

МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

11 КЛАСС. Вариант 3



1. [3 балла] Найдите все тройки натуральных чисел $(A; B; C)$ такие, что:

- A — четырёхзначное число, составленное из одинаковых цифр,
- B — трёхзначное число, хотя бы одна из цифр которого равна 6,
- C — двухзначное число, хотя бы одна из цифр которого равна 3,
- произведение $A \cdot B \cdot C$ является квадратом некоторого натурального числа.

2. [3 балла] Положительные числа x и y таковы, что значение выражения $K = \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{5}{xy}$ не изменяется, если x уменьшить на 2, а y — увеличить на 2. Найдите все возможные значения выражения $M = x^3 - y^3 - 6xy$.

3. [5 баллов] а) Найдите все пары действительных чисел $(x; y)$ такие, что $(\sin \pi x + \sin \pi y) \sin \pi x = (\cos \pi x - \cos \pi y) \cos \pi x$.

б) Сколько пар целых чисел (x, y) удовлетворяют одновременно этому уравнению и неравенству

$$\arcsin \frac{x}{6} + \arcsin \frac{y}{2} < \pi?$$

4. [4 балла] В начале месяца было выделено 4 билета на праздничный концерт, которые планировалось случайным образом распределить между одиннадцатиклассниками. В конце месяца выяснилось, что будет выделено больше 4 билетов. Одиннадцатиклассники Петя и Вася вычислили, что вероятность им обоим вместе попасть на концерт в начале месяца была в 6 раз меньше, чем оказалась в конце месяца. Сколько всего было выделено билетов на концерт в конце месяца, если количество одиннадцатиклассников не изменилось?

5. [5 баллов] Точка O — центр окружности ω_1 , описанной около остроугольного треугольника ABC . Окружность ω_2 , описанная около треугольника BOC , пересекает отрезок AB в точке P . Найдите площадь треугольника ABC , если $AP = 25$, $BP = 5$, $AC = 35$.

6. [6 баллов] На координатной плоскости изображена фигура $\Phi(\alpha)$, состоящая из всех точек, координаты $(x; y)$ которых удовлетворяют системе неравенств

$$\begin{cases} (x + 5\sqrt{2} \cos \alpha)(y + 5\sqrt{2} \sin \alpha) \leq 0, \\ x^2 + y^2 \leq 169. \end{cases}$$

Найдите максимальное значение M периметра (длины границы) фигуры $\Phi(\alpha)$ и укажите все значения α , при которых оно достигается.

7. [6 баллов] Шар Ω касается всех рёбер правильной усечённой пирамиды, а шар ω касается всех её граней. Пусть сторона верхнего основания меньше, чем сторона нижнего. Найдите отношение площади верхнего основания пирамиды к площади её боковой поверхности.



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

- | | | | | | | |
|---------------------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|
| <input checked="" type="checkbox"/> 1 | <input type="checkbox"/> 2 | <input type="checkbox"/> 3 | <input type="checkbox"/> 4 | <input type="checkbox"/> 5 | <input type="checkbox"/> 6 | <input type="checkbox"/> 7 |
|---------------------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|

СТРАНИЦА
1 из 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Учес A: первого в варианте:

1111, 2222 ... 9999.

Заметим, что все они имеют вид: (какое-то число \times 111)

Разбираем число 1111 = 11 · 101, 101 - число простое.

Т.к. $(A \cdot B \cdot C)$ — квадрат некоторого натурального числа. Тогда все члены должны делиться квадратом в четной степени (2, 4 ...)

Т.е. в числах B или C должны содержаться простые множители

т.к. C — квадрат \Rightarrow только в B

Ну а т.к. в B должны содержаться — 6. То единственные возможные $B = \underline{606} = 101 \cdot 2 \cdot 3$.

Также будем комбинировать варианты, с учетом, что в C одн. 3.

