфера Ω касается всех рёбер при $ABCA_1B_1C_1 \Rightarrow$ ~~она Ω касается~~ ~~в(проекция)~~ Ω проецируется в вписанные окружности $\triangle ASB, \triangle BSC, \triangle CSA$ при проецировании на $(ASB), (BSC), (SCA)$ соотв.

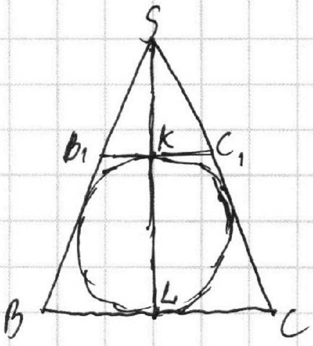
$\triangle SAB = \cancel{\triangle SBC}\ \triangle SCB$, B_1 в них одинаковы,

B_1A_1, B_1C_1 – вторые касательные к вписанным окружностям.

$\Rightarrow SA_1 = SC_1 \Rightarrow$ в ~~одно~~ (SAC) касательная к вписанной окружности $\triangle ASC$ $A_1C_1 \parallel AC$ (т.к. $SA=SC$), но

$\triangle SAC = \triangle SBC = \triangle SCB \Rightarrow A_1B_1 \parallel AB$, и $B_1C_1 \parallel BC \Rightarrow (ABC) \parallel (A_1B_1C_1)$

Пусть $K = B_1C_1 \cap \Omega$, $L = BC \cap \Omega$, SKL – прямая (т.к. K и L точки касания впис. окр. $\triangle SBC$ – равнобедр. с BC и B_1C_1, $BC \parallel B_1C_1$)



K и L – середины B_1C_1 и BC из симметрии

Из гомотетии впис. окр. $\triangle SBC$ во вневпис. окр. $\triangle SBC$ в точке S: $\cancel{\frac{SL}{SK}}\ \frac{SK}{SL} = \frac{p_{\triangle SBC} - BC}{p_{\triangle SBC}} \Rightarrow$

$$\Rightarrow KL = SL\left(1 - \frac{p_{\triangle SBC} - BC}{p_{\triangle SBC}}\right) = SL \cdot \frac{BC}{p_{\triangle SBC}}$$

Пусть $\alpha = \angle((ABC),(SBC)) \Rightarrow \angle SLH = \alpha$. Пусть O – центр Ω

Понятно, что $O \in SH$, т.к. $SABC$ – правильная пирамида

$M = SH \cap (A_1B_1C_1)$, $OM = OH$. N – основание высоты из O на (SBC), $N \in SKL$ из симметрии, $ON = OH \Rightarrow O$ – основание бис. $\angle HLS$; $\angle SHL = 90^\circ$, т.к. SH – высота $SABC$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА __ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. **Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно.** Порча QR-кода недопустима!

$A = \overline{aaaa} = a \cdot 1111 = a \cdot 11 \cdot 101$ $\quad B = \cancel{\overline{\phi 07}}$ $\quad C = 11$

$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{3}{xy} = \frac{x+y+3}{xy} = \frac{x+y+3}{\cancel{xy-4x-4y+1}\,(x-4)(y+4)} = \frac{x+y+3}{xy-4y+4x-16}$

$\left[\begin{array}{l} x+y+3=0 \quad \varnothing \\ 4y-4x+16=0 \Leftrightarrow y-x+4=0 \end{array}\right.$

$x^3+(-y)^3 - 3(4)x(-y) + 4^3 = (4+x-y)(4^2+x^2+y^2$

$a^3+b^3+c^3-3abc = (a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-ac-bc)$

$\sin\frac{\pi(y-x)}{2} \cdot \cos\frac{\pi(x+y)}{2} \sin\pi y = \cos\frac{\pi(x+y)}{2}\cos\frac{\pi(x-y)}{2}\cos\pi y$

$\left[\begin{array}{l} \cos\frac{\pi(x+y)}{2} = 0 \\ \sin\frac{\pi(y-x)}{2}\sin\pi y = \cos\frac{\pi(x-y)}{2}\cos\pi y \end{array}\right.$

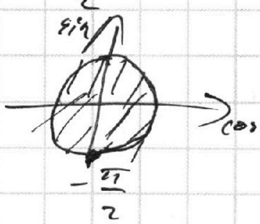
$\cos(\alpha \mp \beta) = \cos\alpha\cos\beta \pm \sin\alpha\sin\beta$

$2\sin\alpha\sin\beta = \cos(\alpha-\beta) - \cos(\alpha+\beta)$

$2\cos\alpha\cos\beta = \cos(\alpha-\beta) + \cos(\alpha+\beta)$

$\cancel{\cos\frac{\pi(-y-x)}{2}} - \cos\frac{\pi(3y-x)}{2} = \cos\frac{\pi(x-3y)}{2} + \cancel{\cos\frac{\pi(x+y)}{2}}$

$\arccos\frac{x}{4} - \arcsin\frac{y}{4} > -\frac{\pi}{2}$



$[0;\pi] - \left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]$

$[0;\pi] + \left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right] = \left[-\frac{\pi}{2};\frac{3\pi}{2}\right]$