- | | |
|--|---|
| 1) 1111, 606 $\Rightarrow C = 66$ X | 2) 2222, 606 $\rightarrow C = 33$ <input checked="" type="checkbox"/> |
| 3) 3333, 606 $\rightarrow C: 22, 88$ | 4) 4444, 606 $\rightarrow C: 66$ |
| 5) 6666, 606 $\rightarrow C: 11, 44, 99$ | 6) 7777, 606 $\rightarrow C: X$ |
| 7) 9999, 606 $\rightarrow C: 66$ | 8) 8888, 606 $\rightarrow C: 33$, X |

Ответ: $(2222, 606; 33); (8888, 606; 33)$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

1

2

3

4

5

6

7

СТРАНИЦА

1 из 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по **каждой** из задач **нумеруются отдельно**. Порча QR-кода недопустима!

$$x, y > 0$$

$$k = \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{5}{xy} = \frac{y+x+5}{xy}$$

$$\frac{y+x+5}{xy} = \frac{y+2+x+2+5}{(x-2)(y+2)} \Rightarrow \frac{y+x+5}{xy} = \frac{y+x+5}{(x-2)(y+2)} \quad || \begin{matrix} y > 0 \\ x > 0 \\ y+2 > 0 \\ x-2 > 0 \end{matrix} \Rightarrow y+x+5 > 0$$

$$xy = (x-2)(y+2) \Rightarrow xy = xy + 2x - 2y - 4 \quad | :2$$

$$0 = x - y - 2 \Rightarrow x - y = 2$$

$$(x-y)^3 = 8 \Rightarrow x^3 - 3x^2y + 3xy^2 - y^3 = 8 \Rightarrow x^3 - y^3 = 8 + 3xy^2 - 3x^2y$$

$$x^3 - y^3 = 8 + 3xy \quad (x-y)^2 \Rightarrow x^3 - y^3 = 8 + 6xy$$

$$x^3 - y^3 - 6xy = 8$$

т.е. $M = 8$ - единственный возможный значение

Ответ: 8.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.



- | | | | | | | |
|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |
|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|

СТРАНИЦА
1 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по **каждой из задач** нумеруются **отдельно**. Порча QR-кода недопустима!

$$a) (\sin \pi x + \sin \pi y) \cdot \sin \pi x = (\cos \pi x - \cos \pi y) \cdot \cos \pi x$$

$$\sin^2 \pi x + \sin \pi y \cdot \sin \pi x = \cos^2 \pi x - \cos \pi y \cdot \cos \pi x$$

$$\cos \pi y \cdot \cos \pi x + \sin \pi y \cdot \sin \pi x = \cos^2 \pi x - \sin^2 \pi x$$

$$\cos(\pi y - \pi x) = \cos(2\pi x) \Rightarrow \begin{cases} \pi y - \pi x = 2\pi x + 2k \\ \pi y - \pi x = -2\pi x + 2k \end{cases} \quad k \in \mathbb{Z}$$

$$\begin{cases} y - x = 2x + 2k \\ y - x = -2x + 2k \end{cases} \quad \boxed{\begin{cases} y = 3x + 2k & (1) \\ y = -x + 2k & (2) \end{cases} \quad k \in \mathbb{Z}}$$

т.е. можно для или x, y , то вдели, если она учита или 1, или 2 усл, то уравнение выполняется (не означает)

$$b) \arcsin \frac{x}{6} + \arcsin \frac{y}{2} < \pi$$

Где можно синус: $|x| \leq 6$ и $|y| \leq 2$

Будут вспомогат. из (1) и (2) все возможные пары условий чисел, которые будут

указать наимену 003

$$(1) (0;0) (0;2) (0;-2) (1;1) (1;-1) (2;2) (2;0) (2;-2) (3;1) (3;-1) \\ (4;2) (4;0) (4;-2) (5;1) (5;-1) (6;2) (6;0) (6;-2) (-1;1) (-1;-1)$$

$$(3) (-2;2) (-2;0) (-2;2) \dots (-6;2) (-6;0) (-6;-2)$$

$$(2) (0;0) (0;2) (0;-2) (1;1) (1;-1) (2;2) (2;0) (2;-2)$$

... пары такие же, как и в 1



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

- | | | | | | | |
|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

СТРАНИЦА
2 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по **каждой из задач** нумеруются **отдельно**. Порча QR-кода недопустима!