$\arccos\frac{x}{4} - \arcsin\frac{y}{4} = -\frac{\pi}{2}$

$\arccos\frac{x}{4} = 0 \qquad \arcsin\frac{y}{4} = +\frac{\pi}{2}$

$\frac{x}{4} = 1 \qquad \frac{y}{4} = 1$

$x=4 \quad y=4$

4) $4 \to x$ $\quad n$ – учеников $\quad n \geq 4 \quad n = 2,3$

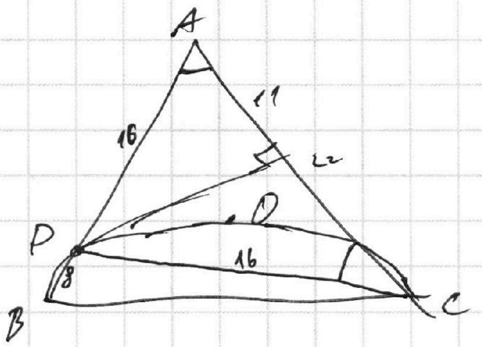
$\frac{C_4^2}{C_n^2} \to \frac{C_x^2}{C_n^2} \qquad 11 \cdot 6 = C_x^2 = \frac{x(x-1)}{2} \qquad 11 \cdot 12$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

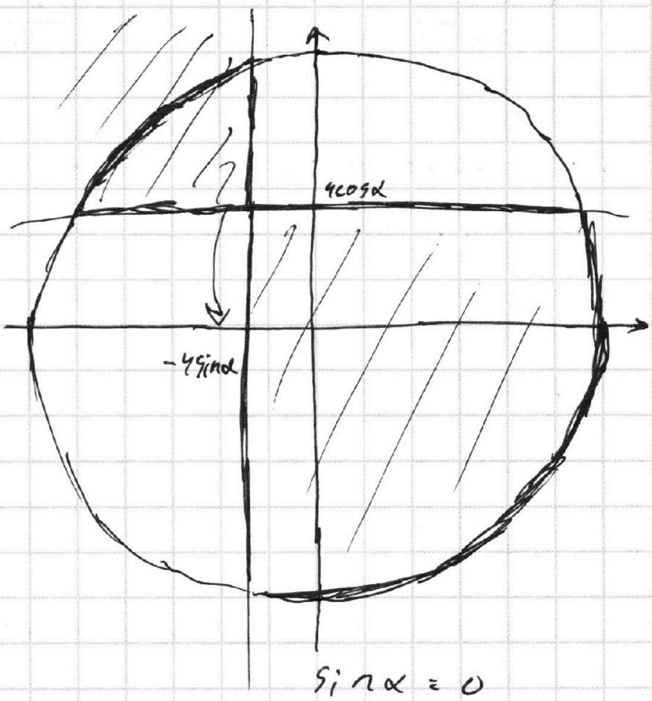
1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА __ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. **Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно.** Порча QR-кода недопустима!



$\sin\alpha = \frac{\sqrt{16^2-11^2}}{16} = \frac{\sqrt{5\cdot 27}}{16} = \frac{3\sqrt{15}}{16}$



$(x+4\sin\alpha)(y-4\cos\alpha)\le 0$

$x^2+y^2\le 36$

$x^2+y^2=36$

$y=4\cos\alpha$

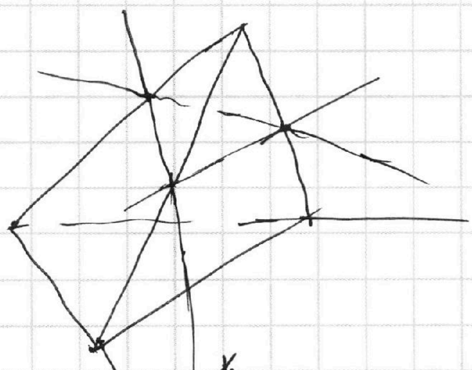
$x^2=4^2(9^2-\cos^2\alpha)$

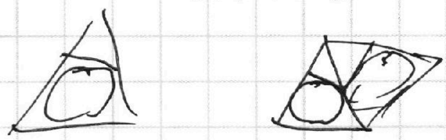
$8\left(\sqrt{81-\cos^2\alpha}+\sqrt{81-\sin^2\alpha}\right) \gtrless$

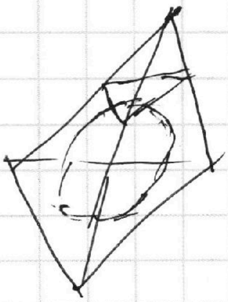
$\gtrless 16\sqrt{\frac{162-1}{2}} = 16$

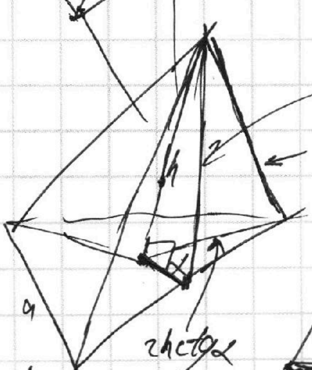
$\sin\alpha=0$

$\cos\alpha=0$

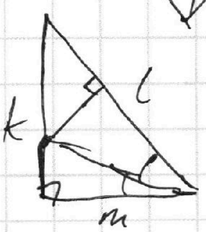


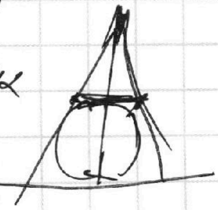






$\frac{3h\,ctg\alpha}{\sqrt3/2}$





$l=\frac{h}{\sin\alpha}$

$k=h$ $\quad m=\frac{a}{3}$

$2\frac{m}{l+m}\cdot k$ $\quad \frac{\frac{a}{3}}{l+m}h=\frac{a}{2p}\cdot h$

||

$2p=3l+3m$

$\left(1-\frac{p-a}{p}\right)\cdot\frac{h}{\sin\alpha}\cdot\sin\alpha=\frac{a}{p}\cdot h$