По сумме наименьших кратных пары, т.к. $(\arcsin \frac{x}{6} + \arcsin \frac{y}{2}) = \pi$

и исключено что из общего кол-во, потому что $|\arcsin x| \leq \frac{\pi}{2} \Rightarrow \text{наиб} \leq \frac{\pi}{2}$

$$\arcsin \frac{x}{6} = \frac{\pi}{2} \text{ при } x = 6 \quad \arcsin \frac{y}{2} = \pi/2 \text{ при } y = 2$$

т.е. сумма пар, не лежащих на $(6; 2)$

Ну а дальше всего пар (ки все четные от -6 до 3, кроме 6
ки все нечетн x до 2)

четных x от -6 до 6 (четн. 0) : 7.

Кратн x от -6 до 6 : 6

21 20 19

$$\text{Итого: } 7 \cdot 3 - 1 + 6 \cdot 2 = \underline{\underline{32}}$$

Ответ: 32

На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

- | | | | | | | |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

СТРАНИЦА
1 из 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Получим одноракую вероятность попадания на концерт у Лены и Вани

Пусть x -ко-бо билетов N -ко-бо билетов

$P(A)$ - Реша попал B - Ваня попал

$$P(A) = \frac{x}{N} \quad P(B) = \frac{x}{N}$$

$$P(B|A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} = \frac{P(B|A) \cdot P(A)}{P(A)} = \frac{\frac{x-1}{N-1} \cdot \frac{x}{N}}{\frac{x}{N}} = \frac{x-1}{N-1}$$

- вероятность того, что попал Лена при усл. что
попал Ваня

Из этого условия есть привод $A \cap B$ и $A|B$

попал Ваня Попал Лена при усл.

попал Лена

$$\frac{x}{N} \cdot \frac{x-1}{N-1}$$

Теперь к нахождению уравнения: Было

$$x \quad N$$

$$\text{Стало} \quad t \quad n$$

$$6 \cdot \frac{4}{n} \cdot \frac{3}{n-t} = \frac{t}{n} \cdot \frac{t-1}{n-t}$$

$$t^2 - t = 72 \Rightarrow t^2 - t - 72 = 0 \Rightarrow t_1 = 9 \quad t_2 = -8 \text{ - ко-бо билетов оркестра.}$$

Одев ко-бо билетов.

Значит O_7 бер: 9



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении **каждой** задачи **отдельно**.

- | | | | | | | |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|---------------------------------------|----------------------------|----------------------------|
| <input type="checkbox"/> 1 | <input type="checkbox"/> 2 | <input type="checkbox"/> 3 | <input type="checkbox"/> 4 | <input checked="" type="checkbox"/> 5 | <input type="checkbox"/> 6 | <input type="checkbox"/> 7 |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|---------------------------------------|----------------------------|----------------------------|

СТРАНИЦА
1 из 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач **нумеруются отдельно**. Порча QR-кода недопустима!

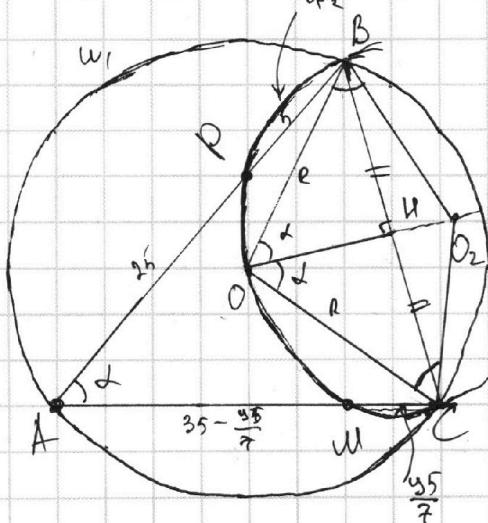
Приму, чеши кривит. Считем, что w_2 должна лежать на AC .

Потому что, если $\angle A$ в ΔABC было продолжено и паскато, то

$$25 \cdot 30 = 35^2 \text{ или } 25 \cdot 30 = 35 \cdot (35+x) \text{ т.к. } x \text{ не может}$$

Согласованико $25 \cdot 30 = 35 \cdot (35-x) \Rightarrow 150 = 245 - 7x$

$$x = \frac{95}{7}$$



1. $\triangle BOC$ - ртс $BO=OC=R$

-> Тому чеши оар-ги оже около BOC лежат
ни OH - бисс/инц/бисс

2. $\angle BAC$ - вник, оар-ти към $\angle BOC$

$\angle BOC$ - унпр. оар-ти към $\angle BAC$

Тому съди $\angle BAC = \alpha \Rightarrow \angle BOC = \angle HOC = \alpha$

3. Ръсъв O_2 . унпр w_2 а $O_2B = O_2O = O_2C = r$

$$\triangle O_2OB \text{ - ртс} \Rightarrow \angle O_2OB = \angle O_2BO = \alpha = \angle OCO_2$$

4. Тому $R = 2r \cos \alpha$, Тами $R = \frac{BC}{2 \sin \alpha}$

$$BC = 30^2 + 35^2 - 2 \cdot 30 \cdot 35 \cdot \cos \alpha$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

- | | | | | | | |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

СТРАНИЦА
1 ИЗ 3

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\begin{cases} (x + 5\sqrt{2} \cos \alpha) (y + 5\sqrt{2} \sin \alpha) \leq 0 \quad (1) \\ x^2 + y^2 \leq 16^2 \quad (2) \end{cases}$$

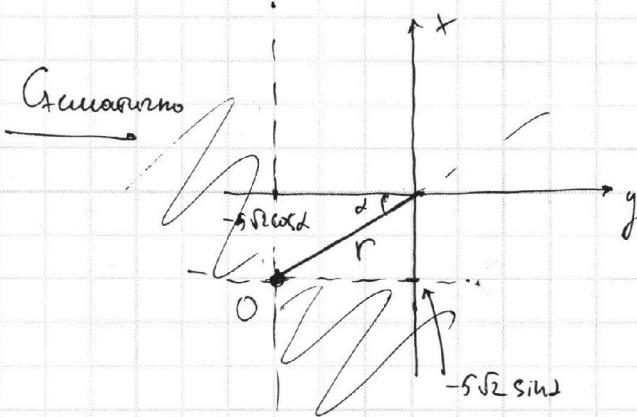
- круг с центром $(0,0)$ и радиусом 13

Рассмотрим $\leq (1)$

~~тогда это нер-во $x = -5\sqrt{2} \cos \alpha \quad y = -5\sqrt{2} \sin \alpha$~~

Но сумма это можно выражать так

$$\begin{cases} x \geq -5\sqrt{2} \cos \alpha \\ y \leq -5\sqrt{2} \sin \alpha \\ x \leq -5\sqrt{2} \cos \alpha \\ y \geq -5\sqrt{2} \sin \alpha \end{cases}$$



Можно заметить, что сумма $x+0$ зависит от α . То есть

изменяется по закону $r = 5\sqrt{2} // 8\sqrt{2} > 7$

Также подставим всю нашу систему в косинус, как менеется

$\varphi(\alpha)$ в зависимости от α

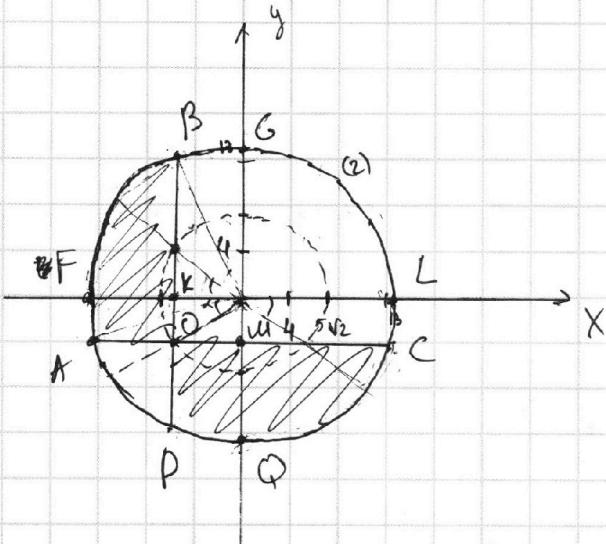
Рисунок на след. странице

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

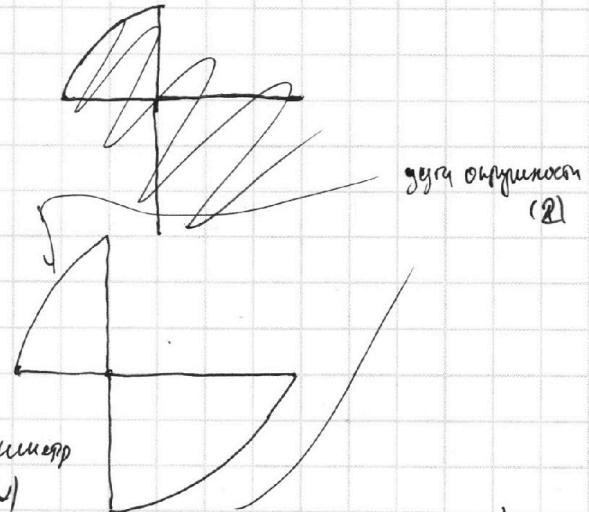
- | | | | | | | |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|---------------------------------------|----------------------------|
| <input type="checkbox"/> 1 | <input type="checkbox"/> 2 | <input type="checkbox"/> 3 | <input type="checkbox"/> 4 | <input type="checkbox"/> 5 | <input checked="" type="checkbox"/> 6 | <input type="checkbox"/> 7 |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|---------------------------------------|----------------------------|

СТРАНИЦА
2 из 3

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



Доказуем, что $\Phi(\alpha)$ будет возрастать
как-то так



Нам нужно показать, что $\Phi(\alpha)$

т.к. имеется прямое симметрия, то $\Phi(\alpha)$ будет 4 фигура $(0; \frac{\pi}{2})$ с

Потому разберем случай где $\alpha \in [0; \frac{\pi}{2}]$ \rightarrow α между α и $\pi/2$

и все фигуры будут прямые
 $\alpha = n\pi + \frac{\pi}{2}, n \in \mathbb{Z}$

P - кривизна $\Phi(\alpha)$

$$BK = KP = \sqrt{169 - 50 \cos^2 \alpha}$$

$$AU = UC = \sqrt{169 - 50 \sin^2 \alpha}$$

$$BP = 2\sqrt{169 - 50 \cos^2 \alpha} \quad AC = 2\sqrt{169 - 50 \sin^2 \alpha}$$

$$\cup AF = \cup LC, \cup BG = \cup PQ$$

$$\text{Тогда } \cup AB + \cup PC = \cup AF + \cup FB + \cup PQ + \cup QC =$$

$$= \cup FB + \cup BG + \cup QC + \cup LC = \cup FG + \cup QL = \pi \cdot 13$$

Причем заметим, что никак не зависит от α .

На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.



- | | | | | | | |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|
| <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|

СТРАНИЦА
3 ИЗ 3

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\text{Тогда } P = 13\pi + 2\sqrt{169 - 50\cos^2 d} + 2\sqrt{169 - 50\sin^2 d}$$

$$\text{Найдем } P'(d) = \frac{-100\cos d \cdot (-5\sin d)}{2\sqrt{169 - 50\cos^2 d}} + \frac{-100\sin d \cdot \cos d}{2\sqrt{169 - 50\sin^2 d}} = 0$$

$$\frac{\cos d \cdot \sin d}{\sqrt{169 - 50\cos^2 d}} = \frac{5\sin d \cos d}{\sqrt{169 - 50\sin^2 d}}$$

$$\sin d \cos d \left(\frac{1}{\sqrt{169 - 50\cos^2 d}} - \frac{1}{\sqrt{169 - 50\sin^2 d}} \right) = 0 \Rightarrow d = \left\{ 0, \frac{\pi}{2} \right\}$$

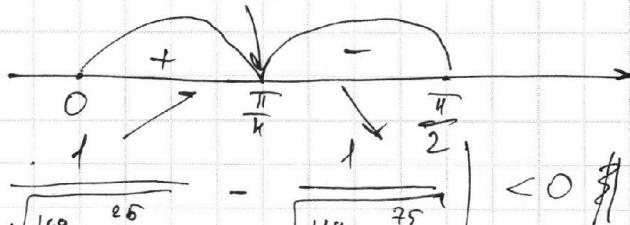
$$\frac{1}{169 - 50\cos^2 d} = \frac{1}{169 - 50\sin^2 d} \Rightarrow 169 - 50\cos^2 d = 169 - 50\sin^2 d$$

$$0 = \cos^2 d - \sin^2 d \Rightarrow \cos 2d = 0$$

$$d = \frac{\pi}{4}$$

$$\text{Тогда } d = 13\pi +$$

max



$$P'\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{169 - \frac{25}{2}}} - \frac{1}{\sqrt{169 - \frac{75}{2}}} \right) < 0$$

где убывает значит \Leftrightarrow максимум

$$\text{Тогда } M = 13\pi + 4 \cdot \sqrt{169 - 50 \cdot \frac{1}{2}} = 13\pi + 4 \cdot 12 = 48 + 13\pi$$

$$\text{при } d = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{2} \cdot n, n \in \mathbb{Z}$$

Ответ:



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

- | | | | | | | |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> |

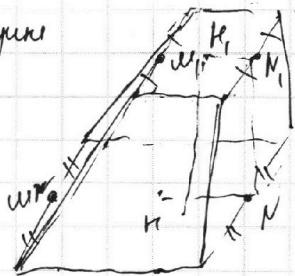
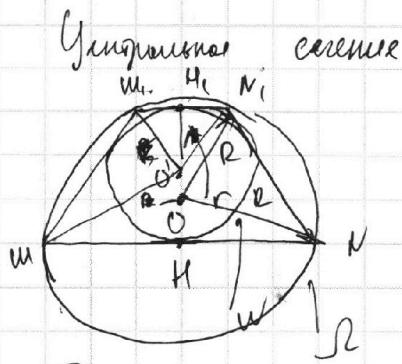
СТРАНИЦА
1 из 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Мар, который ходит вдоль окружности — движется.

Разбрасывая с шаром, который ходит вдоль всех ребер. Он тоже разбрасывает шары и ходит вдоль всех ребер вертикально и наклонно

использования по естеству

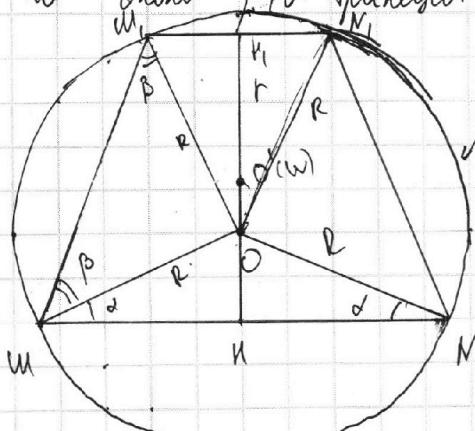


По сути, у нас α/δ угол $M_1M/N/N$ около которого можно определить α/δ в будущем высоту

$$S_{\text{бок}} = M_1M_1^2$$

$$S_{\text{бок}} = \frac{M_1M_1 + MN}{2} \cdot \sqrt{4r^2 + (HN - H_1M_1)^2}$$

Но окно α/δ планируем можно описать окружностью



$$\angle OM_1N_1 = (\beta\alpha - \beta - \alpha) - \beta$$

$$OM_1 = ON_1 = r$$

$$OM = ON = OM_1 = ON_1 = R$$

Если мы знаем $\frac{R}{r}$, то засчита друга

лишена



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи **отдельно**.

- | | | | | | | |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|
| <input type="checkbox"/> 1 | <input type="checkbox"/> 2 | <input type="checkbox"/> 3 | <input type="checkbox"/> 4 | <input type="checkbox"/> 5 | <input type="checkbox"/> 6 | <input type="checkbox"/> 7 |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|

СТРАНИЦА
ИЗ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются **отдельно**. Порча QR-кода недопустима!

А: 1111, 2222, 3333, 4444... 9999

$$\begin{array}{r} 101 \\ \times 11 \\ \hline 101 \\ 101 \\ \hline 111 \end{array}$$

$$(1 \cdot 101) = \begin{array}{r} 101 \\ \times 3 \\ \hline 303 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 60614 \\ \times 55 \\ \hline 303 \\ 303 \\ \hline 606 \end{array}$$

$$1111 = 11 \cdot 101 \cdot 1$$

$$2222 = (1)(101)(2)$$

Б: 101, 202, 303, 404, 505, 606, 707, 808, 909

$$606 = 2 \cdot 303 = 2 \cdot 3 \cdot 101$$

$$11 \cdot 101 = 2 \cdot 3 \cdot 101$$

$$1111, 606, 66$$

$$2222, 606, 33$$

$$U = \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{5}{xy} = \frac{1}{x-2} + \frac{1}{y+2} + \frac{5}{(x-2)(y+2)}$$

$$U = x^3 - y^3 - 6xy - ?$$

$$\frac{y+x+5}{xy} = \frac{y+x+5}{(x-2)(y+2)}$$

$$xy = (x-2)(y+2)$$

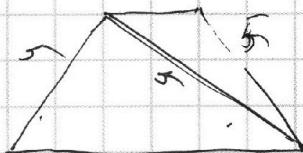
$$D = xy = xy + 2x - 2y - 4$$

$$0 \quad x - y - 2 = 0$$

$$(x-y) = 2$$

$$(x-y)^3 = x^3 - 3x^2y + 3xy^2 - y^3 = 8$$

$$x^3 - y^3 = 8 + 3xy(x-y)$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи** отдельно.



- | | | | | | | |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| <input type="checkbox"/> |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|

СТРАНИЦА
ИЗ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач **нумеруются отдельно**. Порча QR-кода недопустима!

Diagram showing two circles ω_1 and ω_2 intersecting at points B and C . Points A and P are on ω_1 , and point R is on ω_2 . Chords AB and AC are drawn. The angle $\angle PBC$ is marked as α .

Given: $AP = 25$, $PB = 5$, $AC = 35$. Find S_{ABC} .

Diagram of a sphere with a horizontal great circle and a vertical great circle passing through its center.

Diagram showing the geometric construction of the problem, with radii r and R , and distances 25 and 35 indicated.

Calculation:

$$\frac{210}{35} \geq \frac{35}{2\sqrt{3}} \Rightarrow \sin \alpha = \frac{35}{2\sqrt{3}} \Rightarrow 25\sqrt{3} = 35$$

$$25\sqrt{3} = 25 - 7x \Rightarrow 7x = 25\sqrt{3} - 25 \Rightarrow x = \frac{25(\sqrt{3} - 1)}{7}$$

$$90 - (180 - 2\alpha) = 2\alpha - 90 + 90\alpha = 2\alpha$$

$$\sin(180 - 2\alpha) = \frac{BK}{R} = \frac{BK}{r} = \sin 2\alpha = 2 \cos \alpha \sin \alpha$$

$$h^2 = R^2 + r^2 - 2Rr \cos \alpha \quad (R = 2r \cos \alpha)$$

$$2\alpha + \frac{\angle BDC}{2} + 90 - 2 = 90 + \alpha + \frac{\angle BDB}{2} = 180 - \gamma$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи **отдельно**.

СТРАНИЦА
ИЗ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по **каждой из задач** **нумеруются отдельно**. Порча QR-кода недопустима!



$$\angle \alpha + \angle POB + 90^\circ - \beta + \angle PBO = 180^\circ$$

$$\alpha + \angle BOB + \angle BPO = 90^\circ$$

$$R = 2r \cos \frac{\alpha}{2}$$

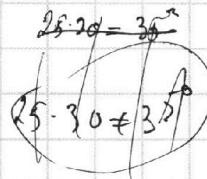
$$R^2 = r^2 + r^2 - 2r \cdot r \cdot \cos(180^\circ - 2\alpha)$$

$$R^2 = r^2 + r^2 + 2r^2 \cos 2\alpha$$

1

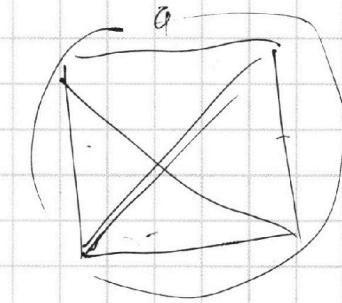
$$4R^2 \cos^2 \alpha = 2r^2$$

$$\cancel{r^2 BC} = R \cdot r + R \cdot r$$



$$r^2 + BC^2 = 2Rr$$

$$\cancel{OK^2} = R^2 = OK^2 + BK^2 = OA^2 + KC^2$$



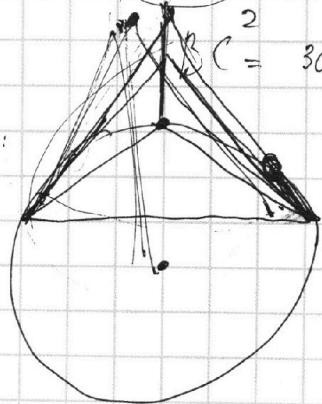
$$\cancel{R \cdot r \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}}$$

$$\frac{1}{2} d_1 \cdot d_2$$

$$R \cdot \frac{d_1}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{1}{2} d_1 \cdot d_2$$

$$\begin{aligned} (\alpha \sqrt{2} \cdot \alpha \sqrt{2}) &= \alpha \cdot \alpha + \alpha \cdot \alpha \\ (\alpha \sqrt{2})^2 + (\alpha \sqrt{2})^2 &= \alpha^2 \end{aligned}$$

$$BC^2 = 30^2 + 35^2 - 2 \cdot 30 \cdot 35 \cdot \cos \alpha$$



$$R \cdot PC = 5 \cdot R + PO \cdot BC$$

$$OCU \cdot R = \frac{95}{7} R + OCU \cdot BC$$

$$POA = \dots$$

$$BCU \dots$$

$$\begin{aligned} S &= \dots \\ R &= \frac{BC}{2 \sin \alpha} \end{aligned}$$

$$BC = 2 \cdot R \cdot \sin \alpha$$

$$BC = \alpha$$

$$S = \frac{\alpha R^2}{4R}$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.



- | | | | | | | |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| <input type="checkbox"/> |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|

СТРАНИЦА
ИЗ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по **каждой из задач** нумеруются **отдельно**. Порча QR-кода недопустима!

$$3 \text{ a) } (\sin \pi x + \sin \pi y) \cdot \sin \pi x = (\cos \pi x - \cos \pi y) \cdot \cos \pi x$$

$$\cancel{\sin \pi x} \quad \sin^2 \pi x + \sin \pi y \cdot \sin \pi x = \cos^2 \pi x - \cos \pi y \cdot \cos \pi x$$

$$\cos \pi y \cdot \cos \pi x + \sin \pi y \cdot \sin \pi x = \cos^2 \pi x - \sin^2 \pi x$$

$$\cos(\pi y - \pi x) = \cos(2\pi x) \Rightarrow \cancel{\pi y - \pi x = 2\pi x}$$

$$\left[\begin{array}{l} \pi y - \pi x = 2\pi x + 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \\ \pi y - \pi x = -2\pi x + 2m\pi, m \in \mathbb{Z} \end{array} \right]$$

$$\left[\begin{array}{l} y - x = 2x + 2n \\ y - x = -2x + 2m \end{array} \right], n, m \in \mathbb{Z}$$

$$\left[\begin{array}{l} y - x = 2x + 2n \\ y - x = -2x + 2m \end{array} \right] \quad \left[\begin{array}{l} y = 3x + 2n \\ y = -x + 2m \end{array} \right] \quad \begin{matrix} 23 \\ \cancel{20} \\ 17 \\ 12 \\ 10 \\ 8 \\ 6 \\ 4 \\ 2 \end{matrix}$$

$$\frac{y}{x} = \frac{4}{3} \quad \frac{y}{x} = \frac{3}{-1}$$

$$\frac{y}{x} = \frac{y-1}{x-1}$$

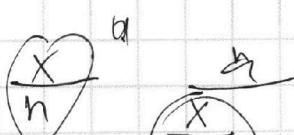
$$12 = y(x-1)$$

$$y^2 - y - 12 = 0$$

$$\begin{array}{r} 15 \\ 13 \\ \hline 12 \\ 12 \\ \hline 0 \end{array}$$

$$\delta = 1 + 72 \cdot 4 = 289$$

$$y =$$



$$P(A|B) = \frac{P(B|A) \cdot P(A)}{P(B)} =$$

$$\frac{1 \pm \sqrt{17}}{2} \quad \begin{array}{c} g \\ \cancel{g} \\ \cancel{g} \\ \cancel{g} \\ \cancel{g} \\ \cancel{g} \\ \cancel{g} \end{array}$$

$$\frac{x-1}{h-1} \cdot \frac{x}{h^2}$$